曆算全書

幾何補編 巻四巻五

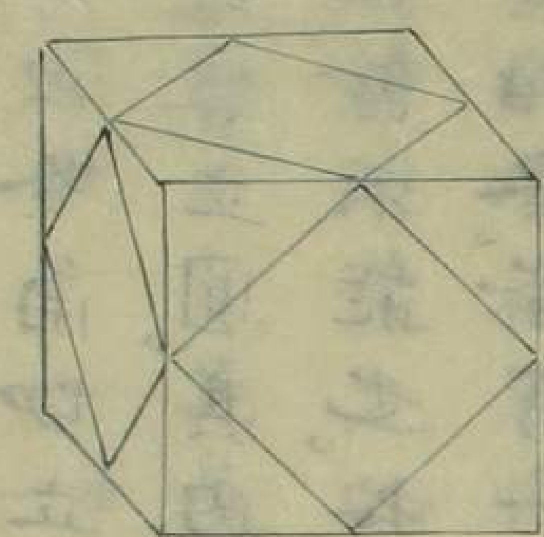
解割圜之根 一巻

第十冊

幾何補編卷四

方燈

凡燈形內可容立方。立方在燈體內。必以其尖角。各切於八三角面之心



燈體者。立方去其八角也。平分立方面之邊為點。而聯為斜線。則各正方面內成斜線正方。依此斜線斜剖而去其角。則成燈體矣。此體有正方面六。三角面八。而邊線等故亦為有法之體

凡燈體內可容八等面。八等面在燈體內。又以其尖角各切於

六方面之心

凡燈體內可容立圓。此立圓內。仍可容八等面。此八等面在立圓內。可以各角切立圓之點。同會於燈體之六方面而成一點

凡燈體容立圓。其內仍可容諸體。然惟八等面在立圓內。仍能切燈體。餘不能也。按圓燈在立圓內。亦能切燈體。與八等面同。

凡諸體相容。皆有一定比例。以其外可知其內

燈體之邊設一百。其冪一萬。倍之二萬。開方得一百四十一四二一三為燈之高及其腰廣。邊如方。而高廣如斜。故倍冪求之

以高一百四十一四二一三乘方斜之面冪二萬得二百八十二萬八千四百二十六。為方斜之立方積

立方積五因六除。得二百三十五萬七千〇二十一為燈積

燈積為立方六之五

以燈積減立積。餘四十七萬一千四百〇五。為內容八等面積。此八等面在立積內。亦在燈積內。皆同腰廣同高。其積之比例。為立積六之一。為燈積五之一

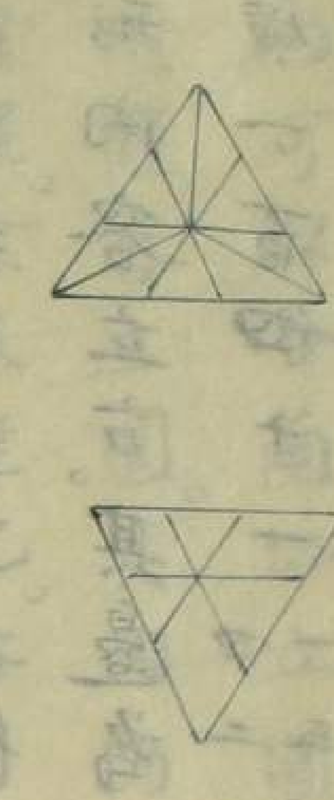
此相容比例

八等面與燈積。不惟同高廣。亦且同邊。故五之一。亦即為八等面。與燈積同邊之比例也

燈形內容立方。其邊為燈體高廣三之二　設燈體邊一百。其高廣一百四十一四二一三則內容立方邊九十四二八〇八立方積八十三萬八千〇五十一

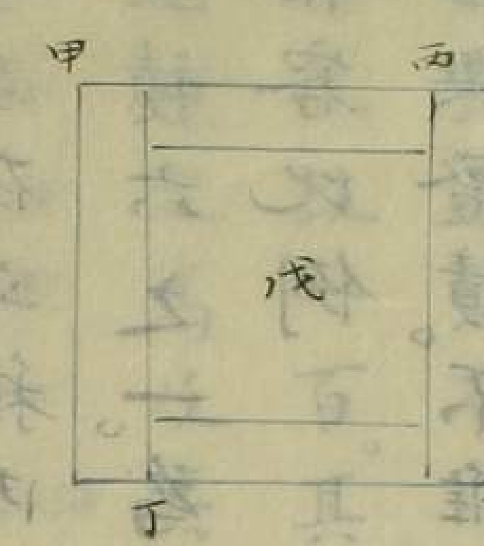
燈高廣自乘之冪二萬如在圖甲乙方。去其左右各六之一。餘

三之二如丙丁矩。又去其兩端六之一。餘三之二如戊正方。丙



丁矩一萬三千三百三十三三三戊正方八千八百八十八八八為內容正方之一面冪。其根九十四〇二八八以根乘面。得八十三萬八千〇五十一

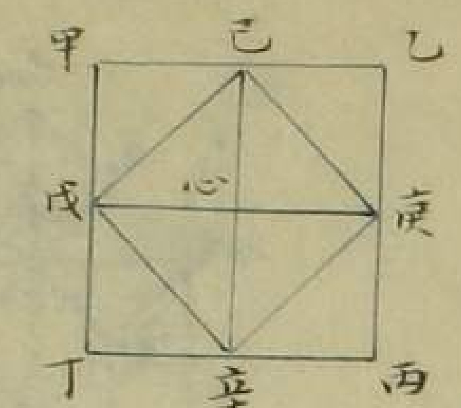
凡等邊平三角之心。依邊剖之。皆逆大邊三之一。燈內容立方之八角。皆切於平三角之心。燈改立方。則所去者。皆四圍斜面三之一。於全形為六之一。四圍皆六之一。合之為三之一。而所存必三之二矣

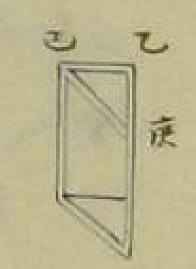


凡立方體。各自其邊之中半斜剖之。得三角錐八。此八者合之即同八等面體

依前算八等面體。其邊如方。其中高如方之斜。若以斜徑為立方。則中含八等面體而其體積之比例為六與一

立方

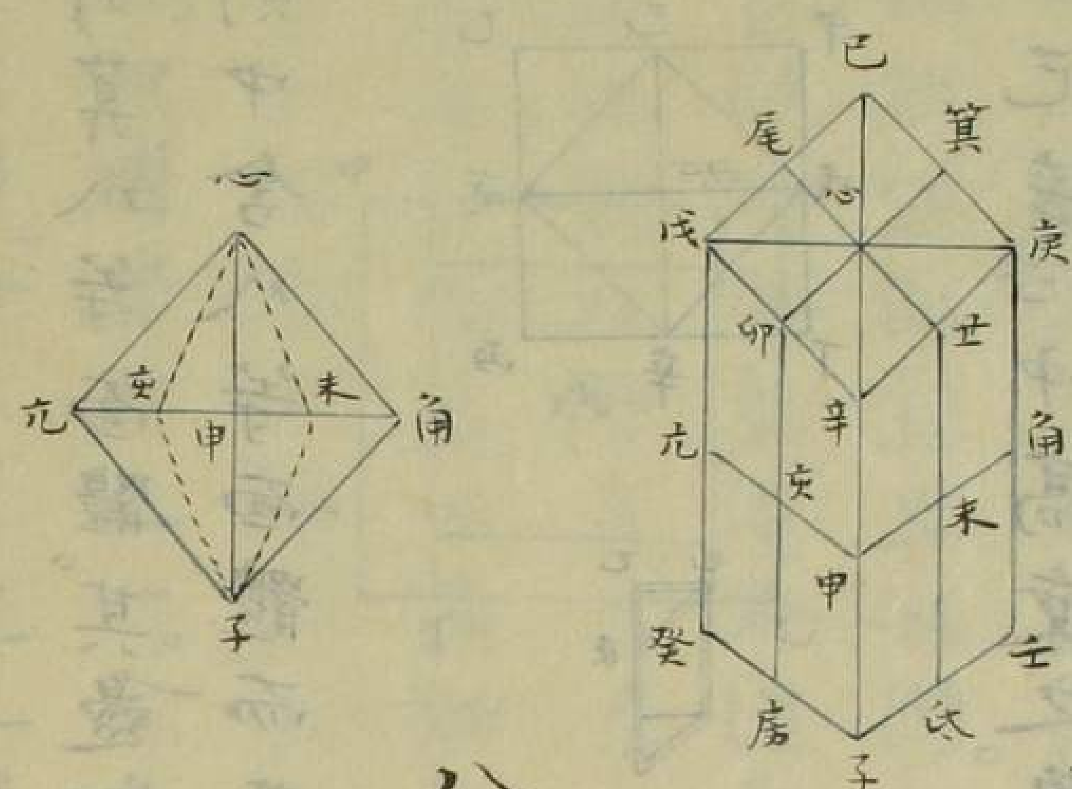




何以言之。如已心辛為八等面之中高。庚心戊為八等面之腰廣。已庚已戊。戊辛辛庚。則八等面之邊也。若以庚心戊腰廣。自乘為甲乙丙丁平面。又以已辛心中高乘之。為甲乙丙丁立方。立方一面之形。與平面等則八等面之角。俱正切於立方各面之正中。而為立方內容八等面體矣。夫已心辛庚心戊。皆八等面已庚等面為方之斜也。故曰以其斜徑為立方則中含八等面體也

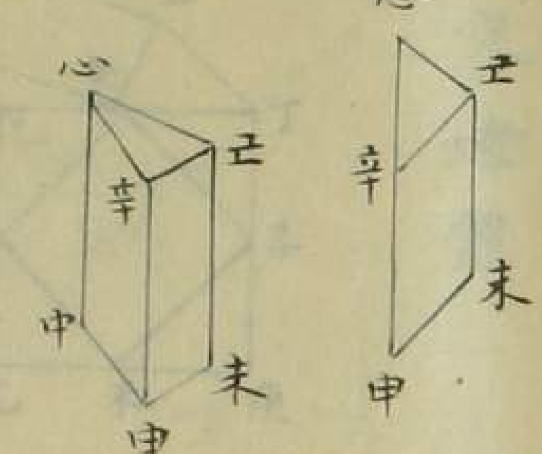
又用前圖甲乙丙丁為立方之上下平面。從已庚庚辛辛戊戊已四線剖至底。則所存為立方之半。而其所剖三角柱體四。合之。亦為立方之半也

半立方八等面

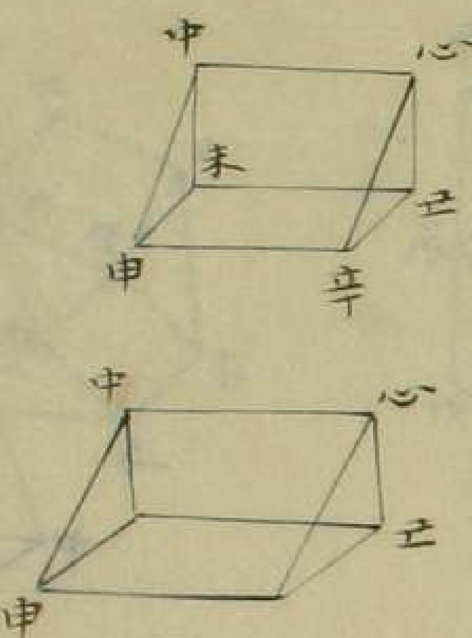


此方柱也。其高之度。如其方之斜
立方之四隅各去一立三角柱。則成
此體。其積為立方之半為八等面
之三倍。其中仍容一八等面體
八等面體。在方柱體內
柱形從對角斜線（如已辛戊庚）剖至底。又
從對邊十字線（如卯壬箕尾）剖至底。又從
腰線（角中亢）橫截。則剖為三角柱一十

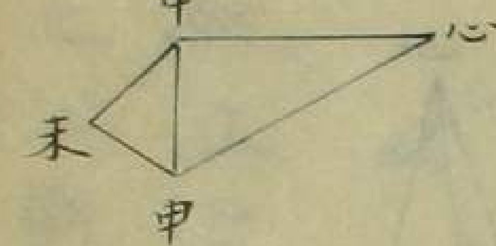
立則為三角柱



眠則成塹堵

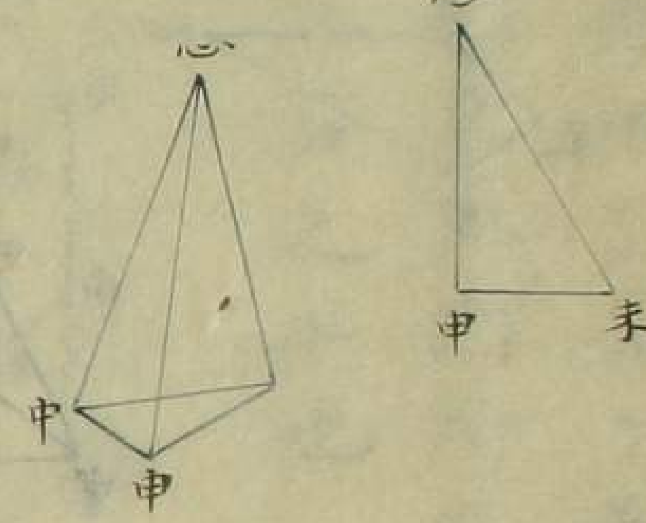


鼈臑



六。（即皆如心辛申末壬之體）
三角柱。眠視之。則塹堵也
塹堵從一尖（即心尖）斜剖至對底（申末）則
鼈臑也。鼈臑居塹堵三之一
塹堵立則為三角柱。鼈臑立則為三
角錐
八等面體。從尖（心）剖至對角。亦剖至
對邊。而皆至底（子）。又從腰（亢角甲）橫剖
之。則成三角錐十六
夫方柱為塹堵十六。而八等面為鼈
臑亦十六。則塹堵鼈臑之比例即方

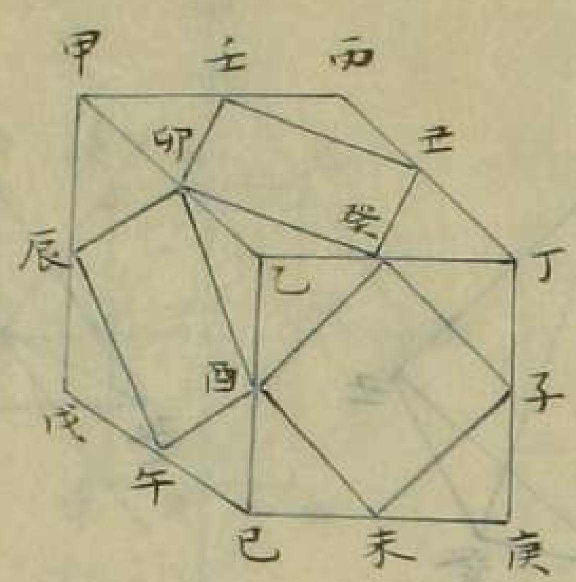
三角錐



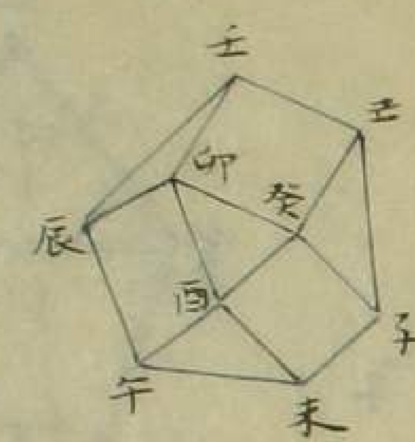
柱八等面之比例矣。鼈臑為塹堵三之一。則八等面亦方柱三之一矣。方柱者。立方之半也。八等面既為方柱三之一。不得不為立方六之一矣

立方內容燈體

立方



燈

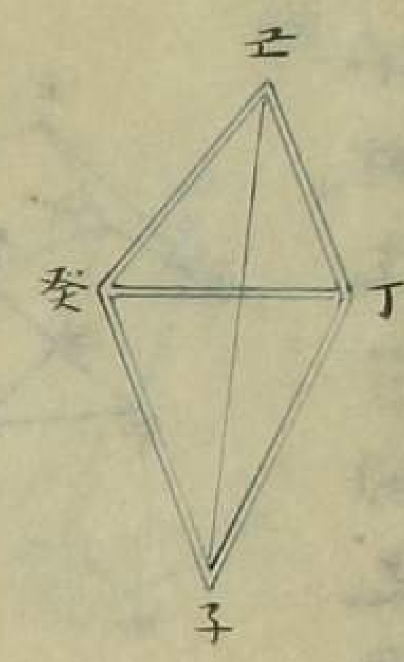


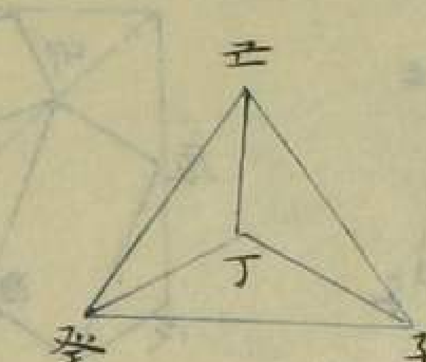
甲庚立方體六面。各平分其八邊。如壬丑癸卯及子未酉午辰諸點。而斜剖其八角。如從丑癸剖至子。從癸卯剖至酉。從酉剖至午未。則立方去其八角成燈體燈體得立方六之五

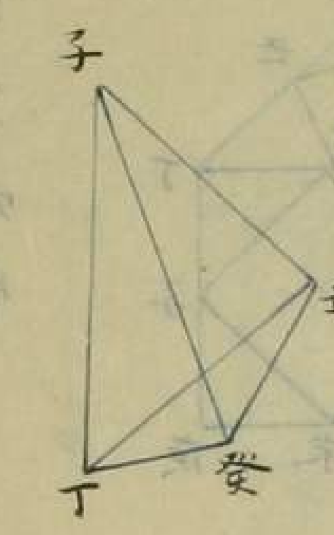
何以知之。立方所去之八角。合之即成八等面。八等面既為立方六之一。則所存燈體。不得不為立方六之五矣

凡立方內容燈體。皆以燈之邊線為立方之半斜。立方內之燈體。又容八等面。則以內八等面之邊線為立方之半斜。與立方竟容八等面無異。推此燈內容八等面

其邊線必等。其中徑亦等



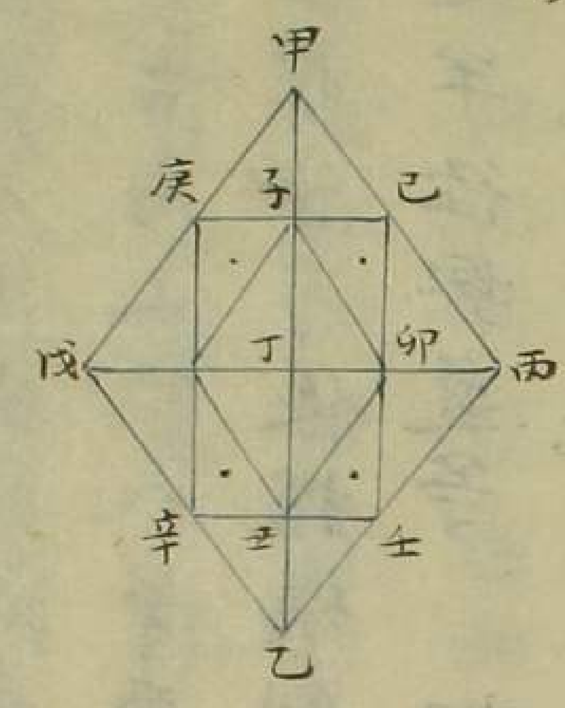


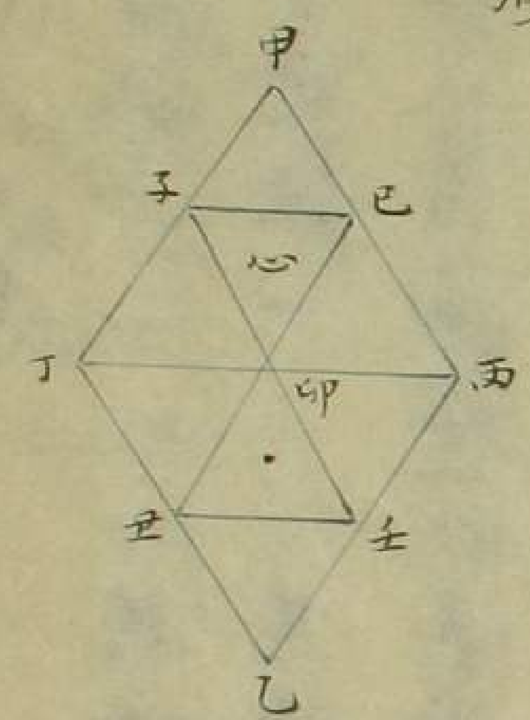


剖立方之角成此

以剖處為底。則三邊等。以立方之
角丁為頂。成三角扁錐
扁錐立起則成偏頂錐。為八等面
分體

八等面內容燈體之圖





凡八等面容燈體。皆以燈體之邊線
得八等面之半。八等面內之燈體。又
容立方。則亦方斜比例。與八等面。竟
容立方無異也

甲丙丁。丙丁乙。甲丁戊。戊丁乙。皆八
等面之一。巳子卯等小三角。在甲丁
丙等大三角面內。即燈體之八斜面
正切於八等面者也。其中央心點。即
內容立方角所切

等徑之比例

立方徑一　其邊一　其積一　一。。。。。

內容燈徑一　其邊。七　其積六之五　。八三三。。

內容八等面徑一　其邊。七　其積六之一　。一六六六。。

凡立方內容燈體。燈內又容立圓。圓內又容八等面。其切於立方之面之中央。凡六處皆同一點。若立圓內容燈體。燈內又容立方。方內又容八等面。其相切俱隔遠。不能同在一點

凡燈體皆可依撈橫剖。如方燈橫剖。成六等邊面。故其外切立圓之半徑與邊等　如圓燈橫剖成十等邊面。故其外切立圓之半徑。與其邊。若理分中末之全分與其大分

凡諸體改為燈。皆半其邊作斜線剖之

凡燈體可補為諸體。皆依其同類之面之邊引之。而會於不同類之面之中央。成不同類之錐體。乃虛錐也。虛者盈之即成原體。所以化異類為同體也

如方燈依四等邊引之。補其八隅成八尖。即成立方　若依三等邊引之。補其六隅成六尖。即成八等面

如圓燈依五等邊引之。補其十二隅成十二尖。即成二十等面。若依三等邊引之。補其二十隅。成二十尖。即成十二等面。增異類之面成錐。則改為同類之面。而異類之面隱。此化異為同之道也

凡燈體之尖。皆以兩線交加而成。故棱之數。皆倍於尖。方燈十二尖。二十四棱。圓燈三十尖。六十棱

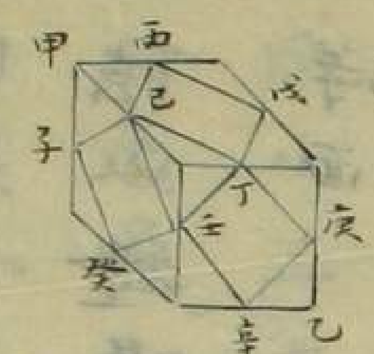
凡燈體之稜即邊皆可以聯為等邊平面圈　如方燈二十四稜。聯之則成四圈。每圈皆六等邊。如六十度分圓線　圓燈六十楞。聯之則成六圈。每圈皆十等邊。如三十六度分圓線　此外惟八等邊聯之成三圈。每圈四楞成四等面。而十二稜成六尖。有三稜八觚之正法　其餘四等面。十二等面。二十等面。皆不能以邊正相聯為圈

燈體亦有二

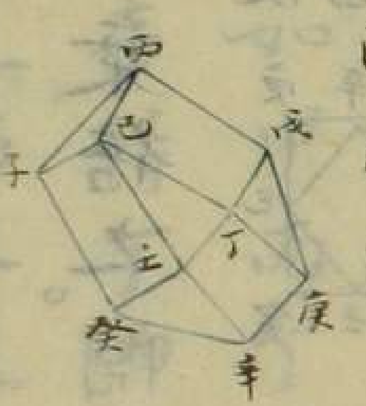
其一為立方及八等面所變。其體有正方之面六。三角之面八。有邊稜二十四。而皆同長稜。尖凡十有二。

其一為十二等面二十等面所變。其體有五等邊之面十二有三角等邊之面二十。有邊楞六十。而皆同長稜。尖凡三十。

立方及八等面。所變是刓方就圓終帶方勢。謂之方燈十二等面。及二十等面。所變是削圓就方。終帶圓體。謂之圓燈。方燈為立方及八等面所變。其狀並同。而比例同



立方



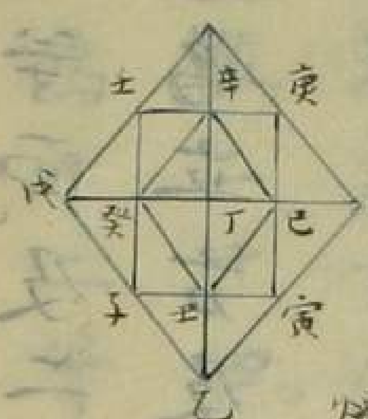
改為燈

甲乙立方體。丙丁戊已庚辛壬癸子。皆其邊折半處。各於折半點聯為斜線。如丙戊丙己等依此燈體斜線剖而去其角。則成燈形矣

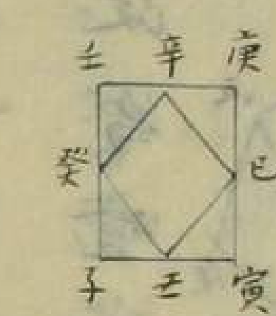
燈形之丁辛高。丙丁濶。皆與立方同徑　其邊得立方之半斜。假如立方邊丁辛一百。則燈體邊丁壬七十有奇　其積得立方六之五。假如立方邊一百。其積百萬。則燈體邊七十有奇。其積八十三萬三千三百三十三三　此為立方內容燈體之比例也。若燈與立方同邊。則立方積。必反小于燈。假如燈體邊亦一百。則其積二百三十五

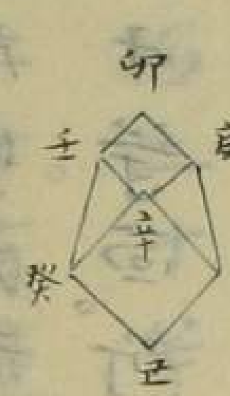
萬七千。二十一。而立方一百
之積只一百萬。是反小於燈也
解曰。燈體邊一百。如前圖之丁壬其外切立方。必徑一百四十一四二一三
如前圖之丁辛其自乘之冪二萬。以徑乘冪。得二百八十二萬八四二
六為立方積。再五因六除。得燈積二百三十五萬七千〇二十
一
又法以燈邊自乘倍之。開方得根。仍以根乘倍冪。再五因六除。
見積亦同。

八等面正視形



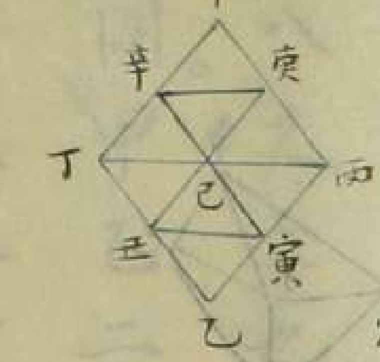
改為燈



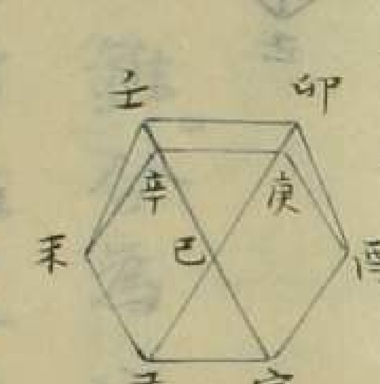


甲乙為八等面體　甲乙丙丁戊。
皆其邊稜所輳之尖　甲丙丁面
三邊皆等。其三邊折半於辛於庚
於己

側形

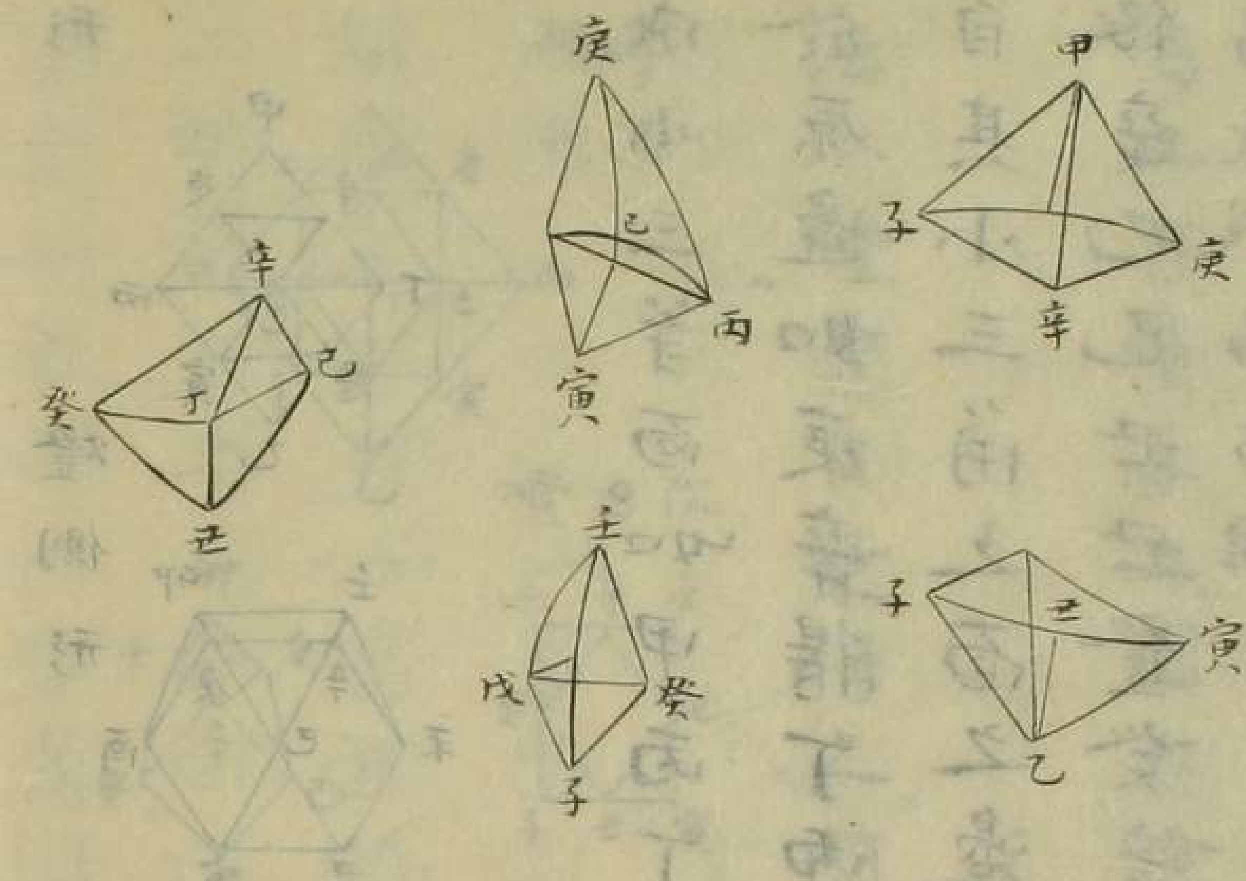


燈側形



甲丁戊面。其邊折半於辛於壬於
癸。乙丙丁面。其邊折半於寅於己
於丑。乙丁戊面。其邊折半於丑於
癸於子。各以折半點聯為斜線。則
各成小三等面。如甲丙丁面內。又成庚辛己三等邊面。其邊皆
半於原邊。如庚辛得丁丙之半。餘三邊同
各自其小三角之面之邊剖之。而去其錐角。則成燈形矣
如依辛己己丑丑癸癸辛四邊。平剖之。而去其丁角。以丁角為尖。辛己丑
癸為底成扁方錐。甲丙乙戊尖。並同則所剖處。成辛己丑癸平方面。去甲壬辛庚錐。成卯壬辛
庚面。去丙庚己寅錐成庚酉寅己面。並同一法餘可類推
八等面體有六角。皆依法剖之。成平方面六。而剖之後各存原

八等面中小三角等邊面八。與立方剖其八角者正同
燈形之高濶。皆得八等面之半如辛壬高。得甲乙之半。已癸濶。得丙戊之半其邊亦
為八等面原邊之半。 其積得八等面八之五



何以知之。曰。同類之體積。以其邊上
立方積為比例。故邊得二之一。其積
必八之一也 今所剖去之各尖。俱
以平方為底。而成方錐。兩方錐合為
一八等面體。皆等面等邊。與原體為
同類。而其邊正得原邊二之一。則其
積為八之一也 其原體六尖。各有所
成之錐體。皆相等。合之成同類八等
面之體凡三。其積共為原積八之三。以為剖去之數。則所存燈
體得八之五也

如上圖。甲乙二錐。合為八等面體一。丙戊二錐。合為八等面體
一。丁尖及所對之尖共二錐。合為八等面體一 通共剖去
同類之形三

假如八等面之邊一百。則其積四十七萬一千四百。四。其所
容燈體邊五十。其積必二十九萬四千六百二十七五。以八
等面積五因八歸之見積

或用捷法。竟以十六歸進位。所得燈積。亦同

右法乃八等面內。容燈體比例也

若燈體之邊。與八等面同大。則其積五倍大於八等面

假如燈體邊一百。則其積二百三十五萬七千。二十。以八等面邊一百之積四十七萬一千四百。四加五倍得之此法則燈體與八等面同為立方所容之比例。亦即為燈內容八等面之比例

准此而知燈內容八等面。八等面又容燈。則內燈體為外燈體八之一

燈體內容八等面　五之一

八等面內容燈體　八之五

用畸零乘法。化大分為小分。以八等面廿數八。乘五之一。得八。乘廿數五。得四十

外燈體四十　八等面體八　內燈體五　合之為內體。得外體四十之五。約為八之一

又八等面容燈。燈又容八等面。內八等面。亦為外八等面八之一。其體之比例既同則其所容之比例亦同也

立方內容燈體。燈內又容立方。則內立方邊。得外立方邊二之二。內立方積。得外立方積二十七之八

以三之二自乘再乘。為三加之比例也

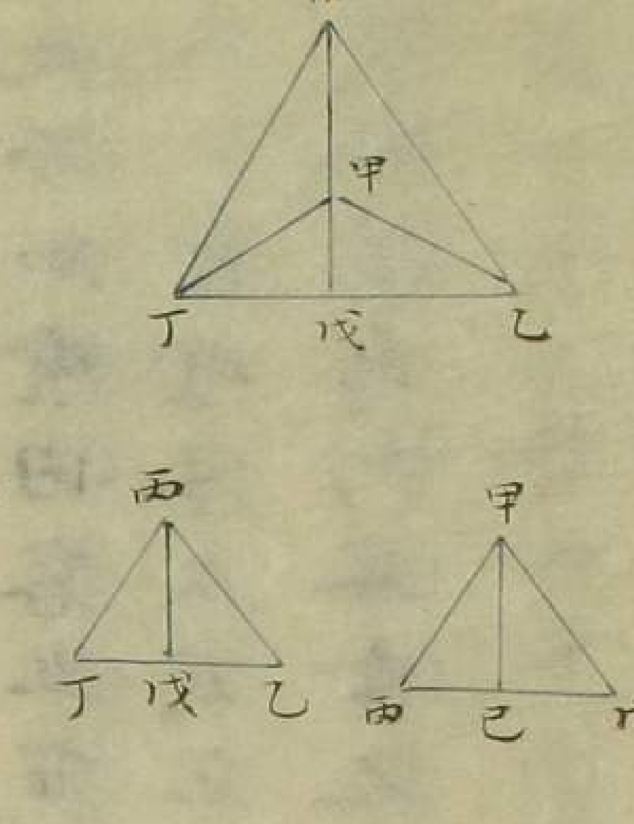
六之五　一百三十五

一百六十二

二十七之八　四十八

准此而知燈內容立方。立方又容燈。則內立方積。得燈積一百三十五之四十八。若燈容立方。立方又容燈。則內燈積。亦為外燈積二十七之八。其為所容者之比例。即能容者之比例故也

求方燈所去錐體



三角錐稜皆五十。即原邊之半。甲乙甲丙甲丁底之邊皆七十○七一○七。即燈體丙丁乙丁乙丙之邊。其半三十五三五五三乙戊戊丁

求甲戊斜垂線

法曰。乙丁為甲乙之方斜線。則甲戊為半斜。與乙戊戊丁等。皆三十五三五五三其冪皆一千二百五十

求丙戊中長線

以戊丁冪三因之。為丙戊冪。平方開之。得六十一二三七二為丙丁乙等邊三角形中長線

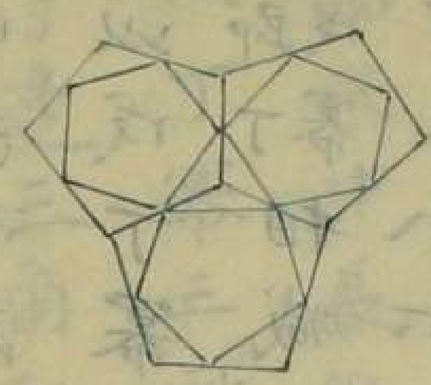
求甲己中高線

法以戊丁冪一千二百五十取三之一為己戊冪。四百一十六六六六與甲戊冪相減。餘八百三十三三三三為甲己中高冪。開方得甲己中高二十八八六七五

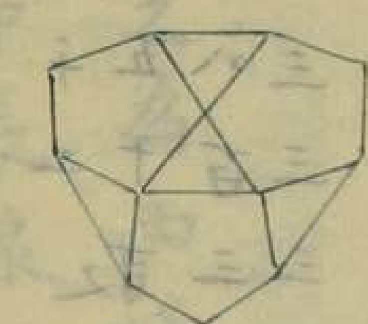
又以己戊冪。開方得己戊二十○四一二四以己戊二十○四一二四乘戊丁三十五三五五三得七百二十一六八六五。又三因之。得二千一百六十四○五七五為乙丙丁三等邊冪

又以中高甲己二十八八六七五乘之。得數。三除之。得三角錐積二萬○八百二十三六六三五又八乘之。得一十六萬六千五百八十七○三為所去八三角錐共積。即立方一百萬六之一。與前所推合。本該一十六萬六千六百六十六六六不盡。因積算尾數有欠。然不過萬分之一耳。

圓燈為十二等面。二十等面所變。體勢並同。而比例亦別
公法。皆於原邊之半。作斜線相聯。則各平面之中成小平面。此
小平面。與原體之平面皆相似。即為內容燈體之面。依此。小
平面之邊平剖之。去原體之銳角。此所去之銳角。皆成錐體。錐
體之底平割錐體則原體挫銳為平。亦成平面於燈體。原有若
干銳。亦成若干面。而與先所成之小平面不同類。然其邊則同。



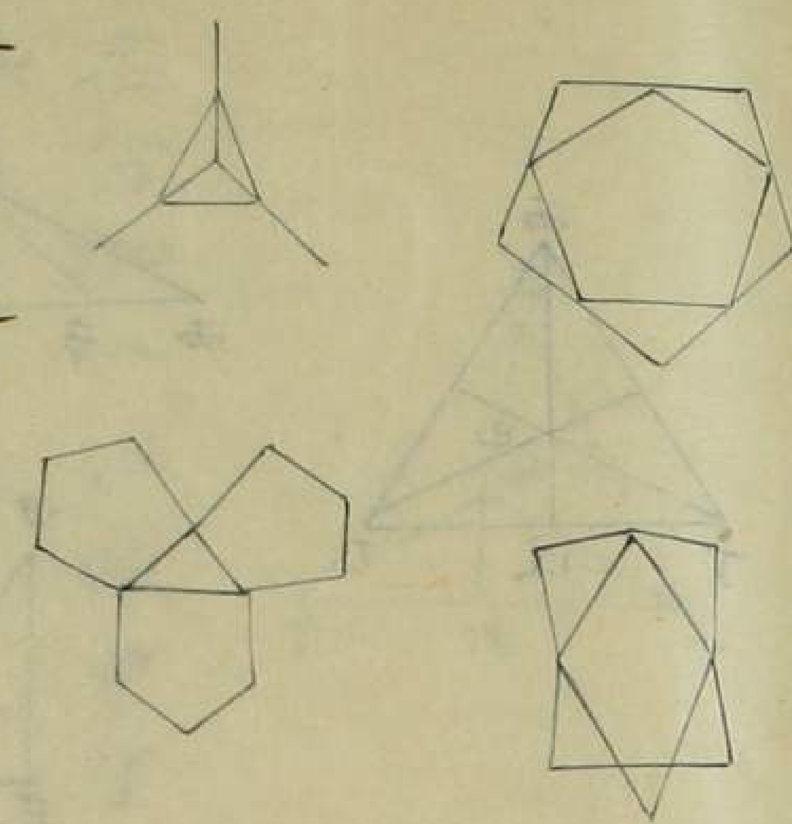
十二等面之分形



變燈

十二等面。每面五邊等。今自其各邊
之半聯為斜線。則成小平面於內。亦
五等邊為同類
依此斜線剖之。而去其角。所去者皆
成三角錐。錐體既去。即成三等面為

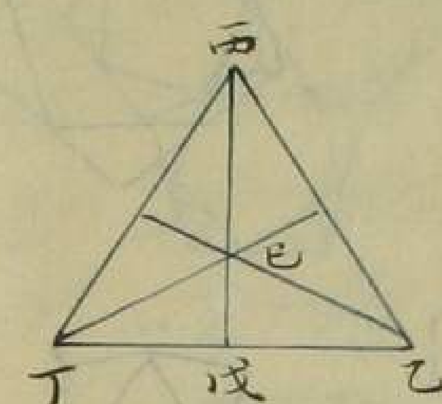
異類
原有十二面。故所存小平面。同類者
亦十有二
原有二十尖。故所剖錐體。而成異類
之面者亦二十

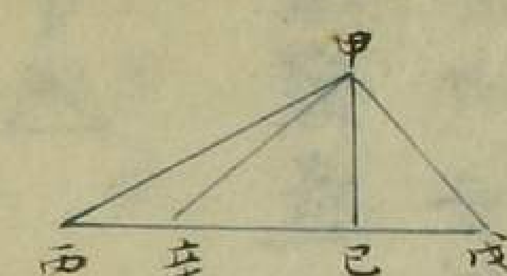


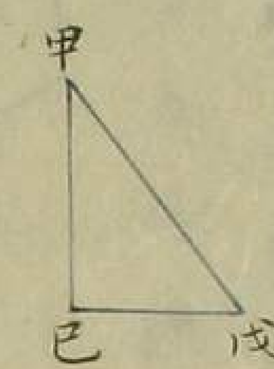
求燈體邊
法以十二等面邊。為理分中末之大分。求其全分而半之。即為
內容燈體之邊
一率　理分中末之大分　六十一八〇三三九八
二率　理分中末全分之半　五十。
三率　十二等面之邊　一百〇〇

四率 内容燈體之邊　八十〇。九七一一。

燈體邊原為大橫線之半。十二等面邊與其大橫線。若小分與大分。則亦若大分與全分也。而十二等面邊與燈邊。亦必若大分與全分之半矣





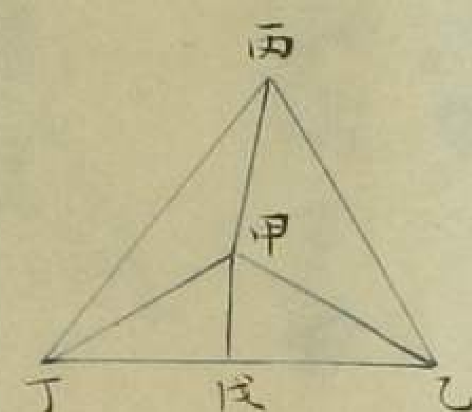


總棄較為實。戊丙底為法。法除實。得丙辛。以丙辛減戊丙。得戊辛。折半為戊巳

法當以所得戊巳。自乘為句冪。用減甲戊冪。餘為甲巳冪。開方得一十七四一八一為中高

今改用提法。省求丙辛取戊丙冪九之一。為戊巳冪。戊巳為戊丙三之一故其冪為九之一得五百四十五四二三七

或徑用戊丁冪三之一。亦同



又提法。不求甲戊斜垂線。但以戊丁冪三分加一。以減甲丁即甲丙或甲乙冪。為甲巳冪。開方即得甲巳中高。比前法。省數倍之力

戊丁冪　一千六百三十六二七一二

三之一　五百四十五四二三七

併得　二千一百八十一六九四九

甲丁即甲乙丙甲二千五百〇〇。

相減餘甲乙中　三百一十八三〇五一。

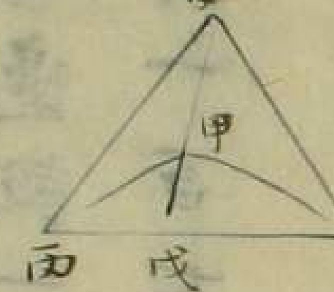
與前所得同

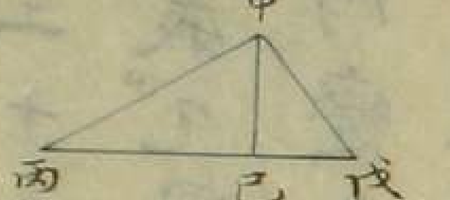
解曰。原以戊丁冪減甲丁冪三之一。減甲戊冪。得甲己冪。今以戊丁三分加一。而減甲丁冪即徑得甲己冪。其理正同

前之捷法。有求丙辛。及較總相乘。後用底除。諸法可謂捷矣。今法徑不求甲戊斜垂線。捷之捷矣。凡三角錐底濶等者。當以為

訂定三角錐法圖燈所去

用捷法。以戊丁冪三分加一。減甲丁冪。為甲己冪





甲丁甲乙甲丙皆設五十

丙丁丁乙乙丙皆八十。一九。一七。其半戊丁戊乙四十。四五八半。

丙戊七十。〇六二九為底之垂線

甲己一十七。八四一一為中高

丙乙丁底冪二千八百三十四一〇三八

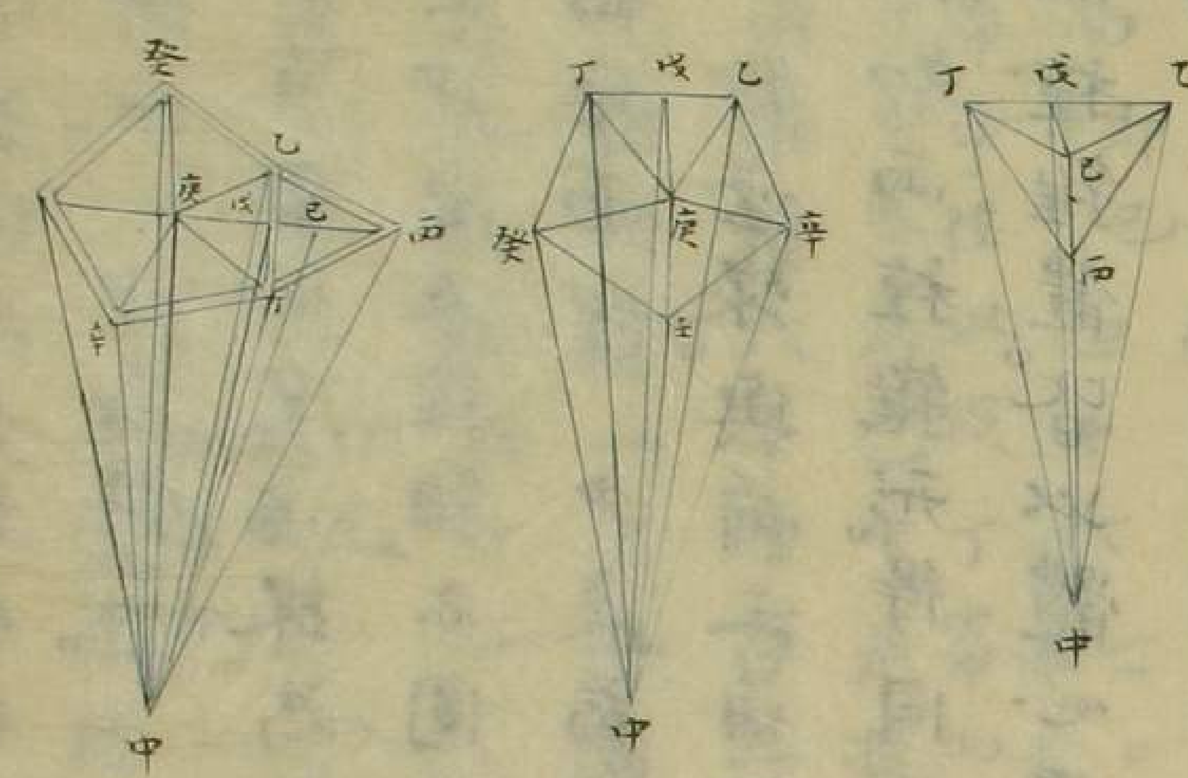
法以半邊戊丁乘中長。丙戊得底冪。丙乙丁 以中高甲己乘底冪。丙乙丁三除之得錐積一萬

得三角柱積五萬。五百六十三五二乙三

六千八百五十四五〇九七 又以二十乘之為燈體所去之積二

十三萬七千〇九十〇一九四〇
十二等面邊設一百。前推其積為七百六十八萬二千二百一
十五。今減去積三十三萬七千〇九十。存燈積七百三十四萬
五千一百二十五　內容燈體邊八十〇九〇一七
依測量全義。凡同類之體皆以其邊上立方為比例。可以推知
二十等面所變之燈體
二十等面邊設一百。則燈體之邊五十
捷法。求得一百七十三萬三千九百四十八。為設邊五十之燈
積
一　燈體邊八十〇九〇二七之立方五十二萬九千〇百〇八五
二　燈體積七百三十四萬五千一百二十五
三　燈體邊五十之立方一十二萬五千
四　燈體邊五十之積。一百七十三萬三千九百四十八

圓燈

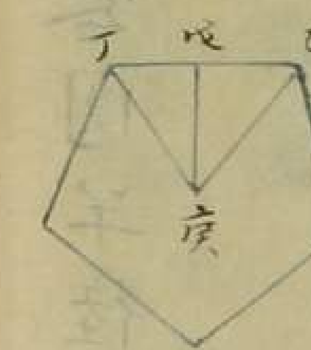


邊設三十〇九〇一七。即理分中末之大分乙丁
外切立圓半徑五十。即理分中末之全分丁中乙中
外切立圓全徑一百。即外切立方
體積四十〇萬三千三百四十九
內有三角錐計二十。共積一十二萬
八千七百五十三
五稜錐計十二。共積二十七萬四千
五百九十六

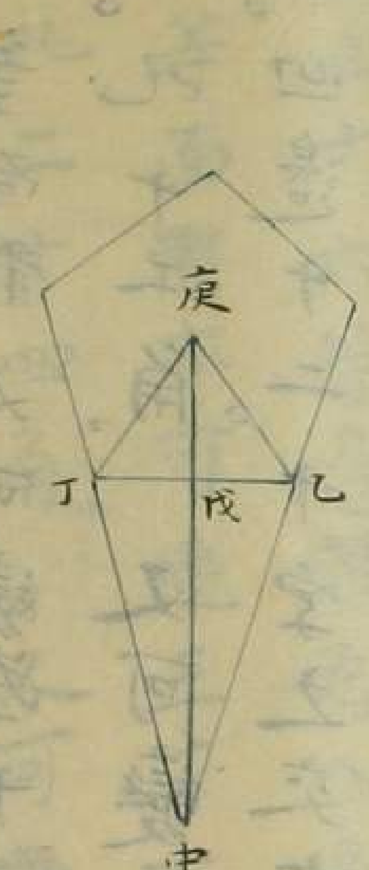
丁中丙乙三角錐。為圓燈分體之一。乙丁丙三等邊面。巳為
平面心。中為體心。中巳為分體之中高。戊丁為半邊。
丁中自體心至角線。為分體之棱。戊中為斜垂線。
乙癸中辛五稜錐。亦圓燈分體之一。乙丁癸壬辛五等邊面。
庚為平面心。中庚為分體中高。其戊丁半邊。丁中分體稜。
戊中斜垂線。與前三角錐皆同一線
何以知兩種錐形。得同諸線乎。曰。乙戊丁邊。兩種分體所同用。
而兩種錐體。皆以體心中為其頂尖。故諸線不得不同。觀上圖
自明
先算三角錐共二十
半邊一十五四五。八五。戊丁冪二百三十八七二八七

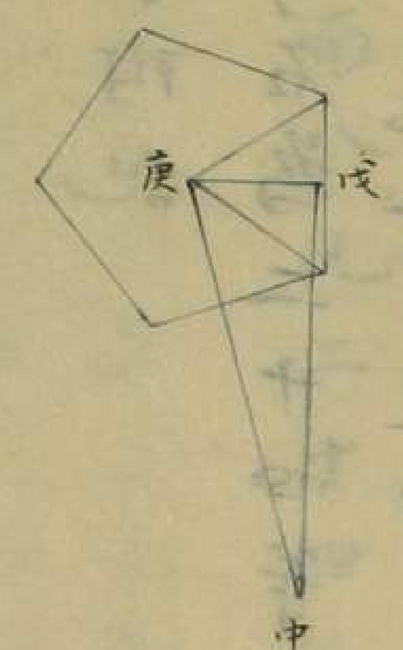
平面容圓半徑即巳戊。八九一五。其冪七十九五七六二。用提法取戊丁冪。以三除
得之
平面積乙丙丁面四百一十三四八七九
中高即巳中四十六七。七五。本法以戊丁冪減丁中冪。為戊中冪。又以戊丁冪三之一。當戊巳冪。減之為巳
中冪。今徑以戊丁冪加三之一。
減丁中冪。為巳中。是提法也
三角錐積六千四百三十七六六二。
二十錐共積一十二萬八千七百五十三二四
次算五稜錐共十二
半邊一十五四五。八五戊丁
半周七十七二五四二五。用半邊五因得之。
平面容圓半徑二十一二六六三戊庚

五等邊平積一千六百四十二九一二〇
中高四十一七八五三庚中
五稜錐積二萬一千九百六十二六六
十二錐共積二十七萬四千五百九十六
求戊庚半徑
一率三十六度切線〇七二六五四
二率全數一〇〇〇〇
三率半邊戊丁一十五四五八五
四率平面容圓半徑庚戊二十一二六六三



戊丁句冪二百三十八七二八七
丁中弦冪二千五百〇
相減
戊中股冪二千二百六十一二七一三





戊庚句冪四百五十二二五五五
戊中弦冪二千二百六十一二七一三
相減
庚中股冪一千八百〇九〇一五八

戊丁半邊冪四因之。為全邊三十。九〇一七之冪
一　燈體邊五十之立方一十二萬五千
二　燈體邊五十之體積一百七十三萬三千九百四十八
三　燈體邊三十。九〇一七之立方二萬九千五百〇八四九八七
四　燈體邊三十。九〇一七之體積四十。萬九千三百二十九

與細推者。只差五千九百八十。為八十分之一

柱積六萬八千六百四十九

錐積二萬二千八百八十三

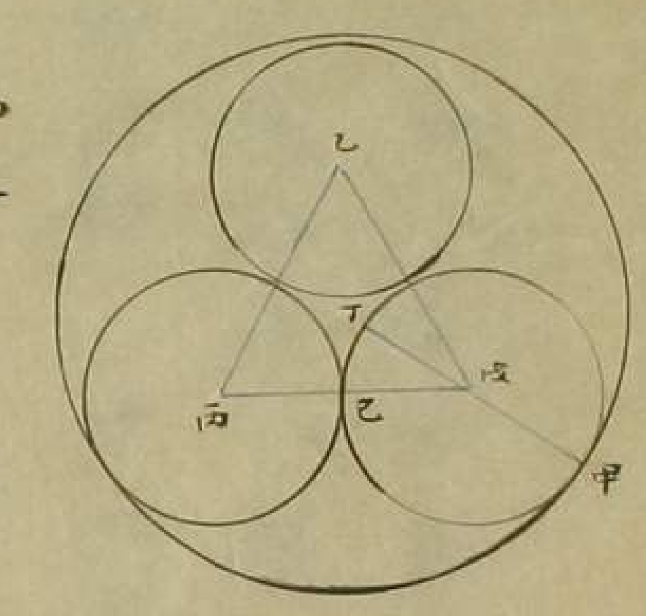
十二錐共積二十七萬四千五百九十六

孔林宗附記

方燈可名為二十四等邊體　圓燈可名為六十等邊體
四等面體。又可變為十八等邊體。為六邊之面四。為三邊之面
四。凡十二角。又可變為二十四等面體。面皆三邊。凸邊二十
四。四邊十二。十字之交六。凡八角如蒺藜形　六等面體。又可
變三十六等邊體。為八邊之面六。為三邊之面八。凡二十四角。
八等面體亦可變三十六等邊體為六邊之面八。為四邊之面
六。凡二十四角。又可變四十八等邊體。為四邊之面十八。為
三邊之面八。凡二十四角

大圓容小圓法　平　渾

平

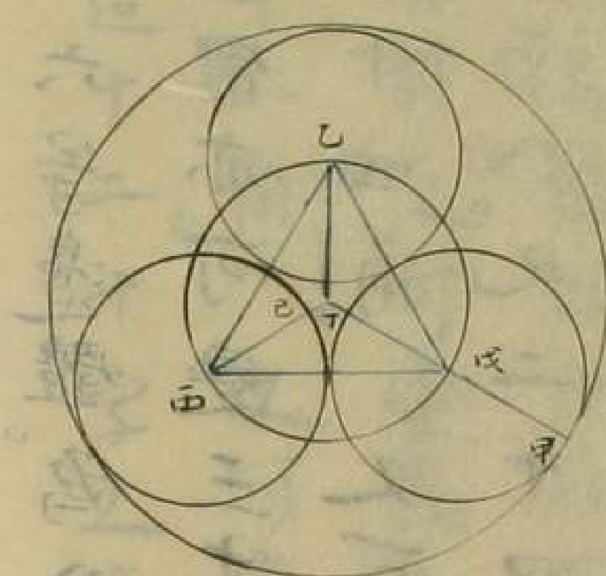


甲大圓内容乙戊丙三小圓。法以小圓徑如乙戊戊丙為邊。作等邊三角形。而求其心。如丁。乃於丁戊三角形自心至角線加戊甲。小圓半徑為大圓半徑。丁甲

凡平圓内。容三平圓四平圓。五平圓。六平圓皆以小圓自相扶立。

若平圓内容七平圓以上。皆中有稍大圓夾之

渾

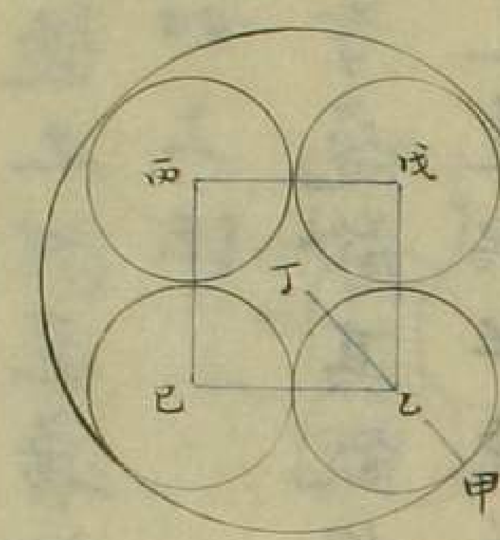


甲大渾圓。内容丙戊乙已四小渾圓。法以小渾圓徑如乙戊戊己等為邊作四等面體。而求其體心。如丁。次求體心至角線如丁戊丁己丁乙丁丙又為外切立圓半徑。加小渾圓半徑。即戊甲為大渾圓半徑如丁甲

凡渾圓内容四渾圓。或容六渾圓或容八渾圓十二渾圓皆直以小渾圓自相扶。

若渾圓内容二十渾圓。則中多餘空。必内有稍大渾圓夾之

平



甲大平圓。内容乙戊丙己四小平圓。法以小圓徑如乙戊等為邊。作平方。如乙戊丙己方而求其斜如丁乙即方心至心圓心線加小圓半徑。如乙甲為大圓半徑如丁甲

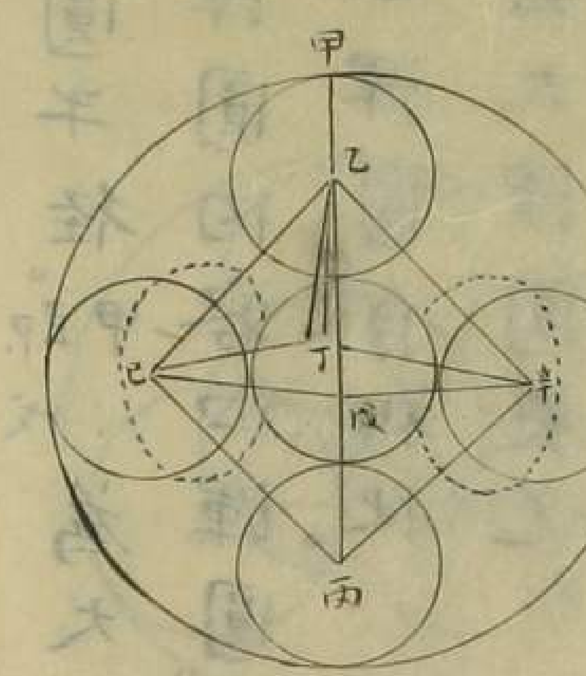
若先有大圓甲。而求所容小圓。則以三率之比例求之

一率　方斜併數　二四一四

二率　方根　一〇

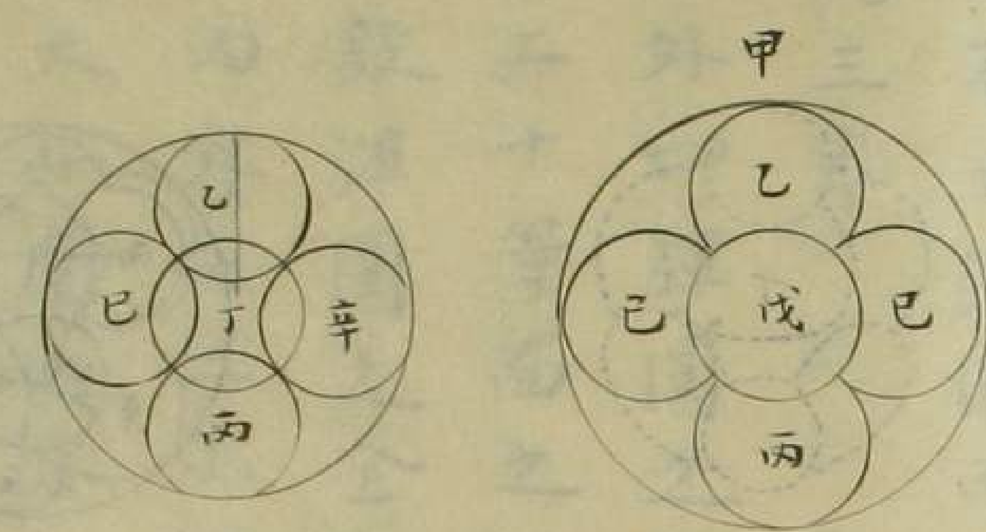
三率　所設之渾圓半径　丁甲
四率　所容之小圓半径　乙甲
推此而知五等邊形。於其鋭角為心。半其邊為界。作小圓。而以
五等邊之心至角加半邊。以為半径。而作大圓。則大圓容五小
圓。俱如上法
若六等邊於其鋭作小圓。仍可於其心作圓。共七小圓。何也。六
等面之邊。與半径等也。其法只以小圓径。即六等邊二分加一。為大
圓半径。

渾



甲大渾圓内容乙丙等六小渾圓
法以小渾圓之径為邊。作八等面虚體。
如乙巳丙辛戊。皆小立圓之心聯為線

正面
渾
對面



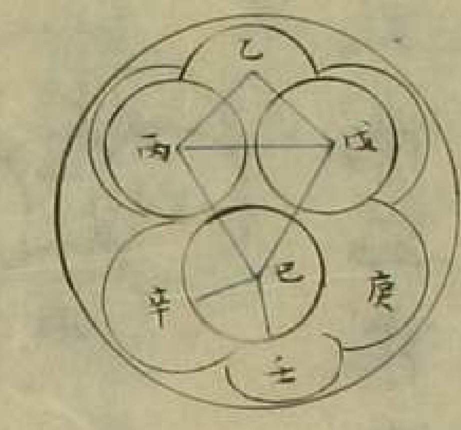
則成八觚　乃求八等面心丁至角之
度。如丁乙等加小圓半径如甲乙為大渾圓半
径。如甲丁
捷法以小渾圓径為方。即乙巳丙辛平方求其
斜。如丁乙。加小圓半径如甲乙為大圓半径。
或以小渾圓径。自乘而倍之。開方得根。
加小圓半径。為大圓半径。亦同
或先得大圓而求小圓径。則用比例
一率　方斜并　二四一四
二率　方根　一。
三率　所設大渾圓之径

四率　内容六小渾圓之徑

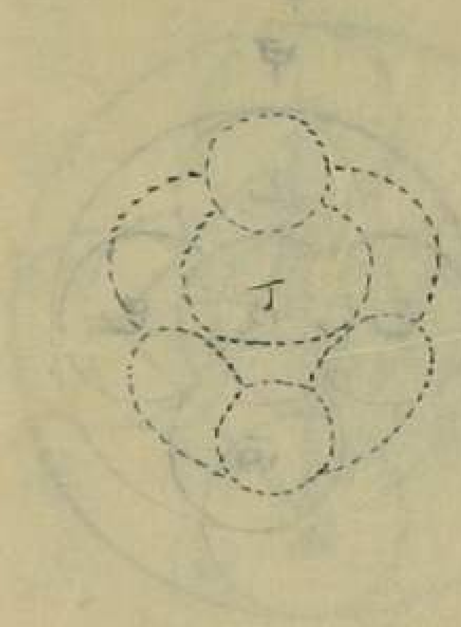
甲渾圓内容乙丙戊己庚壬辛。及癸丑子寅卯十二小圓

正面

渾



對面



法以小立圓徑。如乙丙等作二十等面虛體之稜。如乙丙等。俱小圓之心聯為線。則成二十等面之稜次求體心丁至角即小圓心之線。如乙丁加小圓半徑。如乙甲為大圓半徑如甲丁

按體心至角線。即二十等面外切圓半徑

二十等面之例邊一百即小渾圓例徑

外切渾圓例徑二百八十八一三五五

二十等面邊一百者。其外切渾圓徑一百八十八奇又加小渾例徑得此數

若先有大渾圓。而求所容之十二小渾圓則以二率為一率。四率為三率

一　外切渾圓之例徑二百八十八一三五五

二　二十等面之例邊一百即小渾圓例徑

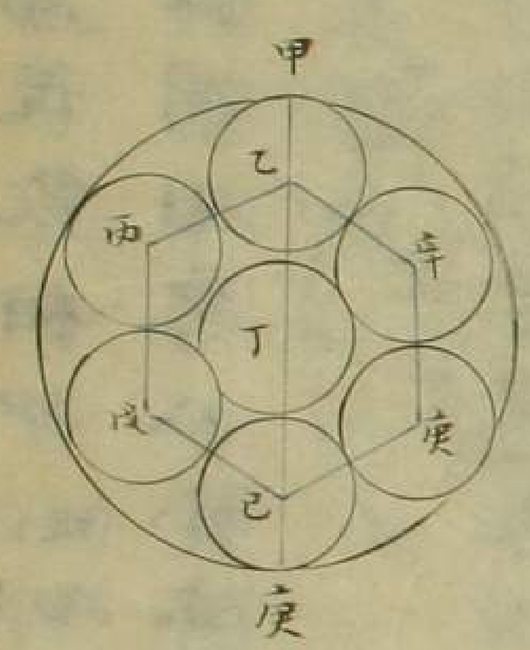
三　設渾圓之全徑一百

四　内容十二小渾圓之徑三十八六九四八

其比例如全分與小分

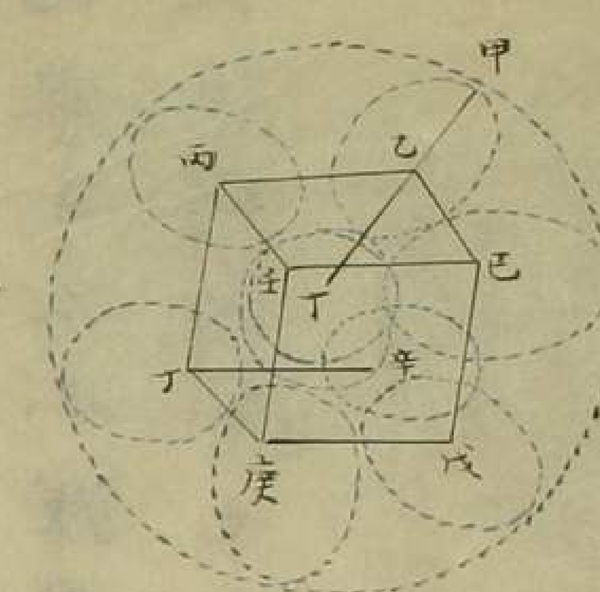
甲庚大平圓内容七小圓

平



法以甲庚圓徑取三之一。如丁乙庚辛等為小圓徑。若容八圓以上。則其數變矣。

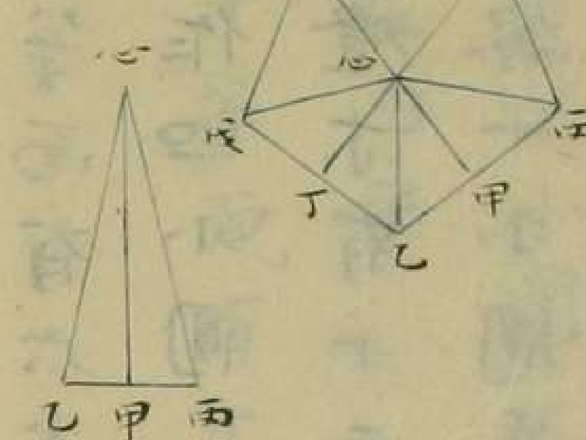
假如以七小圓拘布於大圓周之内。而切於邊。則中心一小圓。必大於七

小圓而後能相切
甲大渾圓内容八小立圓以上倣此
渾


法以小圓徑作立方。如乙庚方求其立方
心至角數。即外切渾圓半徑如乙丁再加小圓半
徑。如甲乙為大渾圓半徑。如甲丁
按八小員半徑十。甲乙則其全徑二十。
內斜線乙丁十七。加甲乙。共二十七。內減小圓徑二十。餘七。倍之得
十四。是比小圓半徑為小。其比例為十之七。安得復容一稍大
小圓在內乎
又二十等面。有十二尖。可作十二小圓。以居大渾圓之內。而為
所容

又八等面有六尖。可作六小圓。為大渾圓所容　四等面有四
尖。可作四小圓
又方燈亦有十二尖。可作十二小圓。為大渾圓所容。其中容空
處。仍容一小圓為十三小圓。皆等徑也
十二等面有二十尖。用為小渾圓之心。可作二十小立圓。以切
大渾圓。內有稍大渾圓夾之
圓燈尖三十。可作三十小球。亦皆以內稍大渾圓夾之
公法皆以心至尖。為小渾圓心。距體心之度。皆以小渾圓徑為
所作虛體邊
如作內容二十小渾圓。聯其心。成十二等面虛體
虛體之各邊。皆如小渾圓徑也虛體之各尖距心皆等。此距心

度。以小渾圓半径加之。為外切之大渾圓半径。以小渾圓半径
減之。為内夾稍大渾圓半径
渾圓内容各種有法之體。以查曲線弧面之細分
公法凡有法之體。在渾圓體内。其各尖。必皆切於渾圓之面
凡渾圓面與内容。有法體之尖相切成點。皆可以八線知其弧
度所當
内惟八等面。皆以弧線十字相交為正角。餘皆鈍角。其十二等
面則鈍角。



十二等面每面五邊等析之。從每面之
角至心。成平三角形五。則輳心之角皆
七十二度。半之三十六度。即甲心乙角。

其餘心乙甲角。必五十四度。倍之為甲乙丁角。則百〇八度。故
為鈍角
凡渾圓面切點。依内切各面之界聯為曲線。以得所分渾體之
弧面。皆如其内切體等面之數之形
如四等面則其分為弧面者亦四。而皆為三角弧面。十二等面。
則亦分弧面為十二。而皆成五邊弧形。八等面則弧面亦分為
八。二十等面弧面。亦分二十。而皆為三角弧形。内惟六等面為
立方體。所分弧面共六。皆為四邊弧形
凡渾圓面上。以内切両點聯為線。皆可以八線知其幾何長
其法以各體心到角之線。命為渾圓半径。以此半径求其周作
圜線。即為圓渾體過極大圈。以八線求両點所當之度。即知両

點間曲線之長

凡渾圓面以曲線為界。分為若干相等之弧面。即可以知所分弧面之冪積

假如四等面外切渾圓，依切點聯為曲線。分渾圓面為四。則此四相等三角形弧面。各與渾圓中剖之平圓面等冪何也。渾圓全冪。得渾體中剖平圓面之四倍。今以渾冪分為四。即與渾圓中剖之平圓等冪矣

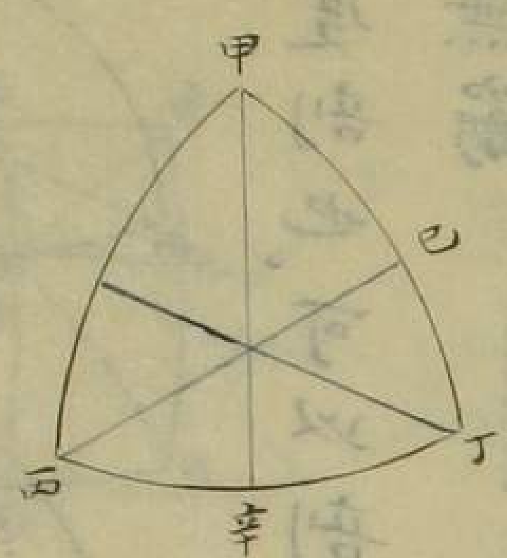
推此而知六等面。分外切渾圓冪為六。即各得中剖平圓三之二

八等面分渾圓冪為八。即各得中剖平圓之半冪

十二等面分渾圓冪為十二。即各得中剖平圓三之一

二十等面分渾圓冪為二十。即各得中剖平圓五之一

凡依等面切渾所剖之圓冪又細剖之。皆可以知其分冪

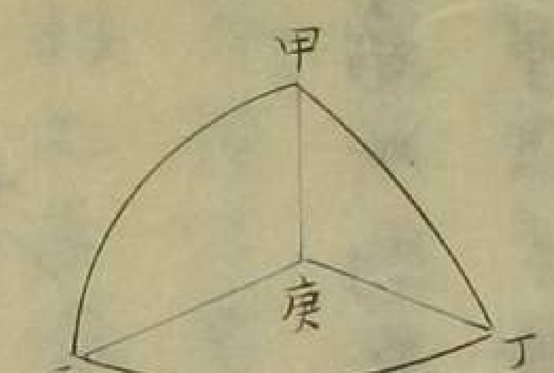


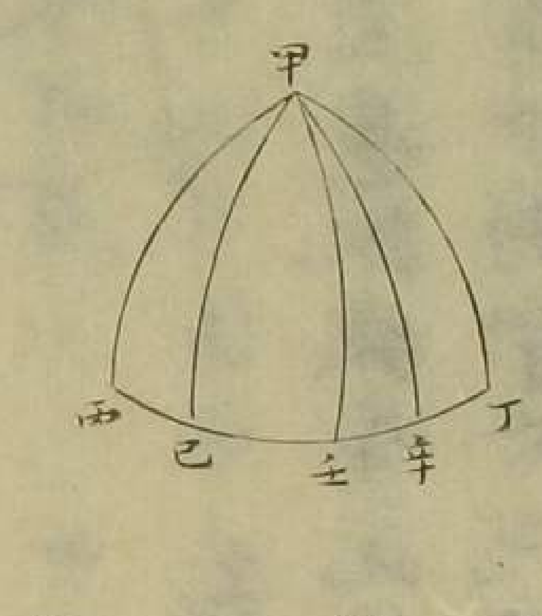
假如四等面。所分為渾圓冪四之一。而作三角弧面。若中分其邊而會於中心。則一又剖為三為渾圓冪十二之一。與十二等面所分正等。但十二等面所剖為三邊弧線等此所分為四邊弧線形如方勝而邊不等。若自各角中剖會於心。成三邊形。其冪亦等。而邊亦不等也

再剖則一剖為六。為渾圓面冪二十四之一。皆得十二等面所剖之半而邊不等

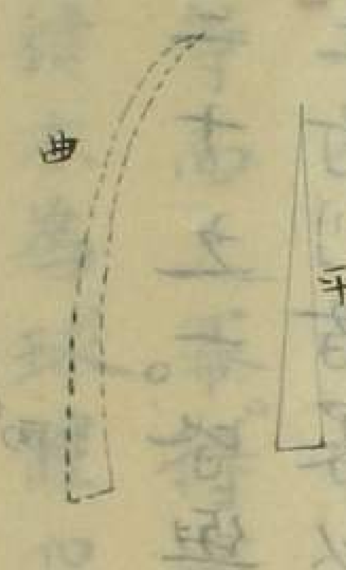
若但一剖為二。則得渾圓冪八之一。與八等面所剖正等。但八

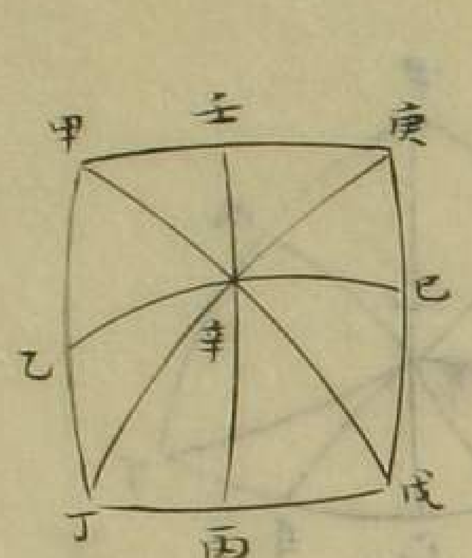
等面三邊等。又三皆直角。此則邊不等。又非直角
假如八等面所剖為渾冪八之一。若一剖為二。則十六之一。剖

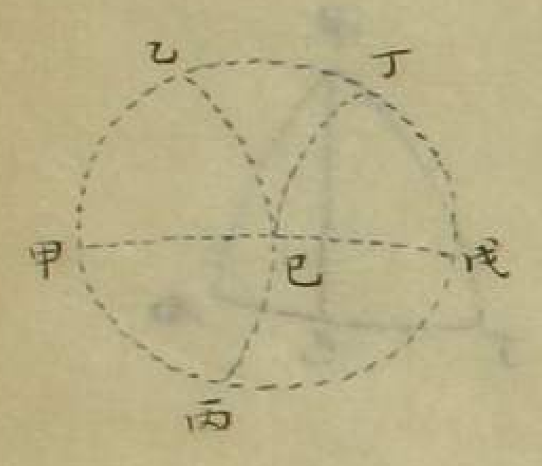




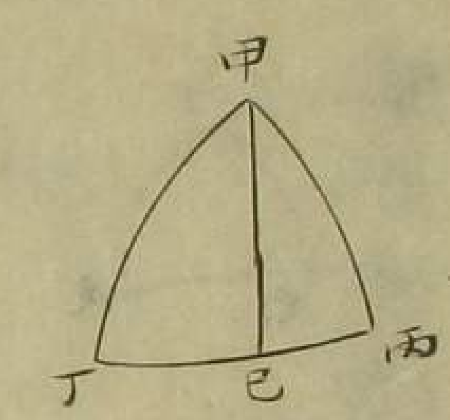
為四。則三十二之一。可以剖為六
十四至四千九十六
若以三剖。則渾冪二十四之一。如
十二等面之均剖。亦如四等面之
六剖也。再細剖之。可以剖為九十。
是依度剖也。可以剖為五千四百。則依分剖也。再以秒微剖之。
可至無窮
惟八等面。可以細細剖之者。以腰圍為底。而兩弦會於極。其形
皆相似。故剖之可以不窮

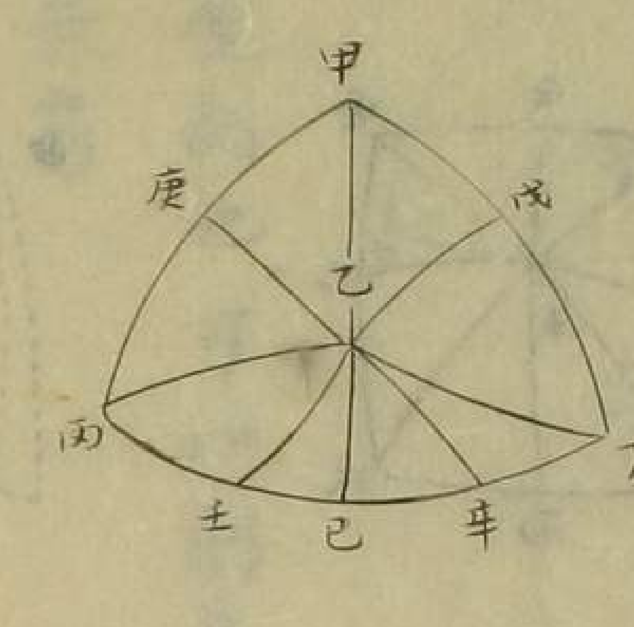






又以此知曲面之容。倍於平面。何也
八等面所剖之渾體腰圍。卽平圓周
也。以平圓周之九十度為底。兩端皆
以平徑為兩弦。以會於平圓之心。則
其冪為平圓四之一。若渾體四面以
腰圍九十度為底。兩端各以曲線為
兩弦。以會於渾圓之極。則其冪為平
圓二之一矣
假如六等面。卽立方在渾圓内剖渾冪
為六。得渾冪六之一。若一剖為二。則
與十二等面所剖等。剖為四則二十





四之一。再剖則一為八。而得四十八之一

假如十二等面。剖渾冪為十二。各得渾冪十二之一。若剖一為五。則得六十之一。再剖一為十。則得百二十之一。而與八等面所剖為十五之一

假如二十等面。剖渾冪為二十。各得渾冪二十之一。若一剖二。則四十之一。若一剖三。則六十之一。若一剖六。則百二十之一。皆與十二等面所剖之冪等。而邊不必等也

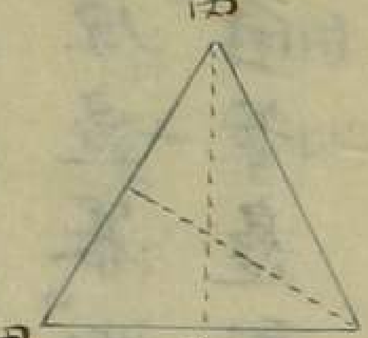
凡球上所剖諸冪以為底。直剖至球之中心成錐形。即合球體為若干分

如四等面之冪。得球冪四之一。依其邊直剖至球心。成三角錐。其錐積亦為球體四之一推之盡然

幾何補編 補遺

平三角六邊形之比例

平三角等邊形



甲丁丙三邊等形。其邊丁甲折半。丁乙自乘
而三之。即為對角中長線冪。開方。得中長線
丙乙。既得中長線丙乙。以乘丁乙半邊。即
等邊三角形積。若以丙乙冪丁乙冪相乘
得數。平方開之。得三等邊形之冪積

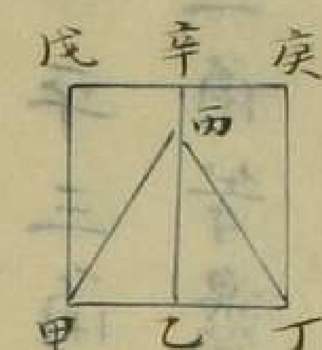
捷法。不求中長線。但以丁乙冪三因之。與丁乙冪相乘。開方得
根。即三等邊冪積 或用原邊丁甲自乘得數。乃四分之。取四
之一。與四之三相乘。得數開方。得三等邊積亦同

論曰。邊與邊橫直相乘得積。若邊之冪乘邊之冪。亦必得積之冪矣。故開方得積。

法曰。以原邊之冪。三因四除之。又以原邊之半。乘之兩次為實。平方為法開之。得三等邊形冪積。

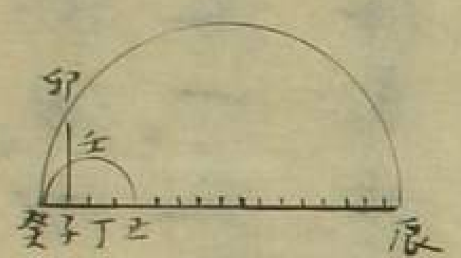
解曰。原邊冪四之三。即中長冪也。半邊乘二次。以冪乘也又法。以原邊冪。與半邊冪相減相乘。開方見積。

平三角等邊形冪積自乘之冪。與平方形冪積自乘之冪。若三與十六理同前條



解曰。甲戊庚丁為平方形。丁丙甲為等邊三角形。其邊同為甲丁。題言丁甲線上。所作三等邊形。與所作正方形。其積之比例。若平積三與十六之平方根也。即一七奇與四。

捷法。於分面線上。取三點為等邊三角形積。其十六點。即正方積。若以邊問積。則以邊之方冪數。於分面線之十六點為句。置尺。取三點之句。即得三等邊積。其設數得數。並於平分線取之。此用比例尺算



又法。作癸卯辰半員。辰癸為徑。於徑上句分十七分。而儘一端取其四分如壬癸。壬癸為辰癸十七分之四。壬子為辰子十六分之三則折半於丁。以丁為心。丁癸為半徑。作癸壬小半員。又以丁癸折半於子。作卯子直線與辰癸徑為十字直線為割小員於壬。則壬子與卯子之比例。即三等邊冪與正方冪積比例。

用法。有三等邊形求積。法以甲丁邊上方形即甲庚積。作卯子直線如句。四倍之。作橫線如辰子為股。次引橫線。取子癸為卯子四之一。又取丁子如癸子。次以丁癸為半徑。丁為心。作半員。截卯子於壬。即得壬子為三等邊積。

捷法。不作辰子線。但於子作半十字線如癸丁。次於子點左右。取癸取丁。各為卯子四之一。乃任以丁為心。癸為界。作割員分。即割卯子於壬。而為三等邊形之積。

論曰此借用開平方法也。平方求根。有算法。有量法。此所用者。量法也。量法有二。其一以两方之邊當句當股。而求其弦。是為并方法也。其一用半員取中比例。此所用者中比例也（詳比例規解）

附三等邊求容圓

法曰。以原邊之冪。十二除之為實。平方開之。得容圓半徑

解曰。原邊冪十二之一。即半邊三之一也

附三等邊形求外切圓

法曰。以原邊之冪。三除之為實。平方開之。得外切圓半徑。一法倍容圓半徑。即外切圓半徑

、新增求六等邊法

法曰。六等邊形者。三等邊之六倍也（以同邊言者） 用前法得三等邊積六因之。即六等邊積

依前法。邊上方冪。與三等邊形冪。若四。與一七奇。因顯邊上方冪。與六等邊形冪。若四。與十。二奇（亦若一〇。與二五五）。

今有六等邊形問積。

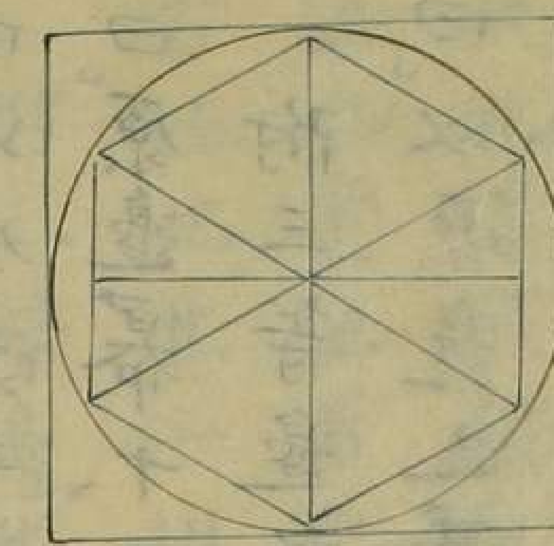
法以六等邊形之一邊自乘。得數。再以

二五五乘之。降兩位見積

解曰。置四〇〇。與一〇〇。二者各以四除之。則為一〇〇。與二五五之比例也。

若問員內容六等邊形者。即用員半徑上方冪為實。以二五五為法乘之。得數降二位。見積亦同。降二位者。一〇〇除也。一依顯平員積與其內容六等邊形積之比例。若三一四與二五五。

論曰。六等邊形之邊。與外切員形之半徑同大。故以半徑代邊。其比例等。半徑上方。與六等邊形。亦若一與二五五。然則員全徑上方形。與內容六等邊形



必若四〇〇。

亦必若二

用尺算　用平分線　求同根之冪

平方冪　四〇〇　八十。　皆倍而退位之數

平員冪　三一四　約為六十三弱　實六二八

六等邊冪　二五五　五十一

三等邊冪　一七〇　三十四

右皆方內容員。員內又容六角之比例。其六等邊與員全徑。

乃對角之徑也。於六等邊之邊。則為倍數三等邊。則只用邊。

若六等邊形。亦即用邊。與平方平員之全徑相比則如後法。

平方　四〇〇　平方　一〇〇〇

平員　三一四　平員　七八五四

六角　一〇二〇　六角　二五五〇

三角　一七。

三角　四二五。

論曰。以平方平員之徑。六角三角之邊。並設二〇。則為平方四〇。〇之比例。若設一〇。〇則如下方平方一〇。〇。〇。〇之比例也

量體約法

四等面體求積

法曰。以原邊之冪三除之。得數。以乘邊冪。得數。副寘之。又置邊冪。二十四除之。得數。以乘副。平方開之。即四等面積也。

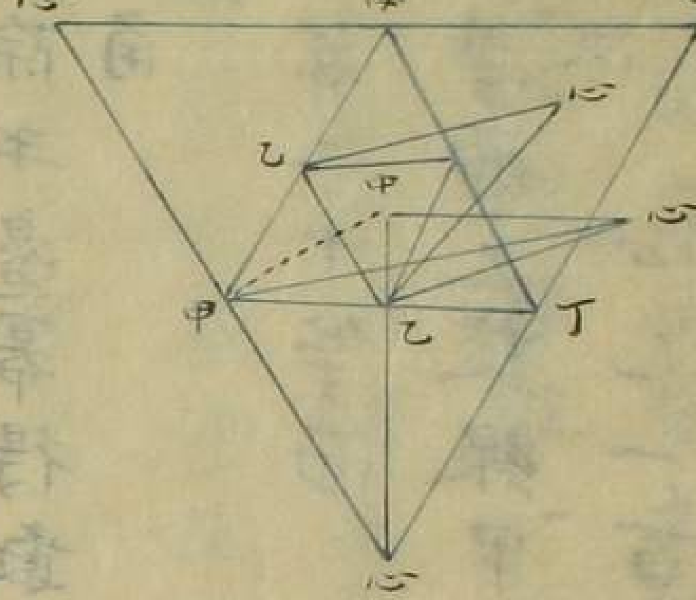
又法。置半邊冪。三除之得數。以乘半邊冪得數。副寘之。又以六為法。除半邊冪。得數為實。平方開之。即四等面積四分之一也

即三角扁錐

算二十等面

二十等面之接線甲丁。設一百七十八原設一百一十。因欲使外切立方。與十二等面同。故改此數心乙一百四十四即原切十等邊之半徑。又為外切立方之半徑。外切立方徑二百八十八

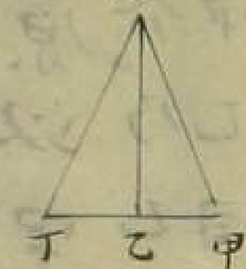
求中心為分體之高　法先求乙中。乃各稜折半處。至三角面中央一點之距　依幾何補編。半甲丁。得八十九為甲乙。自乘七千九百二十一。取三之一。得二千六百四十又三之一。為乙中句冪。又以心乙一四四自乘二〇七三六為弦冪。相減。餘一萬八千〇九十五又三之二為股冪開方得心中一百三十四半強。為分體銳尖之高。倍之。得二百七十九半弱。為內容立員徑

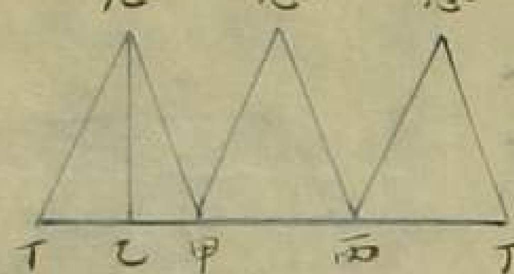


求甲心為分體斜稜　法以甲乙為句。其冪七九二一。以乙心為股。其冪二〇七三六。倂之二八六五七為弦冪。開方。得甲心一百六十九二。為分體自角至銳之斜稜。

倍之。三百三十八半弱。為外切渾員之徑

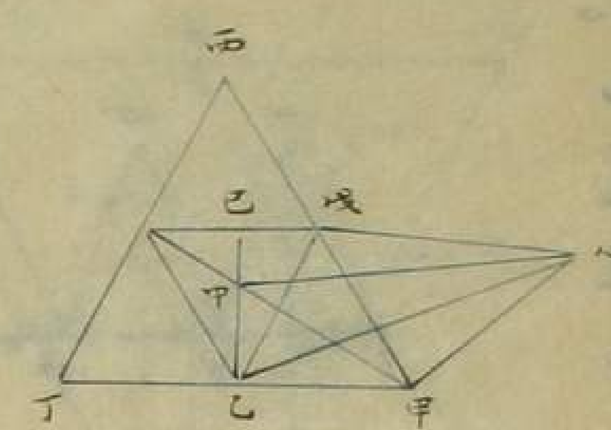
或取理分中末線之大分如心乙為股。小分如甲乙或丁乙為句　取其弦。甲心或丁心為二十等面自角至心之楞線。合之。成甲心丁形。即二十等面分形之斜立面也。甲丁則原形之楞也





如甲心丁之面三。皆以心角為宗。以甲心等弦合之三面皆有此弦則甲丁等底。三底並同甲丁以尖相遇。而成三等邊之面。即二十等面之一面也。以此為底。則成三角尖錐矣　尖錐之立三角面皆等。皆稍小於底

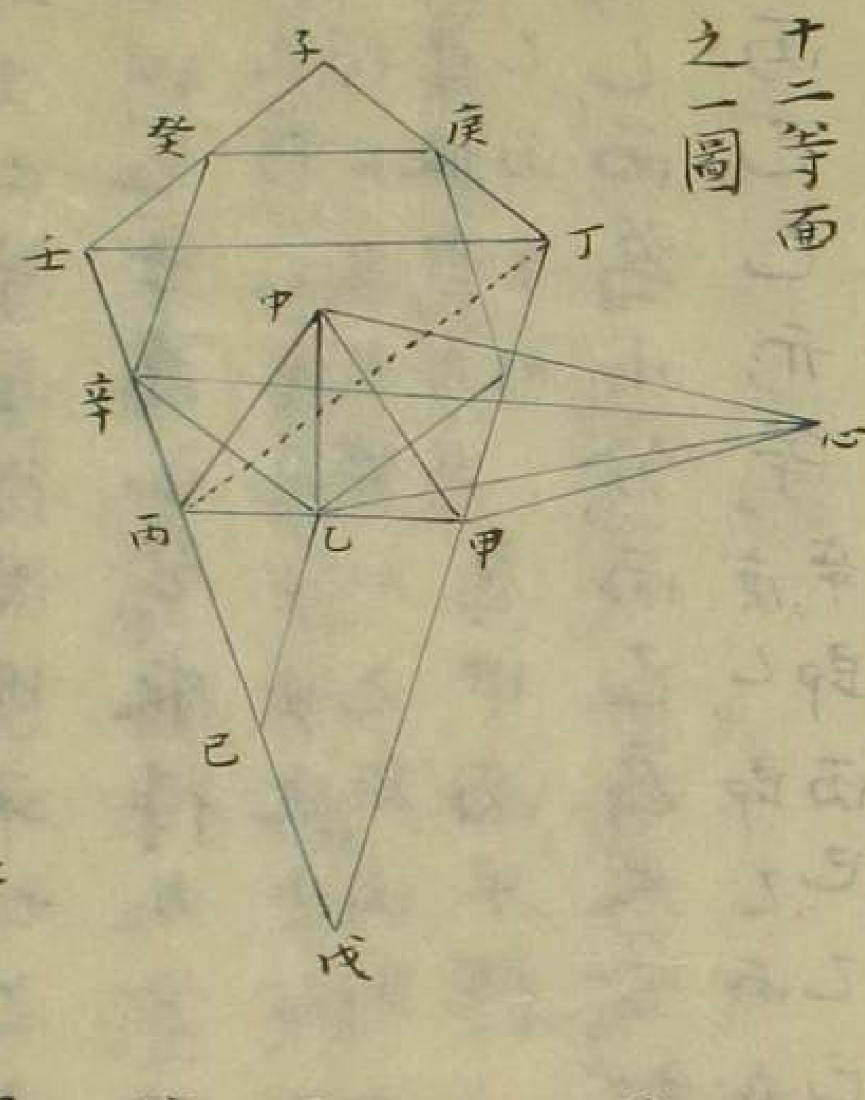
解曰。乙戊與甲乙等。而甲心與戊心即乙心不等。如弦與股乙戊即十



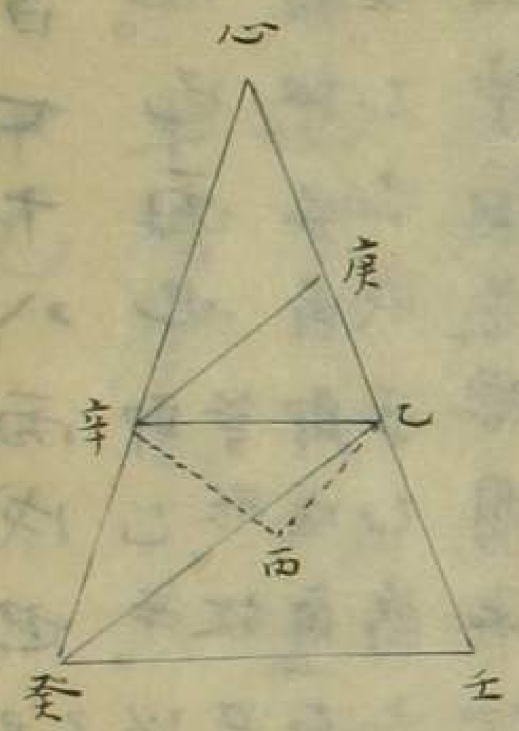
等邊之一邊。乃二十等面橫切之面之邊。今欲求心中正立線。中
即二十等面一面之中。自此至心。成心中線
則其正高也　法先求甲中為句。取其冪以
減甲心弦冪。即心中股冪。開方得心中
簡法。取乙甲即原積之半又即小分自冪三之一。以減
乙心即大分。又即原積均半處至形心。即斜立面中線之冪。即心中冪
又解曰。原以甲乙半積又即二十等面中剖所成之積。即十等邊之一邊。故為小分為句。在形內為小分。乃乙戊也。今形外之甲乙與甲乙同大。故亦為小分。乙心即二十等面中切成十等邊。自角至心之弦。故為大分。又即為二十尖錐。各立面三角形之中長線為股。則甲心為弦。自各角至體心之線而甲心弦
冪內。有乙心股。甲乙句兩冪。今求心中之高。則又以甲中為句。
自各角至各面心也。而仍以甲心為弦。弦冪內減甲中句冪。則

其餘心中股冪也　依幾何補編甲乙冪三分加一。為甲中冪。
故但於乙心冪內。減去甲乙冪三分之一。即成心中股冪
又解曰。若以乙心為弦。則中乙為句。而心中為股。依補編。中乙
冪為甲乙冪三分之一。故直取去甲乙冪三之一為句冪。以減
心乙弦冪。即得心中股冪。開方得心中。此法尤捷
作法　以二十等面之積如甲丁折半如甲乙。或丁乙。亦即甲戊為理分中末
之小分。求其大分如乙心。即二十等面各積線當中一點至心之線。亦即外切立方之半徑　再以
大分為股乙心小分為句甲乙亦即甲戊。亦即戊乙取其弦甲心。即二十等面自各角至心
之線。謂之角半徑。亦即切員半徑。　再以原積甲丁為底。切員半徑為兩弦。甲心
及丁心成兩等邊之三角形。即二十等面體。自各角依各積線切
至體心。而成立錐體之一面。三面盡如是。則成三角立錐矣

如是作立錐形二十。聚之成二十等面體
立錐體之中高線。心中 以衆三體面之冪。而三除之。得各錐積
二十衆錐積得立積 其中高線。心中 即内容立員之半徑
立方内容二十等面體。其根之比例。若全分與大分
立方内容十二等面體。其根之比例。若全分與小分
二十等面體之分體。並三楞錐。以元體之面為底
原體之楞 甲丁 折半 甲乙 為小分。為句。取其大分 心乙 為股。句
股求弦。得自角至心。為外切員之半徑 心甲
假如 甲丁 原楞一百一十。半之。得甲乙半楞五十五自乘。三千〇二
十五為句冪。其大分乙心 即外切立方半徑。 八十九自乘。七千九百二十一 為股
冪并二冪 一萬〇九百四十六 平方開之。得弦 一〇四又六二不盡。約為一〇四半强 為角
至體心之線。心甲 即外切立員之半徑
算二十等面之楞於渾天度得幾何分



十二等面之一圖



分圖

法以心甲為渾天半徑。甲乙為正弦。法為心甲與甲乙。若半徑與甲心乙角之正弦。查正弦表。得度倍之。為丁甲通弦所當之度。
算十二等面
五等邊面。為十二等面之一。面有五邊。在體之面。則為五楞錐。其一楞設一百一十。甲丙 半之五十五。乙丙 以甲丙為小分。求其大分

得一百七十八。丙戊也即丙丁。壬丁。壬戊丁角。為丙中甲角之半。與平圓十等邊之一面等半之八十九。巳丙也即乙辛。以丙巳乙為兩腰等形。辛巳乙亦兩腰等形。故辛乙與巳丙等。丙巳乙形。與元形丙戊甲形相似。巳角即戊角。而乙丙為小分。乙巳或辛乙為大分為內作小五等邊之一邊乙辛亦即十二等面從腰圓平切之十等邊面也

又以乙辛為小分。求得大分一百四十四。心乙也分圖辛心乙形。即前圖辛心乙形。乙辛為心壬之小分。心乙為大分。乙心線即五等面一邊折半處至體心之距。丙點即五等面兩楞相凑之角。乙丙辛虛線形。即前為乙丙辛形為甲丙半楞乙丙之全分。何則。前圖之丙巳乙形。乙丙為小分。丙巳為大分。試於辛乙心形內。分圖作庚辛乙形。與丙巳乙形等。庚乙。即乙丙。五等面一邊之半。乙辛。辛。即丙巳。乙巳。為小五邊形之一邊庚則乙庚為小分。乙辛為大分。心庚同今又以乙辛為小分。求其大分壬癸。而壬癸即心乙也。乙癸同夫心乙。乃庚乙小分辛乙大分。心庚即之并則

乙心為庚乙之全分矣。其比例心乙與心庚。若心庚與庚乙。而乙心即外切立圓半徑也

右法揚作杖補

今求心中線。為五等邊最中一點。中至體心心之距。亦即內容

渾員半徑

先求乙中線。為五等邊各楞折半處至最中之距　法為甲乙比乙中。若半徑與五十四度之切線

一　半徑　一〇〇〇〇〇

二　乙甲中角五十四度切線　一三七六三八

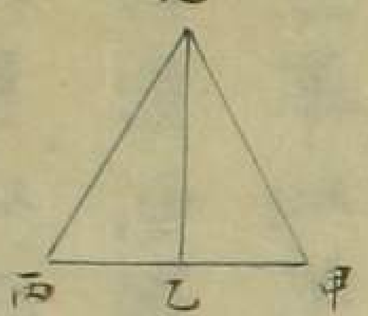
三　半楞甲乙　五十五

四　中乙　七十五　七〇

用句股法。以心乙一百四十四為弦。中乙七十五七為句。句弦各自乘相
減。得心中股冪。平方開之。得中高線。心中為容員半徑
求得容員半徑一百二十二半弱。心中
又求甲心線。為各角至體心之距即外切渾員半徑
乙五五為句。心乙一四四為股。并句股冪。求甲心弦用句股法。以甲
求得外切圓半徑一百五十四強。甲心
十二等面根一一。甲丙
外切立員半徑一四四。心乙全徑二八八。
內容渾員半徑一二二半。心中全徑二四五弱
外切渾員半徑一五四。甲心全徑三〇八強
十二等面之分體。並五楞錐。並以五等邊面為底

原體之楞甲丙。設一百一十。半之。乙甲五十五為小分。
求其全分乙心一百四十四。即外切立方半徑。乙甲五十五自乘三千〇二十五。
為句冪。心乙一百四十四自乘二萬〇七百三十六為股冪。并之。得二萬三千七百六十
一平方開之。得弦一百五十四強。為自角至心之線。甲心即外切員半
徑

五楞錐之一面



作法。以五等面之一邊為底楞。甲丙以
外切員半徑之線。角至心為兩弦之楞甲心丙心及
而會於心。五邊悉同。則為十二分體之一。
如是十二枚。則成十二等面體

變體數

求渾圓積

設渾圓徑一〇〇。自乘得一〇〇〇〇。又十一古法乘之。得一一〇〇〇〇。為實。十四除之。得〇七八五七一四為平圓面冪。或用舊徑七圍廿二之比例。亦得圓面七八五七一四。以四因之。得渾圓之冪三一四二八五六

置渾圓之冪。以半徑五〇。因之。得一五七一四二八〇〇〇

是為以渾圓面冪為底。半徑為高之圓柱形積。

置圓柱形積。以三為法除之。得五二三八〇九三三三是為以渾圓面冪為底半徑為高之圓角形積。亦即渾圓之積

渾圓根一〇〇體積五二三八〇九三三三用為公積

立方

置公積。即渾圓積五二三八九三三三。立方根八。六二〇二七一七。是為與渾圓等積之立方

方錐

置公積五二三八九三三三。以三因之得數。立方開之得高濶相等之方錐形根。一一六二二四四四四七。是為與渾圓等積之方錐

方錐

圓柱

置公積同上。十四因之。十一除之為實。立方開之。得高濶相等八七四二三九四二。是為與渾圓等積之圓柱

圓柱

圓錐

置公積同前以三因之變圓錐形積為圓柱積再以十四因之。十一除之為實。變圓柱積為立方積。立方開之。得高濶相等之圓錐形根。一二五九四七五九。是為與渾圓等積之圓錐或置積以四十二因之。十一除之。立方開之亦同。

圓錐

按變體線本法。有四等面。八等面。十二等面。二十等面。諸數表皆未及其同者。惟有渾圓立方二形。其餘三形。皆比例規解。及

測量全義之所未備。今以法求之。則皆長濶相等。而不為渾圓立方者耳。夫不為渾圓立方。而仍可以法求者。以其長濶相等。則仍為有法之形也。然而與今西書所載合者二。不合者一。意者其傳之有誤耶。或其所用非徑七圍廿二之率耶。俟攷。

渾圓以徑求積

置徑自乘。又以半徑乘之。又四因之。又以十一乘之。以十四除之。又以三除之。見積

解曰。平圓與平方之比例。如其周與周。假如徑七則方周廿八圓周廿二。而率各折半為十四與十一　徑自乘則為平方形。以十一乘十四除。則平方變為平圓矣。以平圓為底。半徑乘之。成圓柱形。再以三歸之。成圓角形。即圓錐渾圓面冪為底。半徑為高之角形四倍大於此圓角形。故又四因之。即成渾積也

捷法　徑自乘以乘半徑。乃以四十四因。四十二除見積　或徑上立方形廿二因四十二除或用半數十一因廿二除見積。並同

渾圓以積求徑

置積以三因之。四除之。又以十四因之。十一除之再加一倍。立方開之得圓徑

解曰圓積是圓角形四。今三因之。變為圓柱形四矣故用四除則成一圓柱。此圓柱形。是半徑為高。全徑之平圓為底今以十四乘。十一除則變為全徑之平方為底。半徑為高矣故加一倍。即成全徑之立方

捷法 積倍之以四十二因。四十四除。立方開之得圓徑 或用本積。以八十四乘。四十四除。立方開之 或用半數以四十二乘二十二除。立方開之 或又折半。以廿一乘十一除。立方開之得積並同

按徑七圍廿二者。乃祖冲之古法。至今西人用之。可見其立法之善。雖異域有同情也。雖其於真圓之數。似尚有盈朒。然所差在微忽之間而已。吾友錫山楊崑生。拓城孔林宗另有法。其所得之圓。俱小於徑七圍廿二之率。則其所得圓積亦必小於古率矣。

楊法 立圓徑一〇〇〇〇積五二三八〇九二五六四

孔法 立圓徑一〇〇〇積五二三五九八七七五

約法

立方與立圓之比例。若廿一與十一 平圓與外方若十一與十四 平圓與內方。若十一與七

圓內容方之餘 即四小弧矢形 若七與四 圓外餘方 即四角減弧矢。若十一與三 准此則餘圓 即小弧矢 與餘方若四與三。而小弧矢。與其所減之餘方角。若一與七五。亦若四與三也

兼濟堂纂刻梅勿菴先生曆算全書

解八線割圓之根

宣城梅文鼎定九著　男以燕正謀叅　孫瑴成玉汝　玗成肩琳

栢鄉魏荔彤念庭輯　男乾敩一元　士敏仲文　士説崇寬同校

錫山後學楊作枚學山訂補

八線割圓說

天體至圓。最中一點為心。過心直線為徑。徑圍面諸圈為弧。弧與徑古用徑一圍三之比例。有密術徽術各家不同然終非弧度之真。蓋圓

為曲線。徑為直線。而旾為異類。且古無相通之率。夫日月星辰
之道。皆弧線也。人目測視之線。皆直線也。苟非由直線以得曲
線。縱推算極精。皆非確數。於推步測量諸用。所関甚鉅。其可畧
欤。而儒幾何等書。別立數法。求得弧與徑相準之率。更以逐度
之弧。准逐度之線。內用弦矢。外用割切。于是始則因弧而求線。
繼則因線而知弧。交互推求。雖分秒之弧度。盡得其准。立法之
善。即隷首商高復生。無以易也。第割圜八線表。雖久傳于世。而
立法之根。未得專書剖晰。大測中如十邊五邊形之理。皆缺焉
弗講。薛青州作正弦解。亦僅依式推衍。未能有所發明。予於曆
算生平癖嗜。凡有奧義。必欲直窮其所以然而後快。竊思割圓
八線。乃曆算之本源。豈可習焉不察。因反覆抽繹。耿耿於心者
數年。積思之久。乃得漸次會通。遂著其圖。衍其算理之隱賾者
一明之。法之缺略者補之。會而成帙。以備好學者之採擇云爾。

立表之根有七

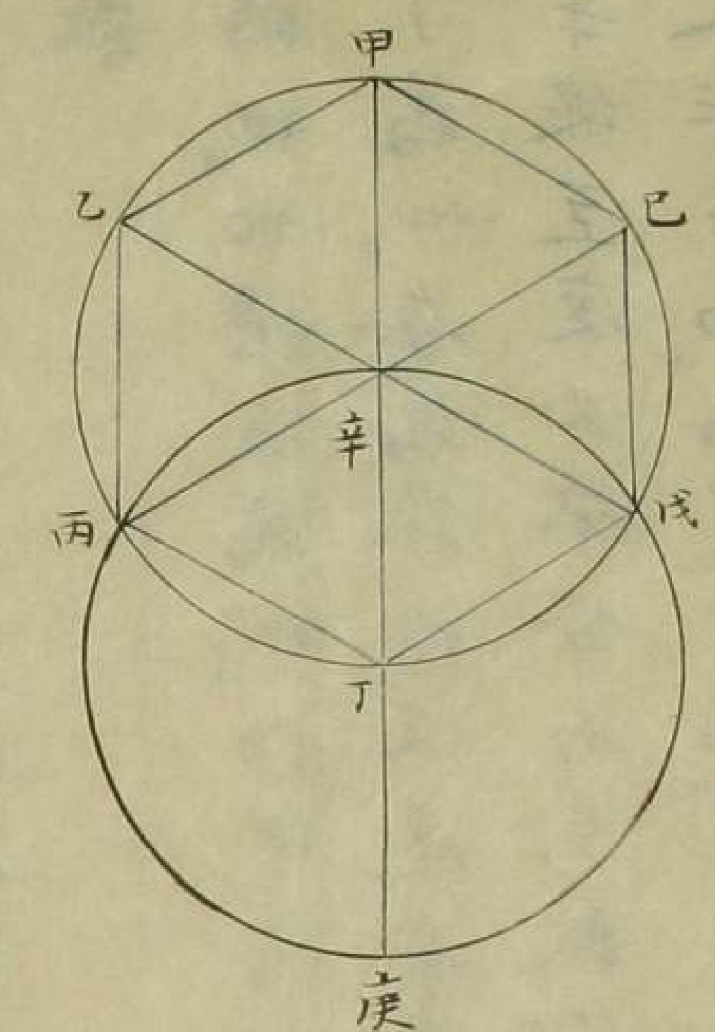
一大圓中。止有徑線。初無邊角可尋。乃作者憑空結撰。求得七
弧之通弦。而全割圓表。即從此推出。又絕無假借紐合之病。割
圓之巧。孰有加於是焉

表根一　圓內作六等邊切形。求得六十度之通弦

法曰。六十度之通弦。與圜之半徑等。作表時命為十萬。亦曰全
數

解曰。如圖。辛為心。作甲丙丁圜。甲丁為全徑。辛丁為半徑。次取
丁為心。辛為界。作戊庚辛圜。與原圜相交於丙于戊。次引長丁
辛線至庚。必平分丙戊弧於丁。亦平分戊丙弧于辛（以丁為戊庚圜心故）
次作辛丙。丙丁。丁戊。戊辛。四線。成丁辛丙。丁辛戊二形。必皆三

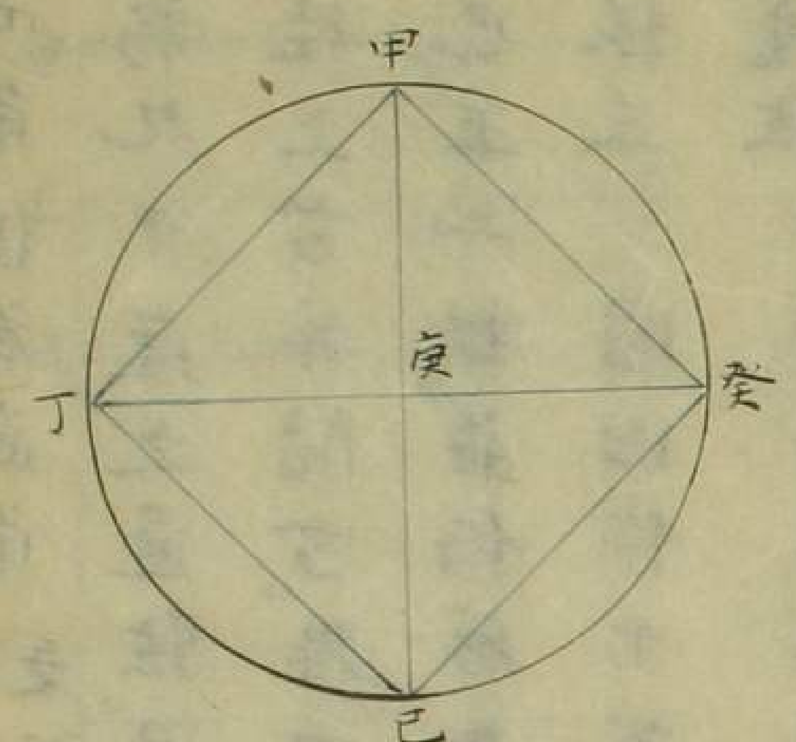
邊等三角形。何則。丁為心。辛為界。則丁辛與丁丙。皆為戊庚圜之半徑。仍用辛丁為度。辛為心。丁為界。則辛丁又為甲己圜之半徑。辛丙亦同。則辛丁。丁丙。辛丙。三線俱等。而辛丁丙為三邊等形。丁辛丙三



角。俱自相等。每角六十度。夫辛角在心者也。則丙丁弧為六十度。丙丁。即六十度之通弦。與辛丁半徑等矣。丁戊辛形倣此。次以丙辛引至己。戊辛引至乙。其甲辛己。乙辛甲交角。俱與丙丁。戊辛丁角等。角等弧亦等。即平分大圜為六分。次作丙丁六線相連。成六等邊內切形。等邊等角。蓋乙辛己。丙辛戊。丙辛己。丙交角之弧。既當六分圜之四。則中間己戊乙丙二弧。亦必各為六分圜之一。故成六等邊形。皆以半徑為邊。此天地自然之數也。

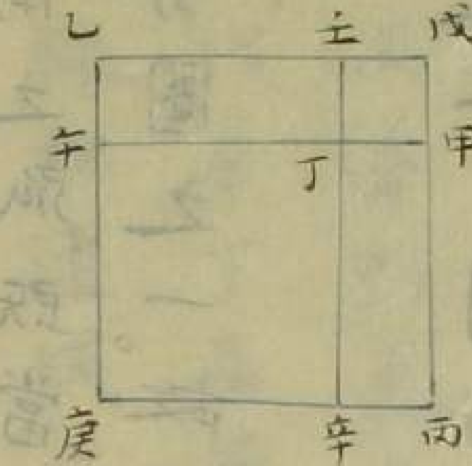
表根二　圜內作四等邊切形。求得九十度之通弦

法曰。半徑上方形。倍之。開方。得九十度之通弦

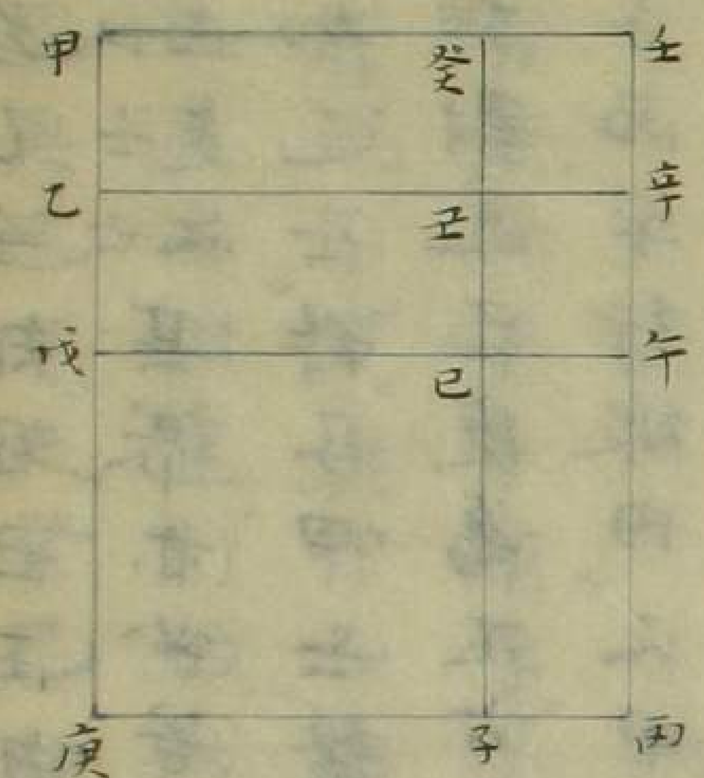


解曰。圜內四等邊切形。即內切直角方形也　如圖。甲癸丁圜。庚為心。作丁癸全徑。又作甲己全徑。與丁癸十字相交。為湊心四直角。即平分大圜為四分。每分九十度。次作甲癸。己癸。己丁。甲丁。四線相連。成四邊等形　其切圜之甲丁己

癸四角。俱為直角。以各角俱（象半圜故）所容之癸甲丁巳。為正方形。甲癸
等為九十度之通弦。用甲庚癸直角形。甲庚半径上方。與庚癸
半径上方并開方。得甲癸弦。句股求弦術也
已上二根。並仍曆書之舊
表根三　圜内作十等邊切形。用理分中末線。求得三十六度
之通弦
法曰。圜径上作理分中末線。其大分為十邊等形之一邊。即三
十六度之通弦。今欲明十邊形之理。先解理
分中末線。欲明理分中末線。先解方形及矩
形



一解曰。凡正方形内（如乙庚戊丙方）依一角復作正
方形（如丁庚方）以小方之各邊引長之。如甲午辛壬。即分元方戊庚
為四分。小方之各邊。與大方之各邊俱兩兩平行。其與小方丁
庚相對之丁戊形。亦必正方形。左右所截之午壬甲辛二形。必
皆矩形而恒自相等
一解曰。任設一線。如甲戊。兩平分之于乙。又任引長之為戊庚。
（長短不論）其全線甲庚。偕引長線戊庚（即子庚）矩内形（甲子矩）及半元線

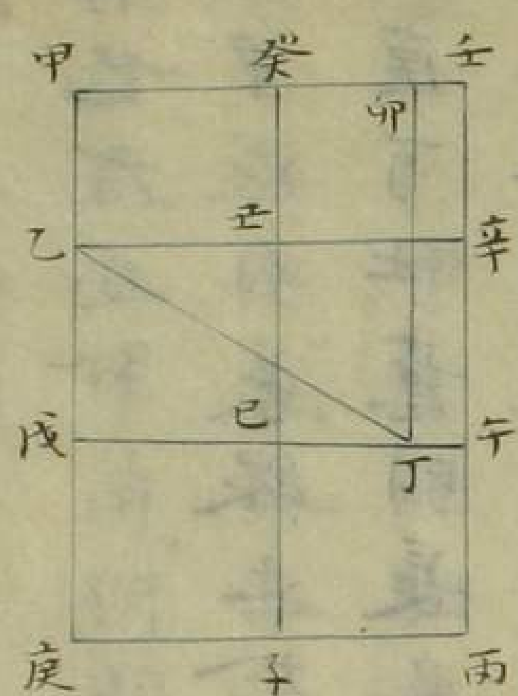


甲乙（癸壬等）上方形（癸辛方）并。成子壬壬甲
罄折形。此形與半元線（戊乙）偕引長線。乙
庚上之乙丙方形等。何則。乙庚上方乙
丙。與罄折形子壬壬甲。共用乙子矩形。
今試以此兩率。各試去乙子矩形。兩所

餘為乙壬矩及丑丙矩。夫此兩矩形。邊各相等辛丙與乙辛等辛丑與壬辛亦等。以壬丑為正方故其冪亦必等。則于乙子形加丑丙。得乙丙方。于乙子形加乙壬。得子甲壬罄折形。亦無不等矣　又巳辛亦正方形。以相對之巳庚為正方故。巳辛方與壬丑方亦等。以同在甲庚癸子兩平行線內。又甲乙乙戊相等故也分中末線

解理分中末線　明上二圖可論理分中末線矣。法曰。如圖。任作甲戊線而平分於乙。以甲戊線自之。作戊卯方。從乙平分處向丁作乙丁線。次以甲戊引至庚。令乙庚與乙丁等。于乙庚上作乙丙方。又取庚子與戊庚等。作癸子線。分戊丁于巳。則戊巳為戊丁元線之大分。巳丁為小分戊巳。丁巳。戊丁三線成連比例。戊丁與戊巳。若戊巳與巳丁。而戊巳為中。

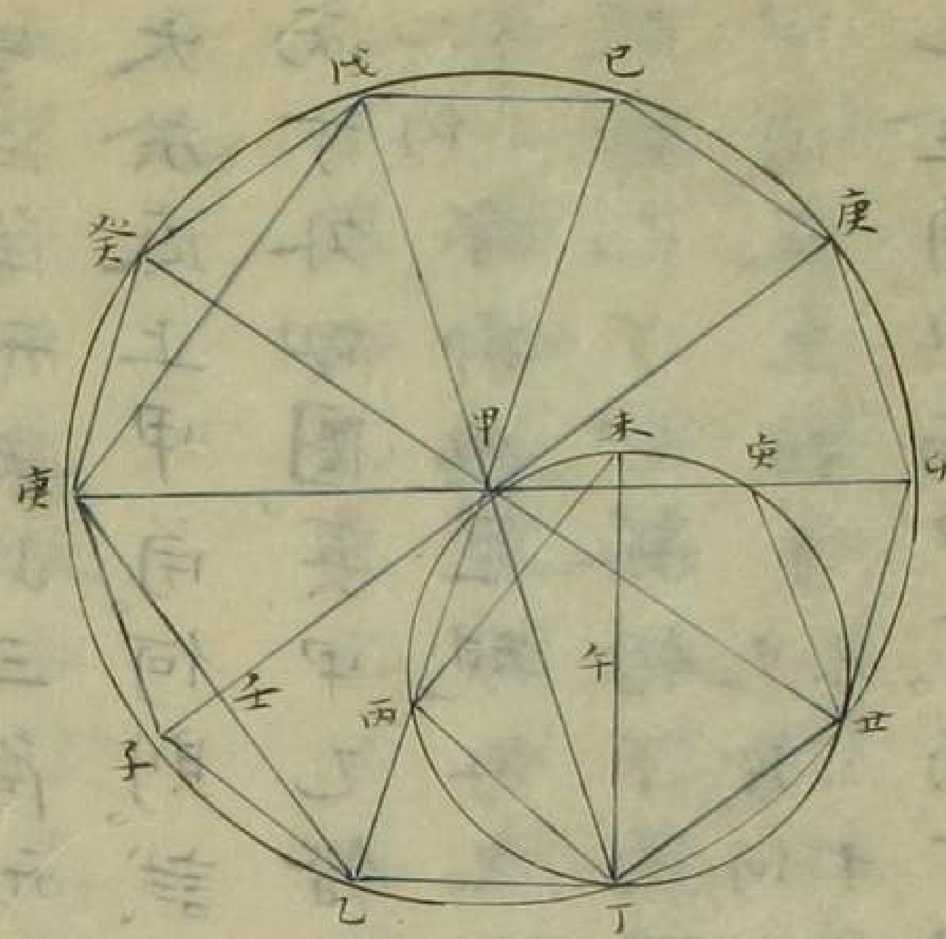
解曰。依上二圖之論。甲庚線偕戊庚矩形。及乙戊乙即甲上方形并。與乙庚上方等。今乙庚線既令與乙丁等則乙丁上方。亦與



乙庚上方等。是甲庚偕戊庚矩形。及乙戊上方并。與乙丁上方等。而乙丁上方。與乙戊丁戊上兩方之并等。此二率者。共用乙戊上方試以此二率各減去乙戊上方。則所存之戊卯方。與甲子矩形必等矣。夫戊卯方既與甲子矩等。又共用甲巳矩形試各減去甲巳矩形。則所存戊子方。與卯巳矩形必等矣。卯巳與戊子。兩矩形既等。又以巳直角相連。則兩形之邊。為互相似之比例。癸巳與巳子。若戊巳與巳丁。夫癸巳即戊丁也。則戊丁與戊巳若戊巳與巳丁

為連比例。而戊巳為中率。戊巳上方二三率與戊丁一率偕巳丁
四率矩形等。戊丁全線為首率。戊巳大分為中率。減戊丁。同甲戊
存巳丁小分為末率。蓋理分中末線云者。於一直線上作連比
例之謂也。求之法以所設甲戊。半于乙為句。甲戊為股即戊丁求
乙丁弦。即乙庚也。減乙戊句。存戊庚。即戊巳大分。減戊丁元線。
存巳丁小分
又甲戊引長線止於庚者。欲令乙庚等乙丁也。若不為連比例
戊庚可任意引長之如前二圖之論。然理分中末線法。實從二
圖之理推出。其關鍵。全在乙庚乙丁二線等也
解理分中末線大分。為三十六度之通弦觀上諸論。可明理
分中末線之法然何以知其大分。能為十等邊形之一邊。如圖

任作甲乙線。用上法分之于丙。為理分中末線甲乙與甲丙。若
甲丙與丙乙。甲丙其大分。丙乙其小分。次用甲乙全線為半徑。
甲為心。乙為界。作圜。又從乙作乙丁合圜線。令與甲丙等。末從
圜心。作甲丁線相連。其甲乙甲丁兩半徑等。即甲丙丁為兩腰
等三角形。夫此三角形。其腰閒之甲乙丁。甲丁乙二角。必各倍
大於底上甲角。何則。試從丙作丙丁線。于甲丙丁角形外。作甲
丙丁外切圜。其甲乙偕乙丙矩內直角形。與甲丙上方形等因連
比例等亦即與至規外之乙丁上方等。而乙丁切小圜于丁為切
線。即乙丁切線偕丁丙線所作乙丁丙角與負丁甲丙圜分之
甲角。交互相等見幾何三卷三十二此二率者。每加一丙丁甲角。即甲丁
乙全角。與丙甲丁。丙丁甲。兩角并等。夫乙丙丁外角。與丁甲相



對之內両角并等。即乙丙丁角。與甲丁乙全角等。而與相等之甲乙丁亦等。丙丁與乙丁両線亦等。夫乙丁原與甲丙等。即丙丁與丙甲亦等。因丙甲丁。丙丁甲両角亦等。又甲角既與乙丁丙角等。即乙丁丙。甲丁丙両角亦相等。是甲丁乙。倍大於丙丁甲。亦即倍大於相等之丙甲丁角也。而甲乙邊與甲丁等。則甲乙丁角。亦倍大於甲角也

次解曰。丙丁乙角。何以知其與丙甲丁角。交互相等。試作未丁全徑。與乙丁為直角。又作未丙線。成未丙丁直角。夫丙未丁。丙丁未。二角并。與一直角等。乙丁未亦直角。此二率者。各減去未丁丙角。所存丙丁乙。丙未丁二角必等。夫丙未丁。負圜角也。丙甲丁。亦負圜角也。同負丙丁弧。則丙甲丁角。與丙未丁角等。夫未角。與丙丁乙角等也。今既與丙甲丁等。則丙甲丁角。亦必與丙丁乙角等

依上論顯甲乙丁形之乙丁二角。俱倍大於底上甲角。形內之丙丁乙形。與甲乙丁原形相似。其丙乙二角。亦倍大於乙丁丙角。乙丁。丙丁。甲丙。三線俱等。夫甲丁乙形之甲乙丁三角并。等両直角。今乙丁二角。既倍大于甲角。是合乙甲丁角。而為五分両直角矣。則乙甲丁角。該五分両直角之一。為三十六度。夫五分両直角之一。與十分四直角全周之一等。則乙甲丁角。或乙

丁弧。即十分圜之一分。乙甲丁甲又各為半徑。則乙丁即十等邊形之一邊。夫乙丁與丙丁等。丙丁與甲丙等。則甲丙與乙丁亦等。而甲丙即理分中末線之大分。故圜徑上作理分中末線其大分為三十六度之通弦

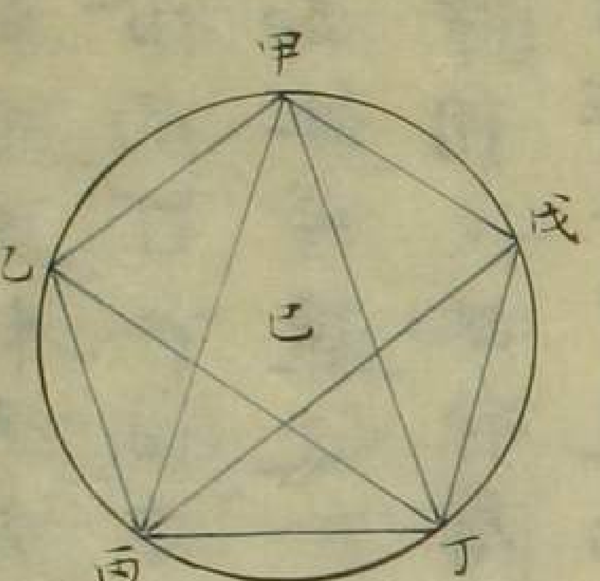
圜內作十等邊切形法　先依上作甲丁乙丙腰等三角形。以甲乙甲丁各引至圜界。為乙巳丁戊。其巳戊弧。與乙丁等。次以戊乙弧半于庚作乙庚戊庚二線。各半之於辛於壬。又作癸壬子寅卯庚諸線。俱過甲心各抵圜界。即平分大圓為十分。末作戊巳等十線相連。即所求

十邊形之理。據曆書見幾何十三卷九題。而幾何六卷已後之書。未經翻譯。不可得見。考之他書。未有發明其義者。余特作此解之

表根四　圜內作五等邊內切形。求得七十二度之通弦

法曰。六邊形上方形。及十邊形上方形并。開方。得七十二度通弦

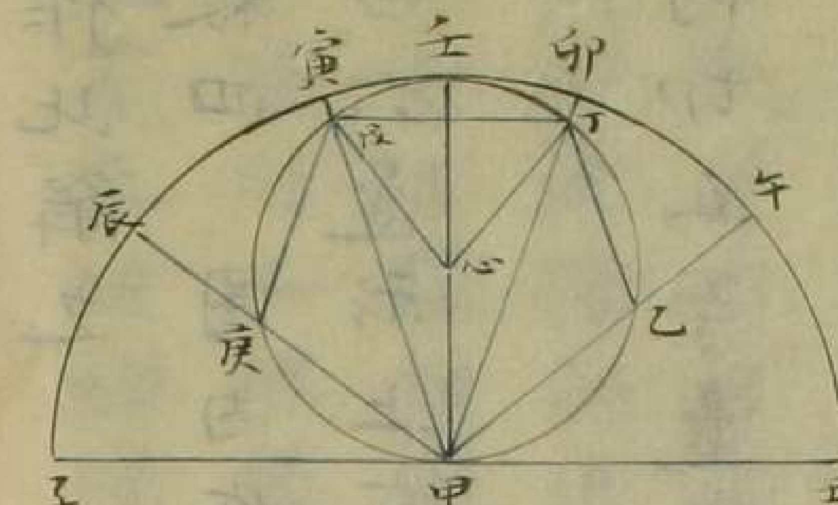
解內切五等邊形法



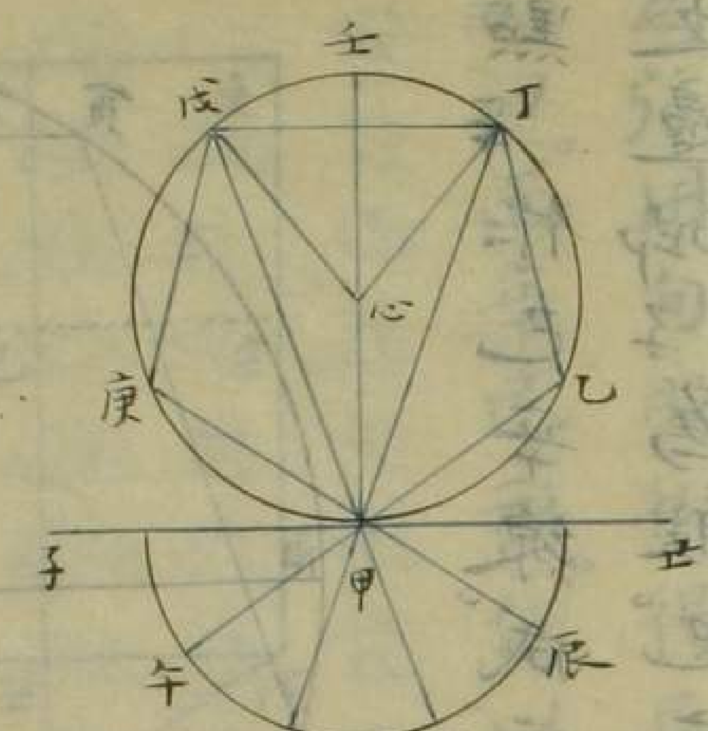
法曰。甲乙丁圜。於圜內作甲丙丁兩腰等負圜角形。令腰閒丙丁二角。各倍大於甲角。即甲角所負之丙丁弧。為全圜五分之一。何則甲丙丁形之三角并。等兩直角。今丙丁二角。既各倍大于甲角。則甲角為五分兩直角之一。又甲為負圜角。所負之丙丁弧。必更倍大於甲角之度。為全圜五

之一矣七十二度夫丙于二角。又倍大于甲角。則其所棄甲丙甲丁二弧。亦必倍大於丙丁。為全圈五分之二。即作丙戊丁乙二線。平分丙丁二角。亦平分甲丁甲丙二弧。分大圈為五平分。丙丁線即五等邊之一。末作丁戊等四線相連。成五等邊內切形。等邊等角　此係曆書原法

新增作五等邊形法

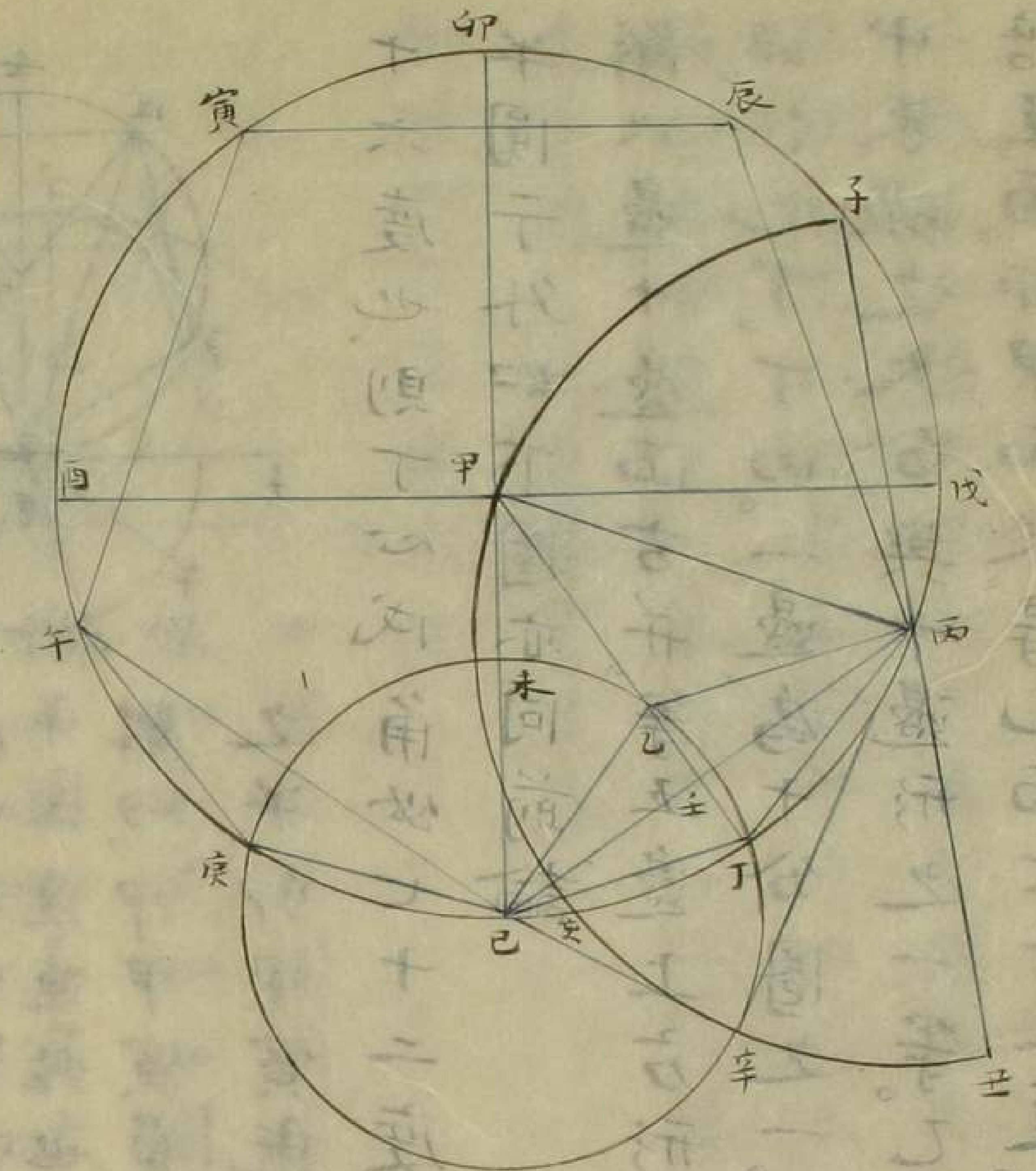


甲庚壬平圓內。作五邊等形。法任作切圓直線如子丑。切平圓於甲。乃以切點甲為心。任作半圈如子寅丑。次勻分半圓周為五平分。如子辰等。次從半圓上。取五平分之各點。作直線至切點甲。此直線必過半圓周。如甲辰線必過庚。寅甲線必過戊。餘做此末於平圓內。聯各點作通弦。即成五等邊形。戊庚庚丁戊乙丁三線。並與庚甲乙甲等。皆七十二度通弦也甲乙甲本為通弦。補作

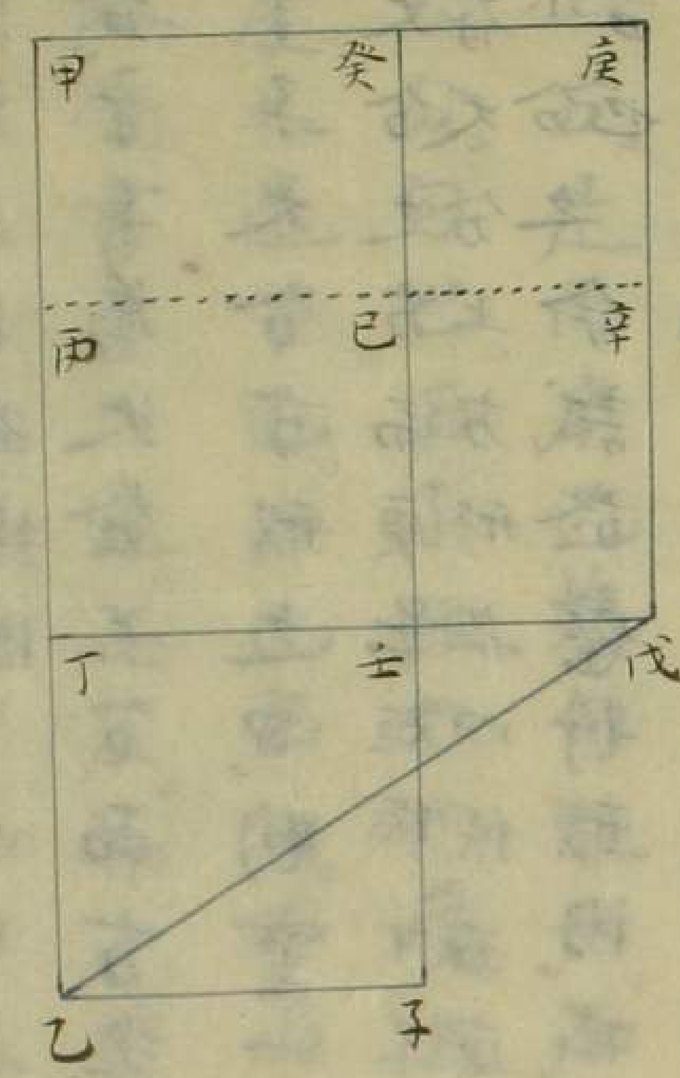


解曰。卯甲寅負圈角。正得丁心戊分圓角之半。卯甲寅既為十等面湊心之角。必三十六度也。則丁心戊角必七十二度。而為五等邊角矣或作半圓于外。如下圖亦同前論

解六邊十邊兩方并。等五邊上方形　法曰。依前理分中末線法。作己丁。丁丙。二邊。為十分圈之一。乙己。乙丙。甲乙。三線。俱為中末線之大分。與十邊形之一等。乙丁其小分。次取己丁弧之倍至丙。作甲丙線。得己丙七十二度。為五分圈之一。己丁丙為十分圈之



二。即五分圜之一矣。作丙已線。即五等形之一邊也。已甲丙為七十二度之角。次取已為心。已丁大分為界。作丁未庚圜。又以丙為心。丙甲半徑為界。作子甲壬圜。兩圜相交於辛。未從丙心向交點辛作丙辛線。從已心。向交點辛作已辛線。成丙已辛三角形。此形辛為直角。丙辛六邊形之邊即子丙為股。已辛十邊形之邊即已丁為句。已丙五邊形之邊為弦。用句股術。得已丙七十二度之通弦



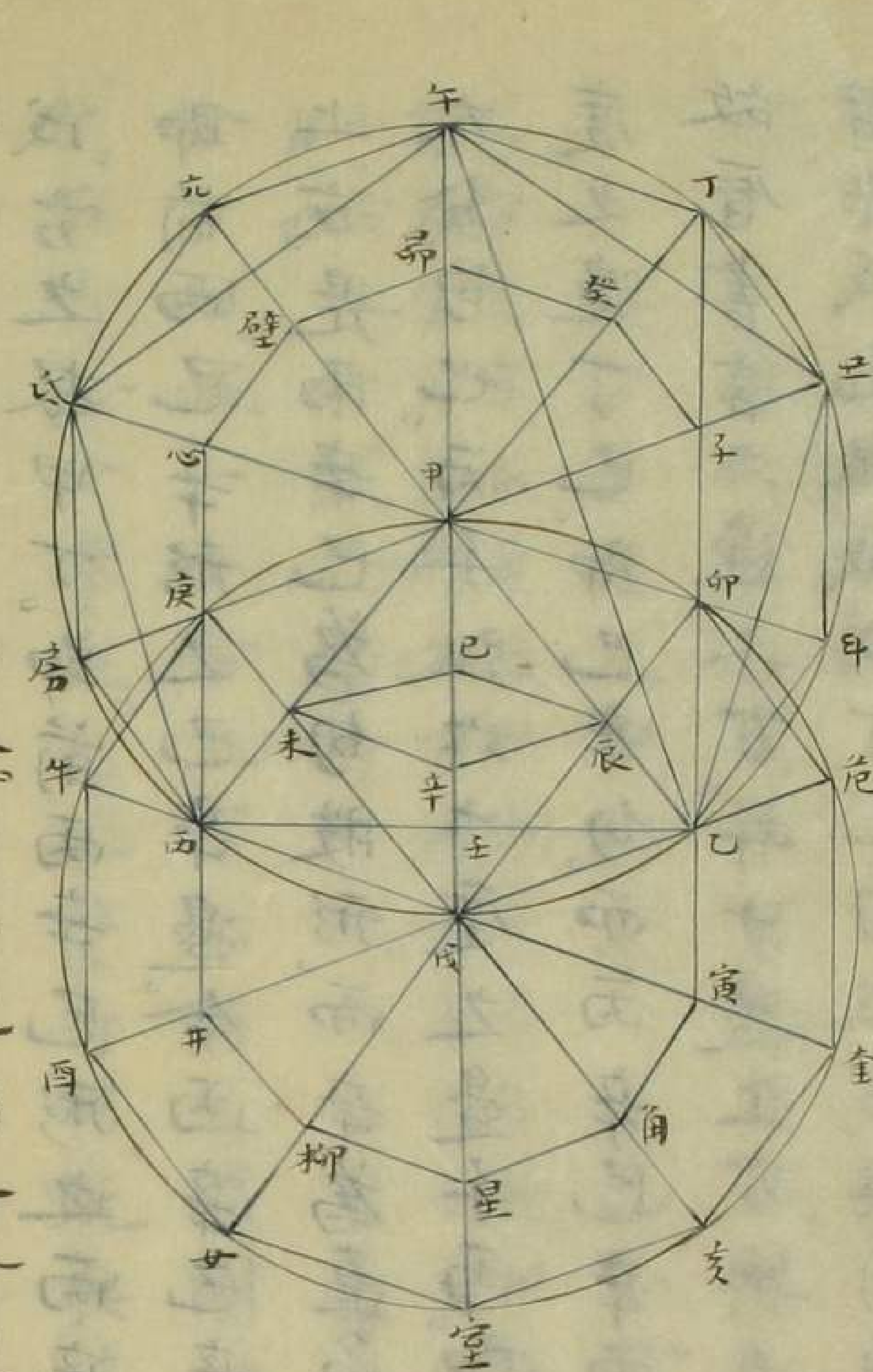
解曰。丙辛已形。何以知辛點必為直角。試觀乙已丁。乙丙丁。俱為兩腰等形。又自相等。合之。成已乙丙丁四等邊斜方形。則丙已線。必平分乙丁小分于壬。甲丁線。因已丙弧為已丁之倍。亦平分丙已弦于壬。壬點為直角。又形內所分之乙壬已。乙壬丙。丁壬已。丁壬丙。四句股形。俱自相等。夫丙已邊上方形。為壬已上方形之四倍。幾何言全線上方形為半元線上方形之四倍而壬已上方。乃乙已上方。減去乙壬上方之數。句弦求股是以乙已上方四倍之即已乙。已丁。丙丁。丙

乙。四線上方之并減去乙丁小分上方乙丁上方。為乙壬上方之四倍以乙壬為乙丁之半故也即乙
壬等四小句方之併所餘即與丙巳上方等矣。而此四乙巳方減乙丁上
方之餘。又與全數上方。及中末線大分之方并等即十邊形之一何則。
試觀二圖。即理分中末線圖甲丁為全數。甲戊為全數上方。丁乙為大
分。丁子為大分上方。丙方之并。成甲壬子戊罄折形。此形內。容
丁子大分方形之四。則重一庚巳小分之方。目丙丁與乙丁等。則巳丁壬乙。俱為
大分之方。而庚壬矩與丁子方等。甲辛矩又與庚壬矩等。是共有大分上方形之四倍。而庚巳小方則重疊在內。庚巳乃辛巳
小分之方也今試於罄折形內。減去重疊之方癸辛方是即於四个大
分方內。減一小分上方。亦猶之前圖四乙巳方內。減去乙丁上
方。而所餘必等矣。夫此罄折形。既與前四乙巳方內。減乙丁上
方之餘冪等。而此餘冪。又與丙巳上方等。則此罄折形。亦與五

等邊之一丙巳上方等。而罄折形。乃甲戊丁子丙方之并也。甲
戊方之根甲丁。即前丙辛巳形之丙辛邊丁子方形之根丁巳
即前丙巳辛形之巳辛邊。今丙辛巳辛上兩方并。既等于丙巳
上方。是丙辛巳為句股形。而辛為直角矣。丙辛半徑。股也。巳辛
大分。句也。丙子弧六十度之邊子丙。即丙辛股。巳丁弧三十六
度之邊丁巳。即巳辛句。而丙辛巳辛丙巳三邊適湊成句股形。
故曆書言六邊上方。并十邊上方。與五邊上方等。蓋以此也
若作戊乙線。成戊丁乙句股形。與前丙辛巳形等。戊乙即五邊
形之一。益可見辛之必為直角矣
求七十二度通弦法。取逕甚奇。大測止具算術。未著其理據云
見幾何十三卷十題薛書及孔林宗説。殊多牽附。余此圖。與原算脗合。

乃知古人立法之簡奥也。因更推衍四法如下

如圖。午丁大圜。依理分中末線法。作十邊等內切形。丁午等俱大分。次從癸昴諸點。癸甲昴甲俱為大分作癸昴昴壁等線。俱為小分。各連之。則中末線之大小兩分。成內外兩十邊等形。俱各兩兩平行。一切于周。一切于徑。次任取戊為心。甲為界。作圜亦依上法用其大分小分。作內外兩十邊等形。末作乙丙乙壬等五線。為五邊形之各邊。諸線交錯。得求乙丙邊



之法有五

一丁乙丙形。有丁丙全徑。有丁卯全數及卯乙大分。并為丁乙。丁乙與午戊必平行乙為直角。用股弦求句法。得乙丙邊

二乙丙寅形。有乙寅小分為句。有丙戊戊寅兩大分并。得丙寅為弦。求得乙丙股

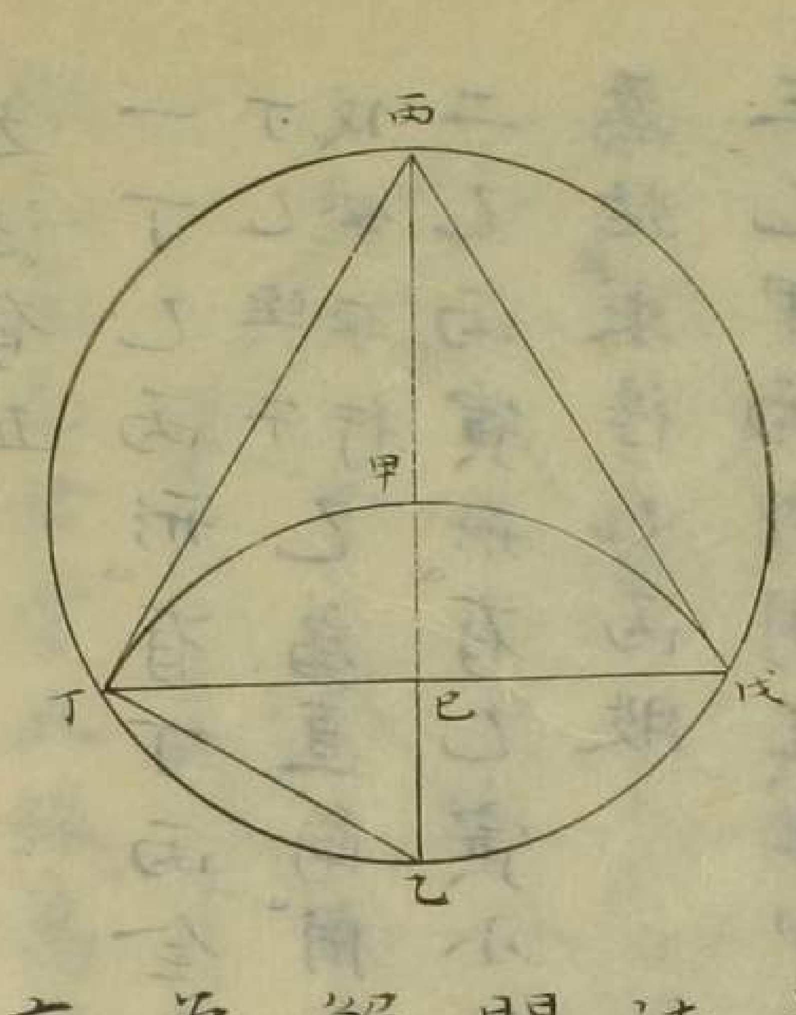
三乙甲丙形。用其半甲壬丙形。有甲丙全數。有甲辛大分。有辛壬為辛戊小分之半。并為甲壬。求壬丙句。倍之。得丙乙邊

四乙壬戊形。有乙戊大分為弦。有壬戊小分之半為句。求乙壬股。倍之。得乙丙邊

又形中兩圜相交。內有甲卯乙戊末。為小五邊形。其各邊即大分。甲辰戊丙庚形同。又有甲卯乙戊丙庚。為小六邊形。其各邊

亦即大分。又小五邊形。與午丑乙丙氐大五邊形。相似而體勢等。則其各邊俱成比例。乙甲全數與甲卯大分。若乙午與午丑。則以甲卯與午乙相乘。全數除之。亦得五邊形之一。其午乙線以乙亢午直角形用句弦求股術取之　此圖係救新法

表根五　圈內作三等邊內切形。求得一百二十度通弦。半之。為六十度正弦



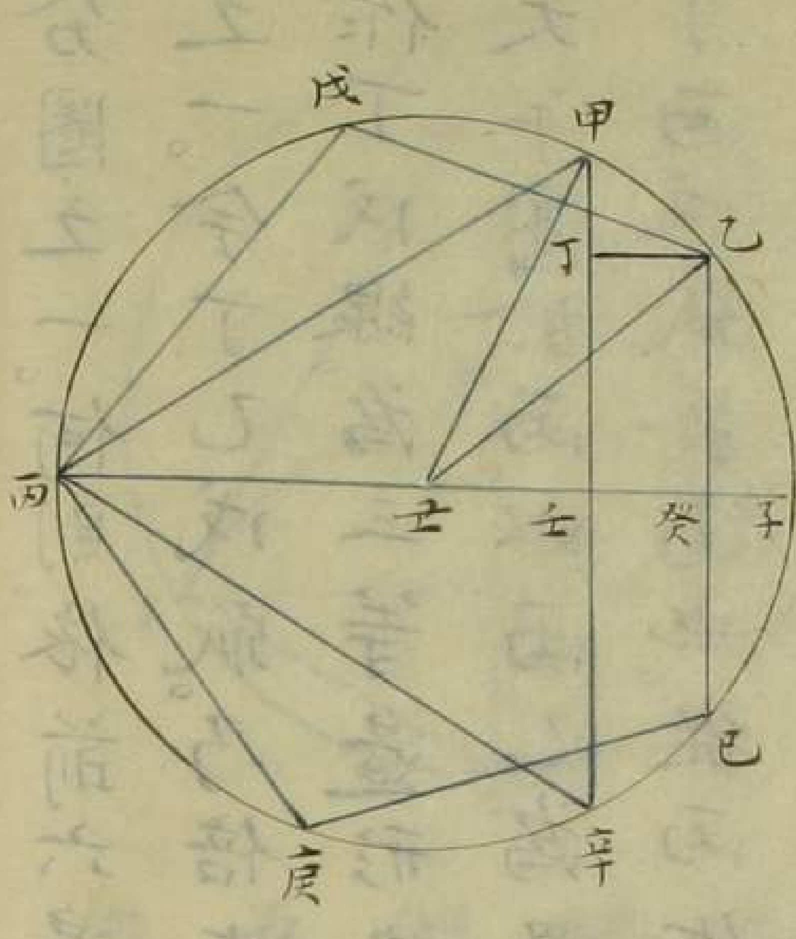
法曰。全徑上方形。內減六邊形上方形。開方。得一百二十度之通弦

解曰。甲為圈心。甲乙為半徑。作圈。次乙為心。仍用乙甲為半徑。作弧。與大圈相交於丁於戊。其所截之丁乙戊弧。即三分圈之一。何則。依前六邊形之論。丁乙戊乙二弧。俱為六分圈之一。今丁乙戊弧。乃倍大於丁乙。必三分圈之一矣。一百二十度即作丁戊線。為三等邊形之邊。次以乙甲引至丙。必平分丁丙戊大半圈於丙。以丙乙為過心線。既平分丁戊弧於乙。亦必平分丁丙戊弧於丙也。從丙作丙戊丙丁二線。成丁丙戊三邊等內切形。求之。用乙丁丙三角形。丁為直角。以丁角乘丙戊乙半圈故丁乙為六邊形之一。丙乙全徑上方。減去丁乙半徑上方丁乙即乙甲餘開方。得丙丁邊。句弦求股術也

表根六　圈內作十五等邊內切形。求得二十四度之通弦

法曰。三邊等形。與五邊等形之較。即十五分圈之一。可求二十四度通弦

解曰。戊丙大圜。丑為心。作丙子全徑。取丙點為宗。依前法作丙甲辛三邊等形。又作丙戊乙己庚五邊等形。丙甲弧為三分圜之一。一百二十度 丙戊乙弧為五分圜之二 七十二度 相較。得甲乙弧二十四度。即十五分圜之一也。其求甲乙之邊。以五邊形之邊乙己半于癸。三邊形之邊甲辛半于壬。得乙癸。與甲壬相減 丁壬即乙癸 存甲丁為股。次作乙丑。甲丑兩半徑成乙丑癸。甲丑壬二直角形。以乙丑半徑上方。減乙癸半弦上方。餘開方。得癸丑邊。又以甲丑半徑上方。減甲壬半弦上方。餘開方。得丑壬邊。次以丑癸與丑壬相減。得壬癸即丁乙為句。末用甲丁乙直角形。甲

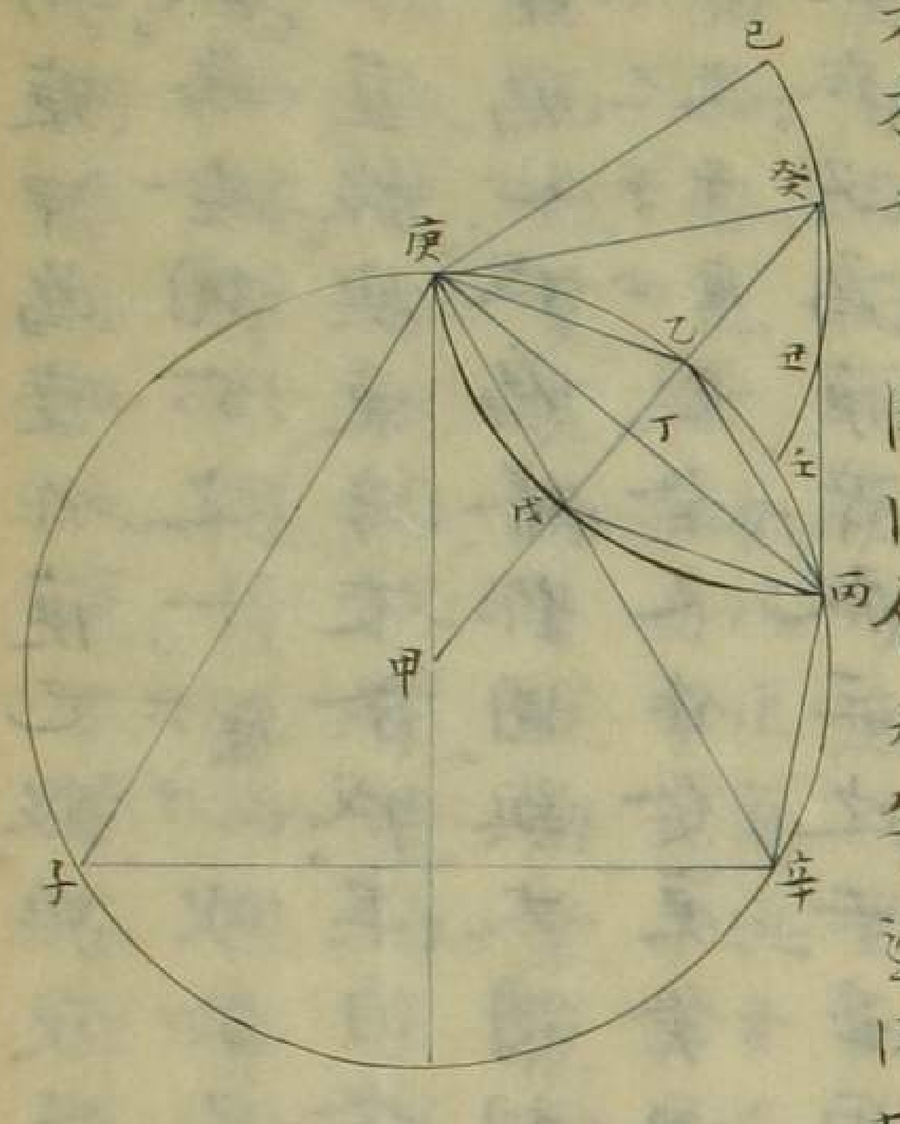


丁上方。與丁乙上方并。開方。得甲乙為十五等邊內切形之邊

又解曰。甲乙弧何以知為十五分圜之一。凡一圜內。作三邊等形。又作五邊等形。以其邊數三與五相乘。得十五。即知可為十五等邊切形。其兩弧之較。必有十五分圜之一。如甲乙也。餘倣此推

表根七　此亦曆書原法

圜內作九等邊內切形。求得四十度之通弦。新增



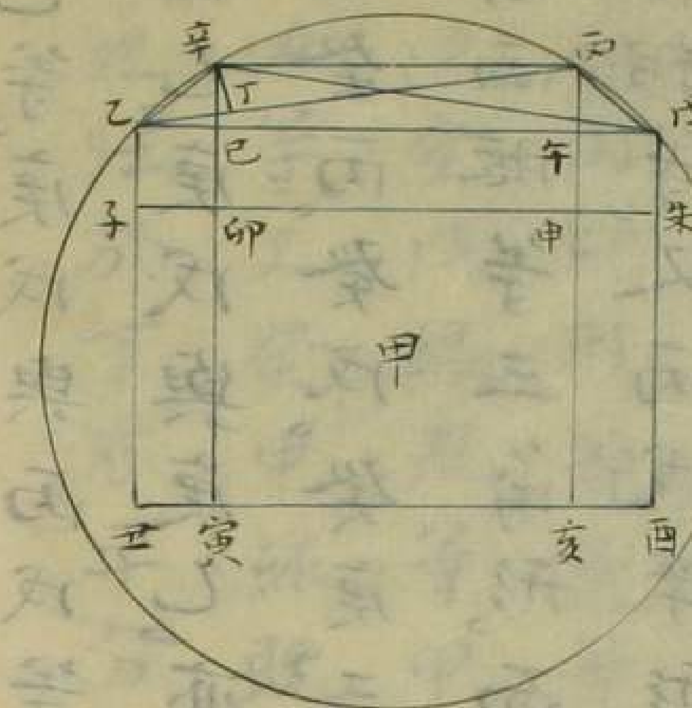
求內切九等邊形　法曰。甲為圜心。于圜內先作庚子辛三邊等形。法見前 平分大圜為三分。次

用庚甲為度。作庚己線。與庚辛為直角。庚為心。己為界。作己壬弧。為全圈六之一。六十度次於己壬弧上。任取癸點。向甲心作癸甲直線。與庚辛交於戊。其自癸至戊之度。令與甲乙半徑等。次癸為心。戊為界。作圈。與大圈相交於丙於庚。庚點為己壬弧圈心。又癸戊半徑與庚己等。必相交于庚從癸又作癸庚癸丙二線。得庚戊丙圈所割之庚乙丙弧。必為庚辛弧三之二。辛丙為三之一。即全圈九分之一也。末作丙辛線。為內切九等形之邊。依此作丙乙乙庚諸線。成九等邊內切形。等邊等角

解曰。癸戊線既等甲乙半徑。則兩圈相交之庚戊丙。庚乙丙。兩弧必等。又癸甲線既過兩心甲大圓心。癸庚戊丙圈心試作庚丙通弦。必平分通弦於丁。亦平分庚丙弧於乙。與丙庚弧于戊。而庚乙與丙乙等。庚戊與丙戊等。又兩弧庚乙丙。庚戊丙。共用庚丙通弦。則丙戊與丙乙。庚戊與庚乙。亦各相等。其丙戊。丙乙。庚戊。庚乙。四線亦等。又癸丙。癸戊。癸庚。三線。俱即半徑。癸為庚戊丙圈心。故則癸庚戊。癸丙戊。為兩腰等三角形。而兩癸角又等。庚戊。丙戊。二弧等故則兩形之邊角俱自相等。又丙戊辛形。其戊辛二角亦等。何則。戊角之餘為丙戊庚角。而丙戊庚乃庚戊癸。丙戊癸。兩角之并。亦即癸丙戊。癸戊丙兩角之并。癸戊庚角。與癸戊丙等。因丙形為等形。亦與癸丙戊角等是丙戊辛角。必與戊癸丙角等。其丙辛戊角。棄庚丙弧。則辛角必得庚丙之半。與乙丙弧等。亦與丙戊等。是丙辛戊角。亦與戊癸丙角等。而辛丙戊為兩腰等形。因得戊丙與辛丙兩邊亦等。夫丙戊邊。本與戊庚等。則辛丙與戊庚亦等。而丙戊即丙乙。庚戊即庚乙。是辛丙。丙

乙。乙庚。三線等也。而辛丙。丙乙。乙庚。三圜分亦等矣。前庚乙辛弧。乃全圜三之一。今庚乙又為庚辛三之一。即全圜九之一。為四十度。而庚乙即四十度通弦　按癸丙線必與庚甲平行。其交巳壬弧之丑點。必居癸壬弧之中。而壬丑，丑癸。癸巳。為三平分。各得二十度

求九邊形之邊　法曰。取十邊形相較。可得九分圜之邊如圖



乙辛戊圜。甲為心。取辛丙弧為十邊形之一。三十六度 戊乙弧為九邊形之一四十度 辛丙為十邊形之邊。乙戊為九邊形之邊。二線令平行。則其較弧辛乙。與丙戊相等。各二度 次作辛乙丙乙諸線成辛乙戊丙四邊形。此形有丙辛邊 前第五根所得 有辛乙邊。一度正弦之倍 用後法所得

先求丙乙線。用丙辛乙鈍角形。作辛丁垂線。以辛丙半之因乙辛。得辛丁。次以辛丁上方。減辛乙上方。開方。得乙丁。又以減辛丙上方。開方。得丁丙。并之得乙丙線。與辛戊等。次以乙丙自乘方內。減去辛乙自乘方。餘以辛丙除之。得乙戊為九邊形之邊即四十度通弦也。上圖之庚乙線

解曰。丙辛線既與戊乙平行。則丙乙辛戊兩線相等。辛乙與丙戊亦等。從辛從丙。作辛巳丙午二垂線。所截戊乙線之戊午。巳乙。為丙辛戊乙二線相較之半亦必等。夫丙乙自乘。得丙乙上方形。辛乙自乘。得丙戊上方形 辛乙與丙戊等故 而丙乙上方。乃丙午乙午上兩方之并。丙戊上方。又丙午戊午上兩方之并。則試於

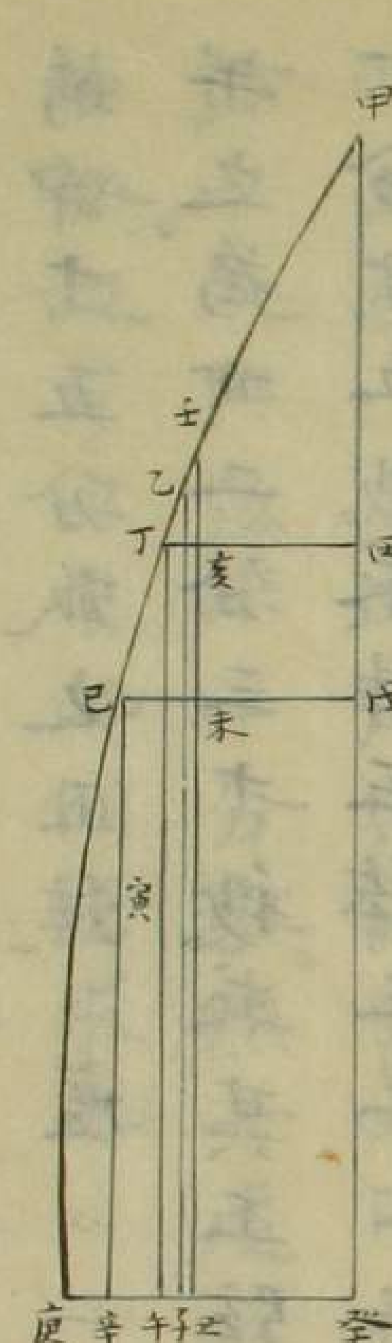
丙乙上方。減去丙午上方。所餘為乙亥方。丙戊上方減去丙午上方。所餘為午未方。而午未方。即己子方也。今于丙乙上方形。即戊午上方形減丙戊上方形。是減去丙午上一方。又減去己子一方。所餘為午卯壬亥罄折形。夫午乙與己戊二線相等。則午壬與己酉丙方形亦等。因得卯午矩。與申酉矩等。移卯午補申酉。則壬未矩形。與午卯壬亥罄折形等矣。故以子壬除之子壬即丙辛。以卯亥為正方故得子未邊。即乙戊四十度通弦也

按九邊形法。諸書所無。然缺此則九十度之正弦不備。壬寅秋。客潤州魏副憲官署。時魏公銳意曆學。因作此圖補之。

附求一度之通弦一度為全圓三百六十之一。亦可名三百六十等邊切形

法曰。一度之通弦。取相近之數。用中比例法得之

如圖。庚乙弧為一度。先設甲庚一度三十分依前法表根六及表法一求其正弦甲癸。〇度。二六一七六八九。又求其通弦。得〇度〇。二六一七九二。半之。得〇度。〇一三〇八九六。為己庚四十



五分弧正弦。己辛也。三分之。得己寅。〇度。〇〇四三六三三。為十五分弧略大線。加己辛。即未丑得壬丑。〇度。〇一七四五二八。為一度弧略大之正弦。次於甲癸線內減己辛即戊癸餘戊甲。亦三分之得丙戊〇度〇〇四三六二四。為十五分弧略小線。加戊癸。得丙癸〇度〇一七四五二。即丁午也。為丁庚一度略小弧之正弦。夫大小

而弦。其差八數。為壬亥。半之。得四。壬申也。申亥同加小減大。得乙子〇度〇一七四五二四。為乙庚一度之正弦。若求其通弦。用正弦與正矢為句股求之此薛儀甫曆學會通法

再細求一度正弦條作枚法

前四十五分弧之正弦。〇度〇一三〇八九六。法以四十五分半之。為廿二分三十秒。求其正弦。得六五四四九。又半之。為十一分十五秒。求得正弦三二七二四五。夫廿二分三十秒之弧。倍於十一分十五秒。而其弦亦倍。則知二十分以內之弧。正弦若平分數縱有參差非算所及法以廿二分三十秒為一率。正弦六五四四九為二率。十五分為三率。得四率十五分正弦〇度〇〇四三六三二六。次以十五分正弦。與四十五分餘弦〇度九九九九一四三相乘。得〇度〇〇四三六二八八六〇六八六為先數。以十五分餘弦〇度九九九九〇四八。與四十五分正弦〇度〇一三〇八九六相乘。得〇度〇一三〇八九四七五三為後數相乘之理見表法六兩數相併。得〇度〇一七四五二三六一四五為一度正弦。與薛書略同。但此法似密

論曰弧與弦非平分數。然一度以內。弧弦相切。曲直之分所差極微。故可以中比例法求也

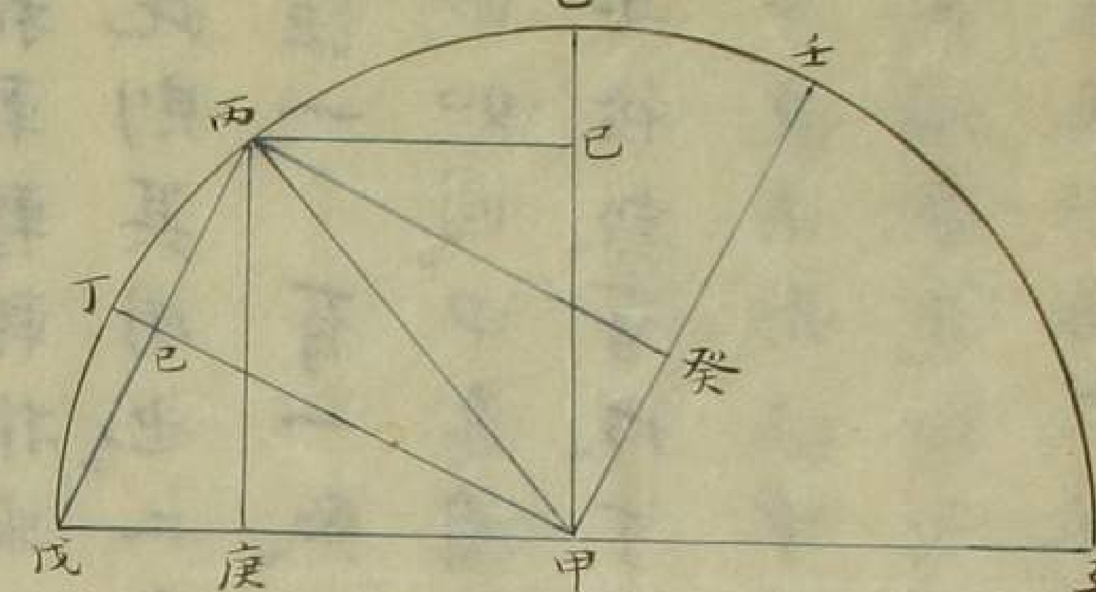
按上七根所求者。皆各弧之通弦。表中所列俱正弦。蓋論割圓。必以通弦。便算則惟正弦。然正弦即通弦之半。全與分之比例等。其理一也

作表之法有七

用上根數。於大圜中。求七弧之通弦。以為造端之始。而各度之弦。尚無從可得。爰立六種公法。或折半。或加倍。或相總。或相較。轉輾推求。以得象限内各度之正弦。蓋上諸法乃其體。此則其用也。二者相資表以成焉

表法一 有一弧之正弦。求其餘弦。及半本弧之正弦與餘弦。

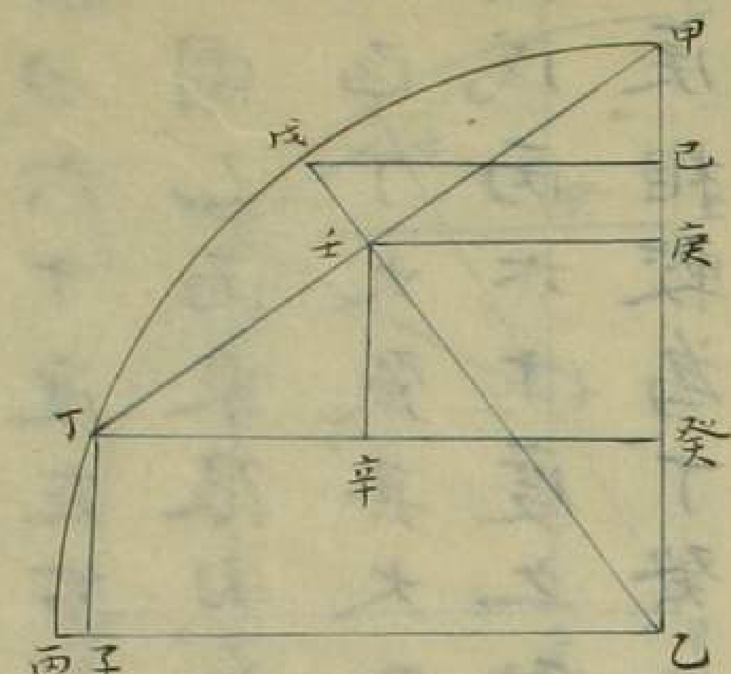
解曰。如圖。甲為圜心。乙丙戊弧。為全圜四之一 九十 乙甲戊甲俱半徑。設有戊丁丙弧。其正弦為丙庚。即從丙作丙甲線。成丙庚甲直角形。法甲丙全數上方。減丙庚正弦上方。餘開之。得甲庚。與丙辛等。即丙戊弧之餘弦也。又用甲庚減甲戊半徑。得庚戊矢。又作丙戊線。成丙庚戊直角形。法庚戊矢上方。與丙庚上



方并。開方得丙戊為戊丁丙弧通弦。半之。
得丙己或戊己。即半本弧丙丁或丁戊之
正弦。又以丙甲己形。戊甲己形同用句弦求股
術。求己甲。得半本弧之餘弦。癸丙等若再以
丙己丁己二邊求丙一弦。半之。又得半丙
丁弧之正弦。餘倣此遞求之
論曰。丙戊弧既平分于丁。其丙戊弦亦必
平分於己。故半丙戊。為半本弧之正弦。試
作丁甲壬象限。則丙己正弦己甲餘弦。尤了然矣

表法二 有一弧之正餘弦。求其倍本弧之正弦與餘弦

解曰。甲丙象限內。設有甲戊弧。其正弦戊己。餘弦己乙。今求倍
甲戊之甲丁弧正弦丁癸。與餘弦癸乙。法先作丁甲線。為丁戊
甲倍弧之通弦。此線必為乙戊線平分於壬。則壬甲亦為甲戊



弧正弦。與戊己等。丁壬亦等。夫壬甲既等
戊己。則其餘弦壬乙。亦必等己乙。法用己
戊乙。庚壬乙兩形。乙戊全數與戊己正弦。
若乙壬餘弦即乙己與壬庚。而壬庚即辛癸
倍之。得丁癸為倍弧甲丁之正弦
論曰。乙戊己。乙壬甲。兩形相等。戊乙等甲乙。戊己等甲壬。己乙等壬
乙。故壬乙得為餘弦。又乙戊己。乙壬庚。兩形相似。故第四率可
求壬庚即辛癸。而壬庚必為丁癸之半。以丁癸甲直角形。丁甲弦
既平分於壬。從壬作壬辛垂線。亦必平分其股于辛也。故倍癸

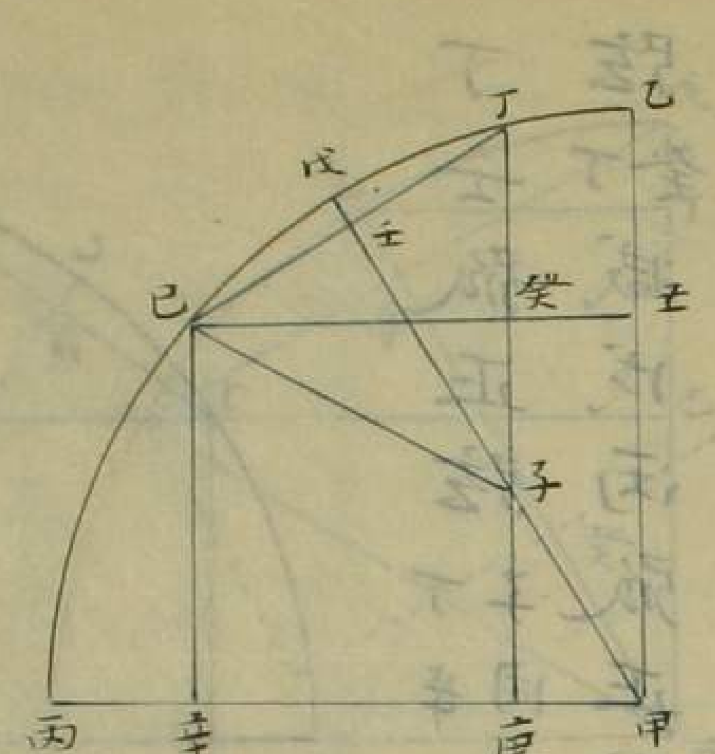
辛。得丁癸為倍弧甲戊丁正弦。又壬庚線。亦平分甲癸句於庚
用甲壬庚形。依句股術。求甲庚倍之。以減甲乙。存癸乙或丁子
即倍弧之餘弦也

表法三　求象限內。六十度左右距等弧之正弦

解曰。六十度左右距等弧之正弦。與其前後弧兩正弦之較等。

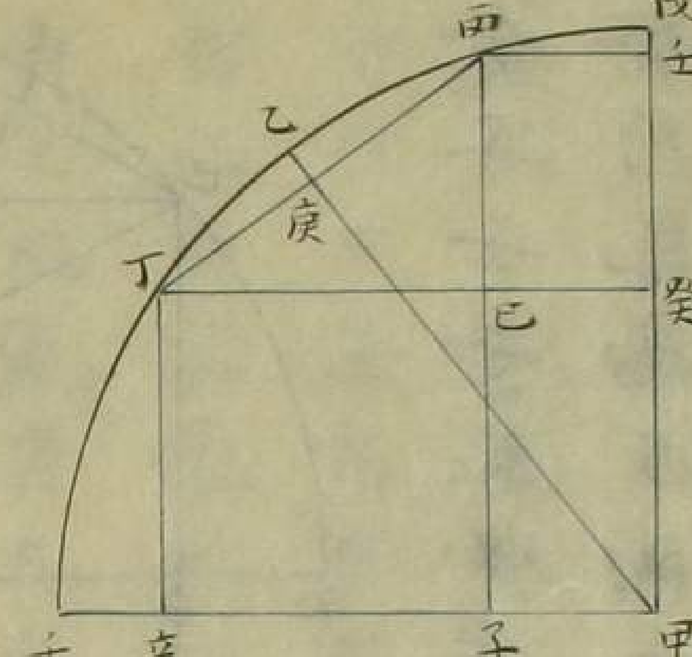
如圖。乙丙象限內。設丙戊為六十度不動有丙己小弧度須在三十度以上
丙己丁大弧。其大弧與丙戊六十度之較戊丁。令與丙己小弧
與戊丙六十度之較戊己等。其大小兩弧正弦。一為己辛。一為
丁庚。相較為丁癸。此丁癸與己壬丁壬等。則丁癸為戊丁戊己
距等弧之正弦。壬甲為餘弦

論曰。試從己向子。作己子線。則丁己子為三邊等形。何則。形中
壬子丁。壬子己兩形相等丁子壬。己子壬兩角本等。又同用壬子邊。則兩形自等。而丁子
壬角。與乙甲戊角等。以丁庚與乙甲平行故為三十度乙甲戊為丙戊甲角六十度之餘
則丁子己角為丁子壬之倍必六十度。又
丁子壬。己子壬兩角等。則其餘壬丁子。壬
己子二角。亦必各六十度。而與丁子己角
等。則丁子己為平邊三角形。夫丁子己既
為平邊三角形。其己癸垂線。必平分丁子
於癸。子壬垂線。必平分丁己於壬。而分之丁癸與丁壬必等。而
丁癸乃己丙丁丙大小二弧兩正弦一己辛。一丁庚之較。



按此須先求得象限內六十度之正弦。依上法可求左右三
十度之正弦。外此即不可用。以六十度之餘。止三十度故也

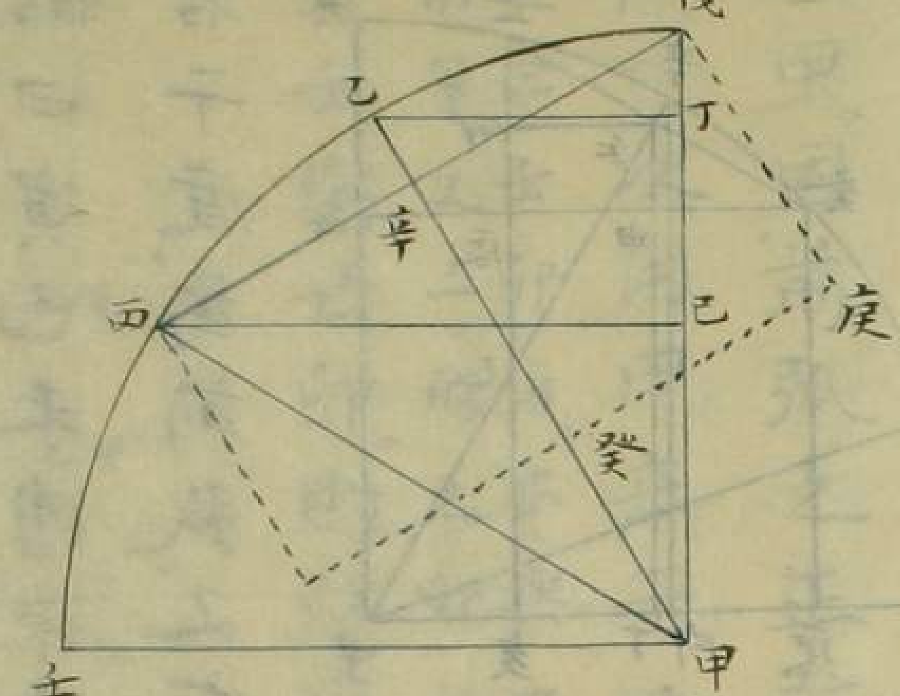
表法四　任設丙弧之正餘弦。求丙弧并及較弧折半之正弦。



解曰。戊壬象限內。任設不齊之丙弧。一置在上如戊丙。一置在下如丁壬。中間所容丙丁弧。即戊丙丁壬丙弧并之餘。今求半丙丁弧丙乙丁乙同之正弦。法作丁壬弧正弦丁辛。餘弦丁癸。戊丙弧正弦丙壬即癸己餘弦丙子。又作丙丁線。為較弧之通弦。成丙已丁直角形。次以丁壬弧正弦丁辛己子同減戊丙弧餘弦丙子得丙已為股。丁壬弧餘弦丁癸減戊丙弧正弦己癸得丁已為句。句股求弦。得丙丁邊。半於庚。得丙庚或庚丁。為丙丁半弧丙乙之正弦

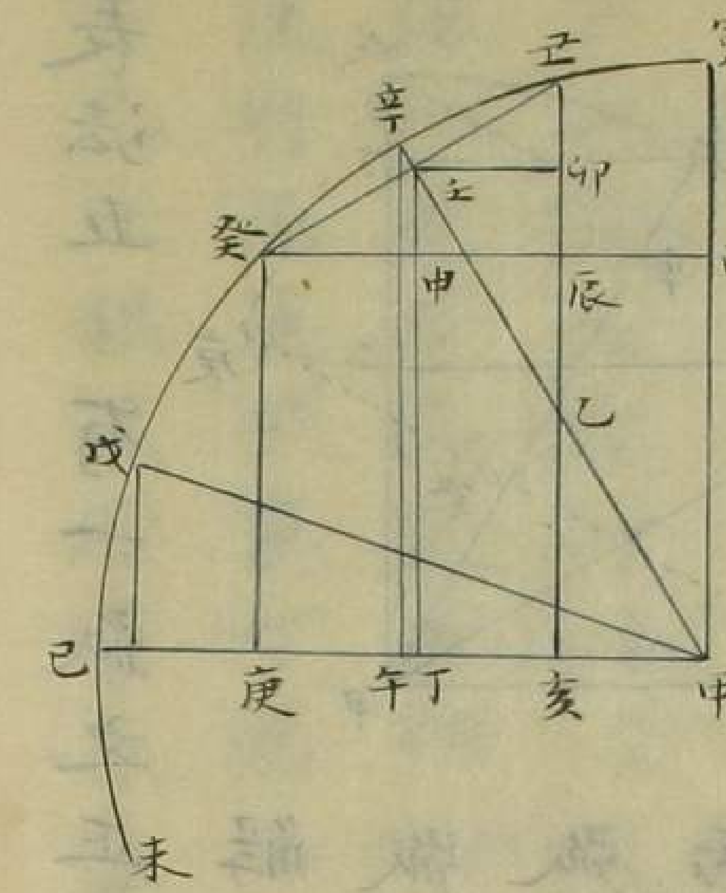
已上俱係曆書原法

表法五　有一弧之正弦。求倍本弧之矢。因得餘弦



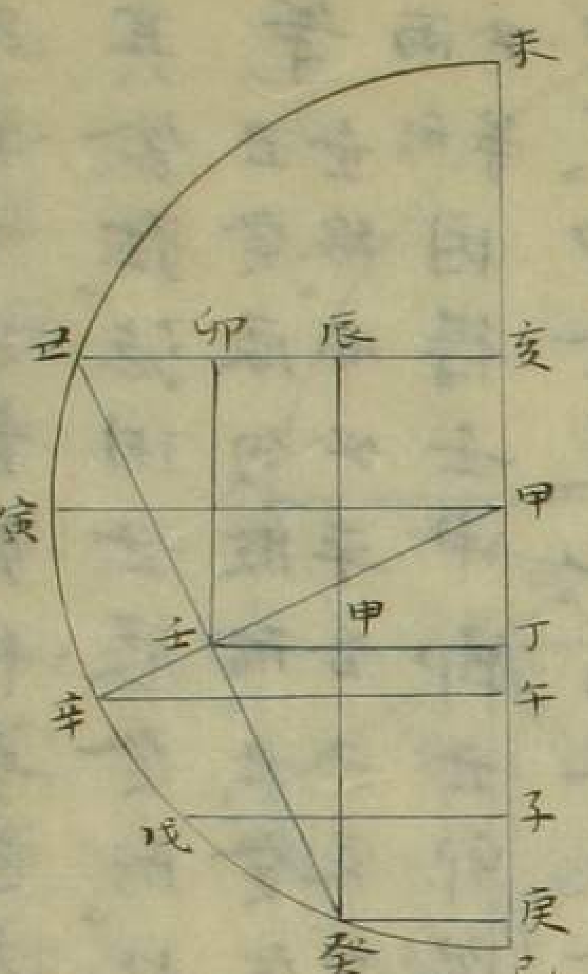
解曰。設戊乙弧。其正弦乙丁。戊丙為戊乙弧之倍。其正弦丙已。正矢戊已。丙戊為倍弧通弦。半于辛。其半戊辛與乙丁等。法用戊丙已。戊辛甲。兩直角相似形二形同用戊角。故相似甲戊與戊辛。若丙戊與戊已倍弧矢。夫四率之理二三相乘之。矩內形。與一四相乘之矩等。則丙戊乘辛戊。即甲戊乘戊已。而丙戊乘辛戊所得矩形。為辛戊上方形之倍。戊辛自乘得辛庚方。倍之。為丙庚矩。即丙戊與戊庚相乘之冪也。戊庚即戊辛而全數甲戊也又省一除。故以乙丁正弦即辛戊自乘。倍之。退位。即得戊已倍弧矢。用減半徑。得倍弧餘弦已甲。若反之。以戊已矢

折半。進位。開方即得半本弧之正弦乙丁　此孔林宗術。勿菴稱
為正弦簡法。余作此圖以著其理
表法六　任設不齊之兩弧。求兩弧相并之正弦。及相較之正
弦



解曰。寅巳未圜。甲為心。寅巳為一象限。設寅巳弧內。有巳辛弧
若干度。為前弧。又有巳戊弧小于巳辛。為後弧。戊子為後弧正
弦。子甲其餘弦。午辛為前弧正弦。午甲
其餘弦。次取辛壬弧。與巳戊後弧等。則
巳戊壬為前後兩弧之并弧。壬亥即并
弧之正弦。次作壬𡈼線。為壬辛弧正弦。
與戊子等。其餘弦𡈼甲。亦與子甲等。辛

𡈼亦與子巳等。法用甲午辛。甲𡈼丁。二相似形。以後弧之餘弦
𡈼甲。因前弧之正弦辛午。全數辛甲除之。得𡈼丁為初數卯亥等寄
位。次用甲辛午。壬𡈼卯。二相似形。甲辛午形之辛角與壬乙辛角等。因壬𡈼乙為直角其壬𡈼卯角。亦與壬乙𡈼角等。則亦與甲辛午角等。又二形之卯午俱為直角。則兩形相似甲辛與甲午。若
壬𡈼與壬卯。則以前弧之餘弦甲午。因後弧之正弦壬𡈼。全數



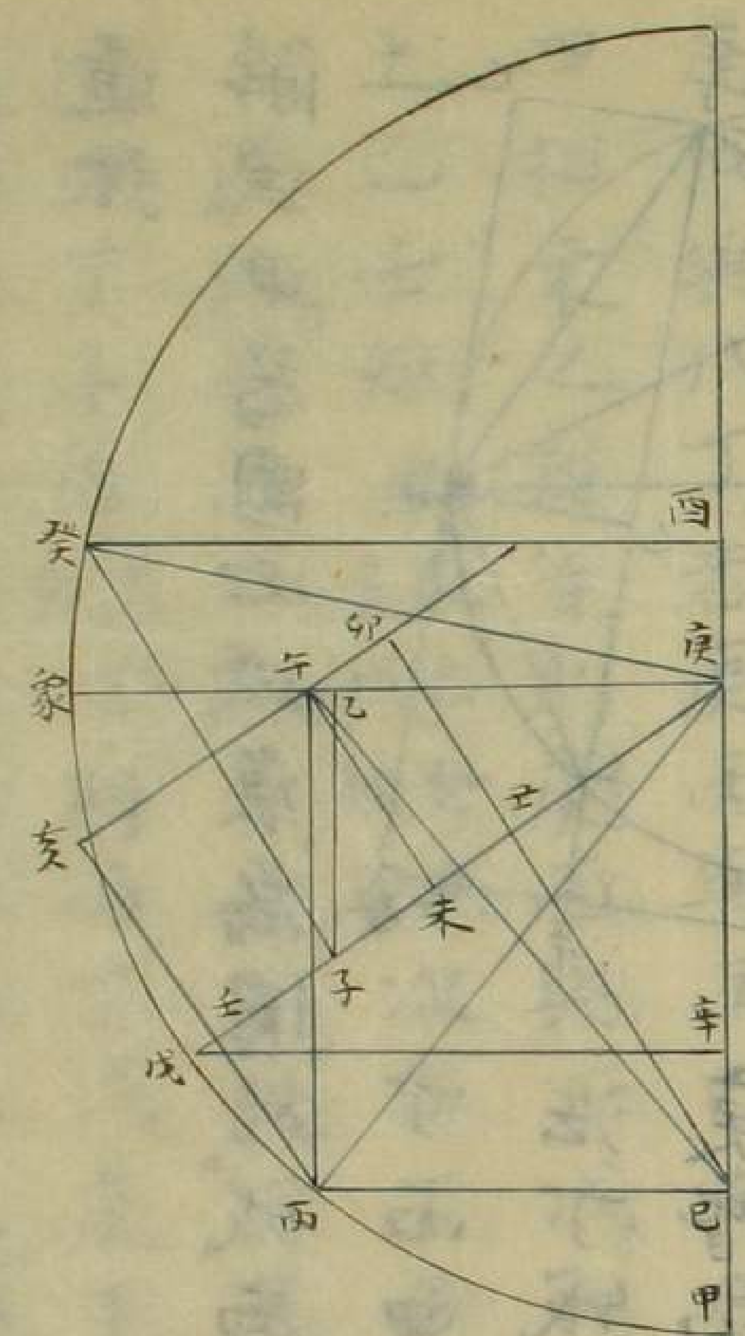
甲辛除之。得壬卯為次數。末以壬。卯與
初數卯亥相并。得壬亥為巳戊壬兩
弧相并之正弦　若求兩弧相較之
正弦。法以後弧壬𡈼正弦引長之抵
圜界於癸。則壬癸為壬辛癸弧之通
弦。因𡈼點為直角。其癸𡈼與壬𡈼必等。因得壬辛癸辛兩弧亦

等。夫壬辛弧。原與戊己後弧等。則辛癸與戊己弧亦等。即以辛癸減辛己前弧。得癸己為兩弧之較。癸庚即較弧之正弦。癸酉其餘弦。法用壬辰癸形。此形內之癸申壬。壬卯壬。二直角形相等。壬癸辰句股形。壬癸弦既平分于壬則從壬作壬卯壬申二垂線。亦必平分壬辰句于卯。癸辰股于申。而癸申壬。壬卯壬。兩形必等因得壬申即壬卯次數壬申等卯辰卯辰即壬卯用以減初數壬丁。存申丁。即癸庚也。為較弧癸己之正弦。亦與戊辛弧正弦等

若兩弧相并在象限外。如次圖己寅壬弧。理亦同餘記同前

有不齊之兩弧。求相并相較弧正弦之法

法曰。兩弧小甲丙。大甲戊相并曰總弧甲癸相減曰多弧戊丙置大小兩弧。以大弧正弦戊辛因小弧較弦子庚曰先數庚乙以大弧較弦辛庚因小弧正弦庚午曰後數午未視兩弧在象限內者。以後數亥壬減先數亥丙也。以午亥丙形與庚乙子形等故為多弧正弦壬丙以後數卯壬加先數壬己。以庚己壬形。與庚乙子形等故為總弧正弦卯己也。以卯午己形。與庚酉癸形等。故卯己即酉癸若兩弧過象限者。加減各異

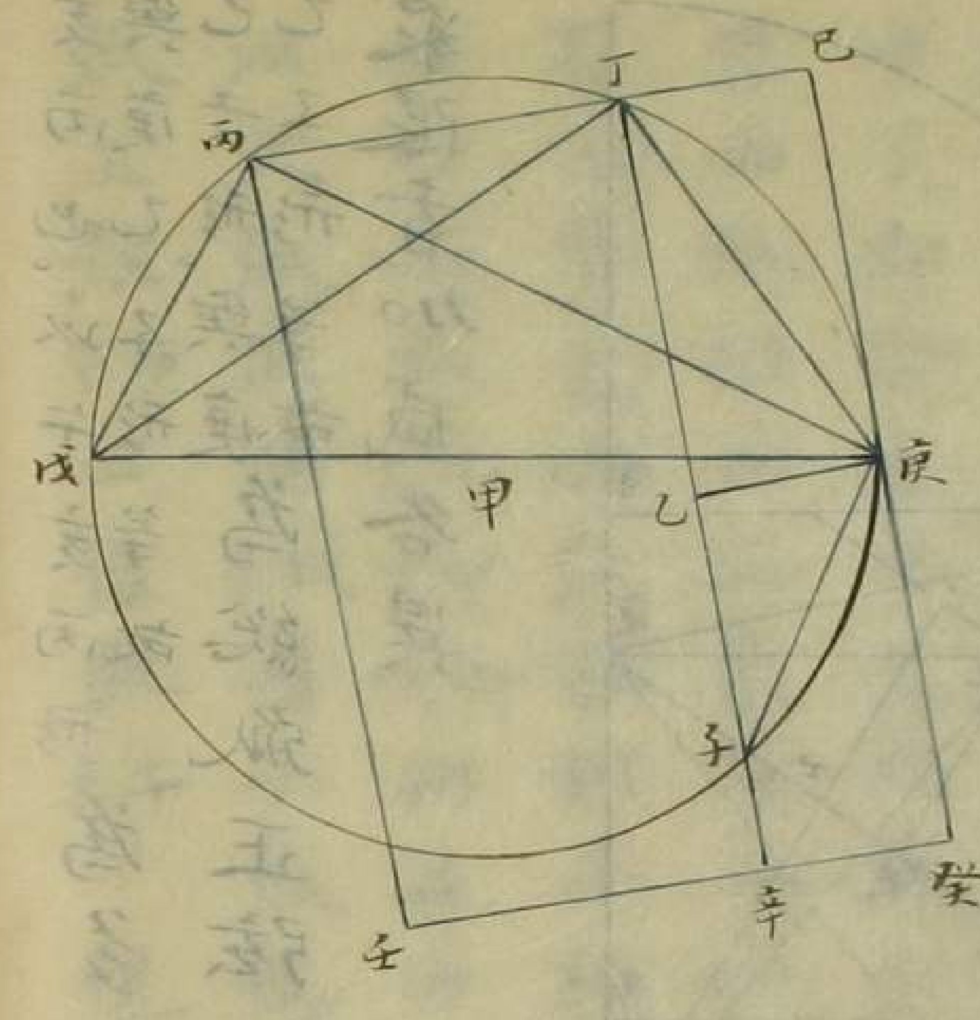


又或置大小兩弧同上以大弧正弦戊辛因小弧正弦午庚。曰先數庚未以大弧較弦庚辛因小弧較弦庚子曰後數子乙視兩弧在象限下。以後數午亥加先數。得多弧較弦壬庚以後數庚壬減先數庚未得總弧較弦。壬未。即午卯亦即庚酉若兩弧象限內外不等。加減亦異

此法詳三角會編五巻。梅勿菴先生環中黍尺。亦著其法。然彼所論者。弧三角形。此則平圓中求正弦也

表法七　圓内有五通弦。錯互成四不等邊形。求不知一弧之通弦

解曰。甲為圓心。戊庚為圓徑。戊丙。丙丁。丁庚。俱為通弦。戊庚

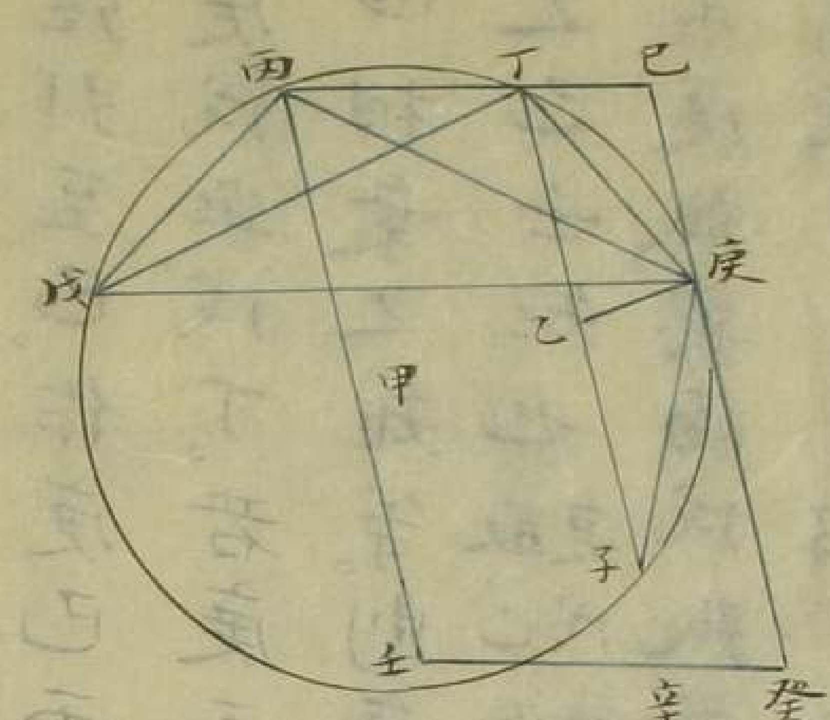


丁丙四不等形。丁戊。丙庚為對角線。

法丁戊偕丙庚相乘之矩形。内減丁庚偕丙戊相乘之矩形。餘為戊庚與丙丁相乘之矩形。蓋丁庚丙戊相乘之矩。與戊庚丁丙相乘之矩并。與丁戊丙庚兩對角線相乘之矩等也。若有丙戊。丁庚。戊庚。丙庚。丁戊五通弦用此可得丙丁弧之通弦

論曰。庚戊丁形。與庚丙丁形。其戊丙兩角等同乘丁庚弧故　若以丙丁弦引至巳。作庚巳丙直角形。則庚戊丁。庚丙巳。兩直角形相似。庚戊與戊丁。若庚丙與丙巳。夫四率之理。二三相乘矩形。與一四相乘之矩等。則庚丙與丁戊相乘所得。即庚丙與丙巳相乘之巳壬矩也　取巳癸與庚戊徑等　次作丁辛線。與巳癸平行。割圜於子。其子庚弧。與丙戊弧等。何則。戊丁庚為直角。丙丁子亦為直角。同用戊丁子角　子戊弧　則丙丁戊。庚丁子。兩角必等。其所乘之丙戊庚子兩弧亦等矣。因得庚子邊。即丙戊通弦。又庚子丁角與庚戊丁角等　同乘丁庚弧故　於庚作庚乙垂線。與巳丙平行。成子庚乙直角形。與庚戊丁直角形相似。戊庚與庚丁。若子庚與庚乙。依四

率之理。庚子即丙戊與丁庚相乘所得。即庚戊與庚乙相乘之己辛矩也丁辛即庚戊己丁即庚乙用以減己壬矩形。餘丁壬矩形。乃庚戊與丁丙相乘之冪。故以庚戊除之。得丁丙為丁丙弧之通弦



若戊丙丁庚非半圈或大或小不論則庚戊為戊丙庚弧之通弦。理亦同。但己壬為斜方形。如上圖戊丁庚為小半圈成己壬斜方。其庚乙線不與丁己平行。法作己庚乙角。令與丁己庚角等。則腰間相對丁乙二角亦等。因得庚乙丁己為等邊。而庚乙子鈍角。為丁乙庚之餘與丁己庚角自等。亦即與圓內戊丁庚角等。而庚乙子。庚戊丁。為相似形。庚乙即丁己

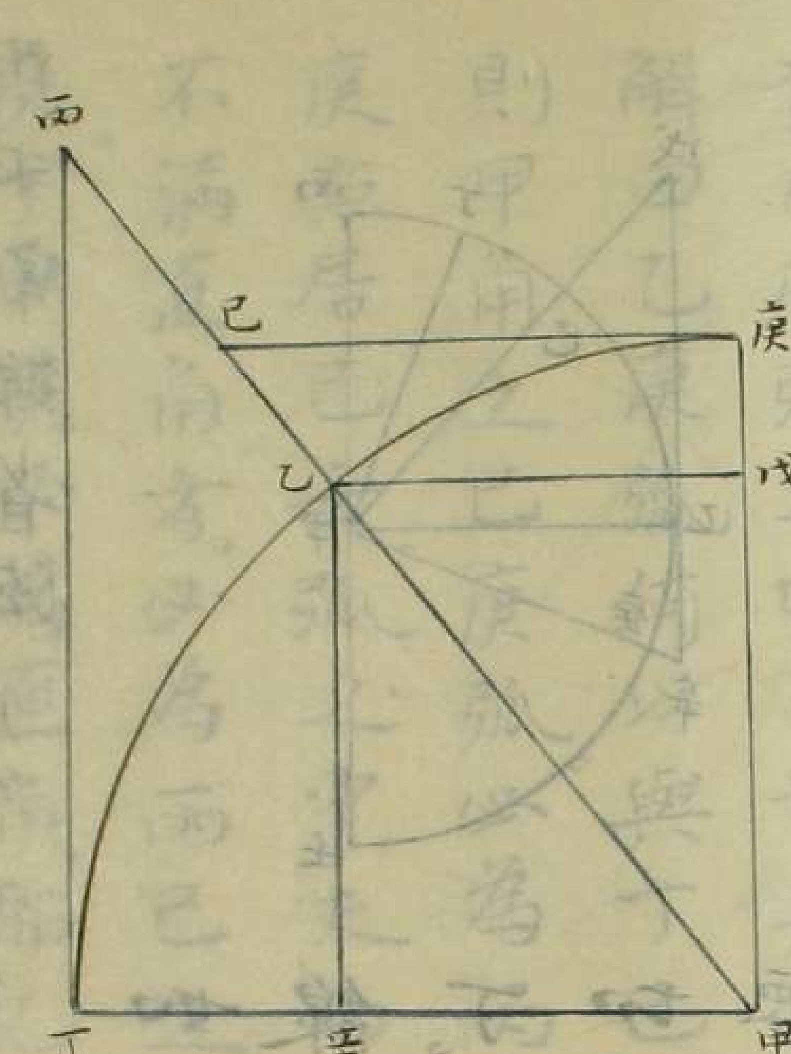
此上古多羅某法。諸書未有能言其故者。得余此圖。庶不昧古人精意　已上二法。係余所增

用上七法。交互推求。可得象限內各度之正弦。細推之。又可每隔十五分四分度之一得一正弦。十五分以下。用中比例法。以十五分正弦為實。十五為法而一。得一分之正弦。遞加之。得每度內各分之正弦。立割圓表。又此正弦。算一象限已足。以適滿一直角故也

求切線割線矢線

割圓正弦而外。又有切割矢三線。幷正弦為四線。合其餘為八線。蓋以八線準一弧。弧之曲度。得其直矣。切線止切圈以一點。全在圈外。割線從圈心過規。半在內。半在外。正弦與矢。全在圈

内。如圖。甲為圜心。庚丁為象限。庚甲。丁甲。俱半徑。設有庚乙正弧。即戊乙為正弦。乙辛（戊甲同）為餘弦。次於圜外作庚己線。與戊乙平行。切圜于庚。又從甲心過所截弧乙點。作甲己線。與庚己交於己。成甲己庚直角形。此己庚為乙庚弧正切線。己甲其正割線也。而甲己庚直角形。與圜内戊甲乙形相似。甲戊與戊乙。若甲庚與庚己。故以餘弦除正弦。半徑因之。得本弧正切。又戊甲與甲乙。若庚甲與甲己。故以餘弦除半徑。全數因之。得本弧正割。以戊甲餘弦。減甲庚半徑。得庚戊本弧正矢。此皆庚乙弧相當之線也。夫庚乙既為正弧。則乙丁為餘弧。作乙辛線為餘弧之弦。作丙丁線切圜于丙。為餘弧之切。甲乙引出之。遇于丙。甲丙為餘弧之割。成甲丙丁直角形。與圜内甲乙辛形相似。甲辛與辛乙。若甲丁與丁丙。得餘切。甲辛與甲乙。若丁甲與甲丙。得餘割。乙戊（即甲辛）正弦。減甲丁半徑。得辛丁餘矢。此又丁乙餘弧相當之線也。一正一餘。共有八線。若或以丁乙為正弧。即庚乙反為餘弧。其



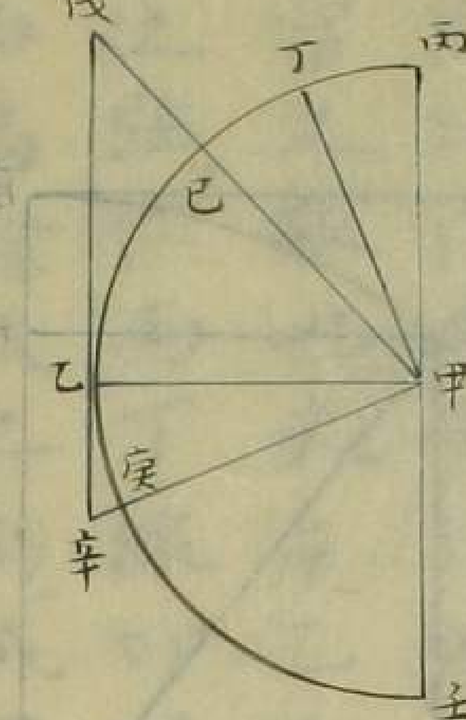
八線正餘之名亦互易。蓋此為正。彼自為餘耳

論曰。庚乙正弧之各線。為甲庚己。甲戊乙。兩句股形所成。乙丁餘弧之各線。為甲丁丙。甲辛乙。兩句股形所成。而甲庚己形。與甲丁丙形相似。（一為順句股 一為倒句股）又圜内之乙甲辛。甲戊乙。二句股形。俱自相似。亦與甲丁丙。甲庚己二形相似。是庚乙弧相當之

線。成相似之直角形四。設算可以用正。亦可以用餘。是一弧而能兼用八線。比八線表所由名也

按表中不列矢線者。以矢線用正餘弦減半徑即得。且不常用。故省之。又按割圓之難。全在求正弦。若切割線。俱以比例得之

附求割線省法 用加減算



如乙巳弧為二十度。其切線乙戊。求割線甲戊。法先以餘弧巳丙七十度。半于丁。得丁巳三十五度。丁丙等。次以戊乙切線引長之。令與戊甲等。作甲戊辛兩腰等三角形。而乙庚弧。必與丁丙等。即查乙庚弧之切乙辛。并乙戊。得戊辛。即甲戊割也

解曰乙庚弧何以與丁巳弧等。蓋甲辛戊既為兩腰等三角形。則甲角之巳庚弧。必為丙巳餘弧也巳壬之半。壬庚與巳庚等。而庚點居巳壬弧之中。夫丙巳與巳壬并。等兩直角。則巳庚弧之不滿直角者。必為丙巳之半。今丙巳既半于丁。則以丁巳益巳庚。丁甲庚必為直角。而乙甲丙亦直角也共用乙甲丁角或丁乙弧則丙巳與乙庚等

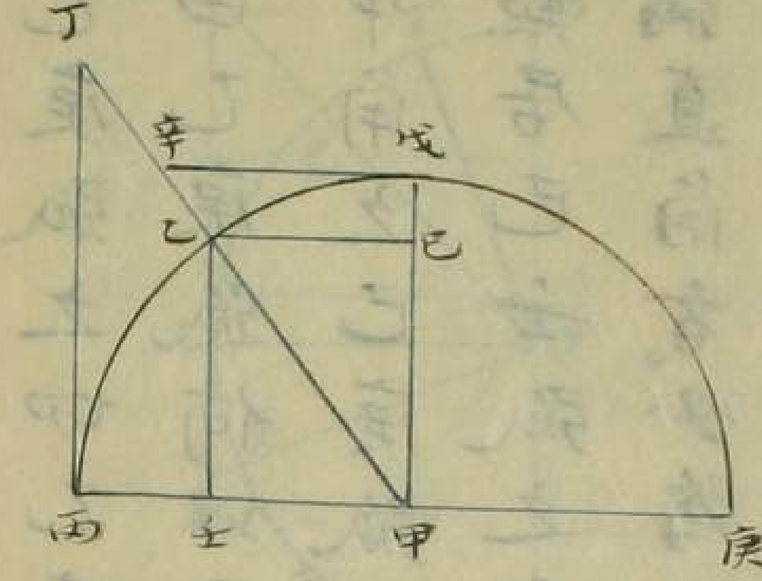
求矢線　餘弦減半徑。得正矢。正弦減半徑。得餘矢

求切線　餘弦除正弦。半徑因之。得正切。正弦除餘弦。半徑因之。得餘切

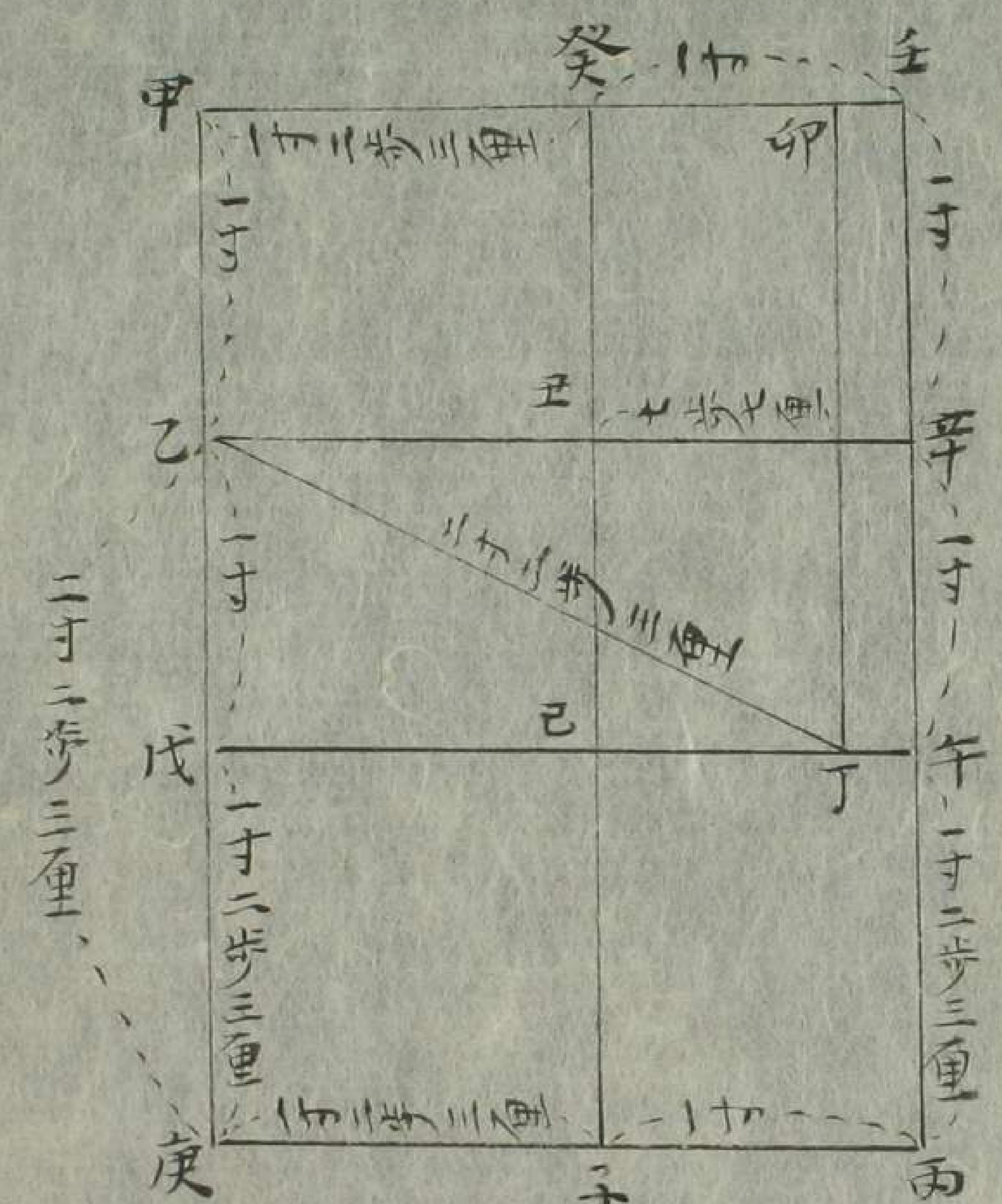
求割線　餘弦除半徑。半徑因之。得正割。正弦除半徑。半徑因

之得餘割

按圜内弦矢二線。當正弧初度則無。九十度極大。即半徑。圜外切割二線。當正弧初度亦無割線。即半徑。至九十度俱極大。且切與割平行。不能相遇。名曰無窮之度。然至此亦無切割之可言矣。惟將近九十度點。有極大之切割線定八線正餘之界



庚戊丙半圓。甲為心。戊丙為象限。設丙乙正弧。在九十度内。則乙壬為正弦。壬丙為正矢。甲丁為正割。丙丁為正切。其戊乙餘弧。乙己為餘弦。己戊為餘矢。甲辛為餘割。戊辛為餘切。若設庚戊乙為正弧。在九十度外。亦以乙壬為正弦。丁丙為正切。甲丁為正割。壬丙為正矢。而庚壬亦為正矢。又名大矢。其餘弧仍用戊乙（非乙丙）在庚戊象限之外。乙己為餘弦。戊己為餘矢。戊辛為餘切。甲辛為餘割。蓋乙壬正弦。為丙乙庚乙兩弧共用。故總以戊乙為餘弧也。凡算三角形。取用正餘諸線。以此為準



癸
一寸
壬
甲
一寸二歩三重
卯
一寸
一寸
丑
七歩七重
乙
辛
一寸
二寸二歩三重
二寸二歩三重
己
戊
午
丁
一寸二歩三重
一寸二歩三重
一寸二歩三重
一寸
庚
子
丙