曆算全書

方圓冪積 一卷
幾何補編 卷一至卷三

第九冊

方圓冪積說

曆書周徑率。至二十位。然其入算仍用古率。十一與十四之比例本祖冲之徑七周二十二之密率豈非以乘除之際。難用多位歟。今以表列之。取數殊易。乃為之約法。則徑與周之比例。即方圓二冪之比例。徑一則方周四圓周三一四一五九二六五。而徑上方冪與員冪。亦若四與三一四一五九二六五。尾數八位。並以表為用亦即為立方立圓之比例。同徑之立方與圓柱。若四與二一四有奇。則同徑之立方與立員。若六與三一四有奇殊為簡易直截。癸未歲。匡山隱者毛心易乾乾。偕其壻中州謝野臣。惠訪山居。共論周徑之理。因反覆推論方員相容相變諸率。庚寅在吳門。又得錫山友人楊崑生定三。方員訂註圖說。益覺精明。甚矣學問貴相長也。

兼濟堂纂刻梅勿菴先生曆算全書

方圓冪積一卷

宣城梅文鼎定九著　男以燕正謀叅　孫成玉汝
玕成肩琳

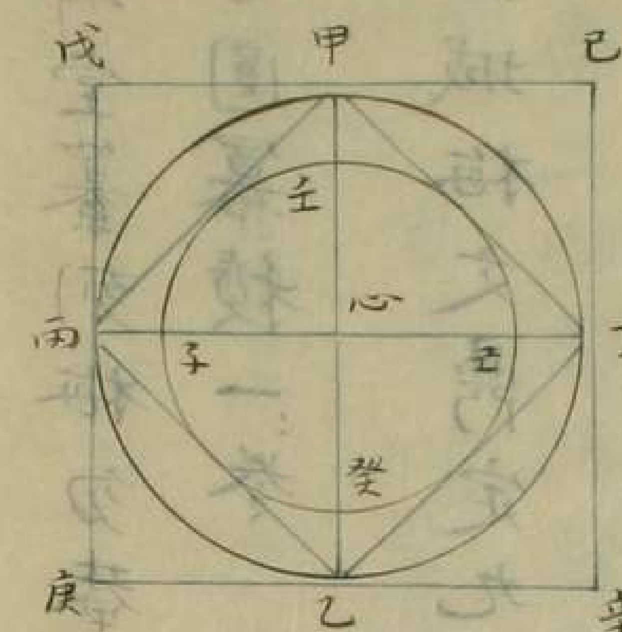
栢鄉魏荔彤念庭輯　男乾敩一元
士敏仲文
士説崇寬同校

錫山後學楊作枚學山訂補

方圓相容

新法曆書曰。割圓亦屬古法。蓋人用圭表等測天。天圓而圭表。直。與圓為異類。詎能合歟。此所以有割圓之法也。新法名為八

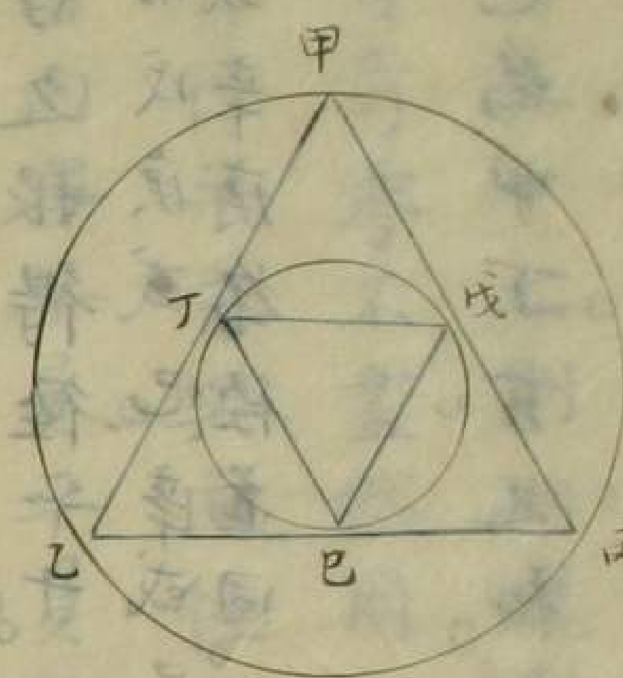
線表云。
又云徑一圍三。絕非相準之率。然徑七圍二十二則盈。徑五十圍百五十七則朒。或詳繹之則徑一萬。圍三萬一四五九。雖亦小有奇零不盡。然用之頗為相近。
今算得平方與同徑之平圓。其比例若四。。與三一四五九。
平方內容平員。平員內復容平方。則內方與外方。內員與外員之冪。皆加倍之比例。



假如戊己庚辛平方。內容甲乙丙丁員。員內又容甲乙丙丁小平方。小方內又容壬丑癸子小平員。如此遞互相容。則其冪積。皆如二與一也

假外大平方戊己庚辛之積一百。則內小平方甲丁乙丙之積必五十。平員亦然。
若求其徑。則成方斜之比例。大徑如斜。小徑如方。
假如內小平方積一百。以甲丁或丙乙為徑。甲丙或丁乙並同。開方求一百之根。得徑一十。其外大平方積二百。以甲乙或丁丙為徑。開方求二百之根。得徑一十四一四有奇。或用戊庚或己辛或己戊或辛庚為徑並同。
甲乙為甲丁方之斜。故斜徑自乘之中。與其方中。若二與一。而其徑與斜徑。若一十與一十四一四奇也。折半則為五與七。七奇。故曰方五則斜七有奇也。

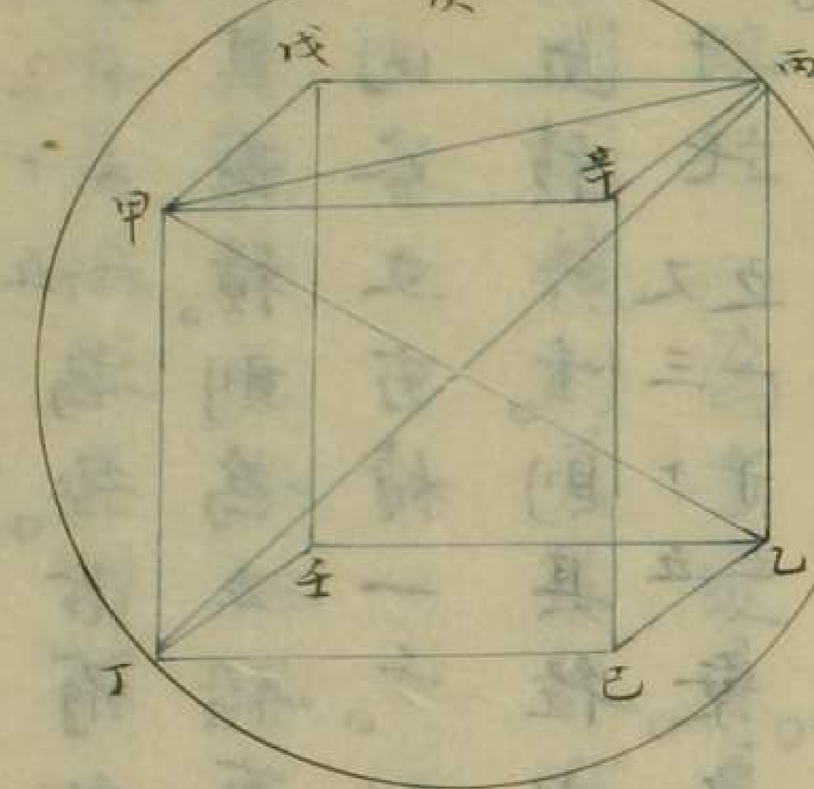
三邊形內容平員。平員內又容三邊。則其中之比例為四與一。



甲乙丙三邊形。內容丁戊己平員。平員內又容丁戊己小三邊。則內小三邊形為外大三邊形四之一。內外兩平員之中。其比例亦為四與一。

若有多層。皆以此比例遞加。

渾員內容立方。立方內又容渾員。如此遞互相容。則外員徑上中。與內員徑上中。為三倍之比例。外立方與內立方之徑中亦然。丙庚丁渾員。內容丙甲丁乙立方。丙戊及戊甲皆立方邊。丙辛及甲辛並同。丙乙及甲丁等。亦同。丙戊甲辛為立方面。餘六面並同丙甲為方面斜線丙丁。為立方體內對角線。即渾員徑乙甲同。其辛壬及己戊皆亦對角。若作線亦同丙丁及甲丁等又皆為立楞。戊壬及辛己同



解曰。立方面上斜徑之中。為方中之倍。句股法也。斜為弦。方為句。又為股併句股寔。成弦寔。故倍方中。即成斜徑之中。又以斜徑為股。立方之立楞為句。求得立方體內。兩對角之斜徑為弦。此弦寔內。有股寔。即面上斜徑之中。為方中有二。有句寔。即立楞之中。立楞原即方邊。故其中即立方面中。共得方中三。而此兩對角斜徑。即渾員之徑內小員徑。又在立方體內。即以方徑為徑。其徑之中。即立方面也。故曰三倍比例也。

立方内又容立員。則内員径。即立方之径。
若求員径。則外径大于内径。若一十七有奇。與一十。
内径之巾百。開方得一十。為径。則外径之巾三百。開方得一十
七又三十五之一十一為径。若有幾層互容。皆以此比例。遞加即得。
若求其體積。則為五倍有奇之比例。若有多層。亦以此比例遞加。
假如内容立方積一千。則外大立方積五千一百九十四有奇。
觧曰。立積一千。則其径巾一百。而外大立積之径巾三百。又以
径一十七又三十五之一十一乘之。得五千一百九十四又七之二。此言大
方積。又在圓上渾員之外。
積之比例
立方同径之立員。其比例為六〇〇與三一四

立方同径之員柱。其比例為四〇〇與三一四
員柱與同径之立員。其比例為三與二
方圓周径相求
同積較径 為方變員。員變方之用。
凡方圓同積。則員径大。方径小。其比例若一一二八三十九。與
一〇〇〇〇〇
觧曰。員径一一二八三七九。則方径一〇〇〇〇〇也。
法曰。有員径求其同積之方径。當以一〇〇〇〇〇乘。以一
一二八三七九除。
有方径求其同積之員径。當以一一二八三七九乘。以一〇〇
〇〇〇〇除。

凡方員同積。則員径上平方。與方径上平方。其比例若四〇〇
〇〇〇〇〇〇與三一四一五九二六五。
解曰。員径自乘四〇〇〇〇〇〇〇〇則方径自乘三一四一
五九二六五。
法曰。有員径。求其同積之方径。當以三一四一五九二六五乘
之。四〇〇〇〇〇〇〇〇除之。得數。平方開之得方径。
有方径。求其同積之員径。當以四〇〇〇〇〇〇〇〇乘。三一
四一五九二六五除。得數。平方開之得員径。
凡方員同積。則員径與方径。若一〇〇〇〇〇〇與〇八八六
二二六。
解曰。員径一〇〇〇〇〇〇則方径八八六二二六也。

法曰。有員径。求同積之方径。以八八六二二六乘員径一〇〇
〇〇〇〇除之。即得方径。
有方径。求同積之員径。以一〇〇〇〇〇〇乘方径。八八六二
二六除之。即得員径
約法
以一一二八三七九乘方径。去末六位。得同積之員径。
以〇八八六二二六乘員径。去末六位。得同積之方径」
同積較周
凡方員同積。則員周小。方周大。其比例若一〇〇〇〇〇〇與
一一二八三七九。亦若八八六二二六。與一〇〇〇〇〇〇
解曰。員周一〇〇〇〇〇〇則方周一一二八三七九也。

方周一〇〇〇〇〇〇則員周八八六二二六也。
約法
以一一二八三七九乘員周。去末六位。得同積之方周。
以〇八八六二二六乘方周。去末六位。得同積之員周。
凡方員同積。則其徑與徑。周與周。為互相視之比例。
解曰方周與員周之比例。若員徑與方徑也。
論曰。凡同積之周。方大而員小。同積之徑。則又方小而員大。所
以能互相為比例。
約法
以方周乘方徑為實。員周除之得員徑。若以員徑除實。亦得員
周。

以員周乘員徑為實。方周除之得方徑。若以方徑除實。亦得方
周。皆用異乘同除。例如左。

一	員周一〇〇〇〇〇〇	方周一〇〇〇〇〇〇
二	方周一一二八三七九	員周〇八八六二二六
三	方徑〇二八二〇九四七五	員徑〇二八二〇九四七五
四	員徑〇三一八三〇九八八	方徑〇二五〇〇〇〇
	積七九五七七四七〇〇〇〇〇〇	積六二五〇〇〇〇〇〇〇〇

一	員徑一〇〇〇〇〇〇	方徑一〇〇〇〇〇〇
二	方徑〇八八六二二六	員徑一一二八三七九
三	方周三五四四九〇四	員周三五四四九〇四
四	員周三一四一五九二	方周四〇〇〇〇〇〇

積七八五三九八二六〇〇〇〇　積一〇〇〇〇〇〇〇〇〇〇〇〇〇

第四率並與一率乘。得四倍積。四除之得本積。

論曰。以上皆方員周徑互相求。乃同積之比例。方員交變周之。

即比例規變面線之理。

同徑較積較周　即方內容員。員外切方。

凡方員同徑。則方積大員積小。周亦如之。其比例若四〇〇〇

〇〇〇〇與三一四一五九二六五。

方徑一〇〇〇〇周四〇〇〇〇　積一〇〇〇〇〇〇〇〇

員徑一〇〇〇〇周三一四一五奇積〇七八五三九八一六

方徑二〇〇〇〇周四〇〇〇〇　積四〇〇〇〇〇〇〇〇

員徑二〇〇〇〇周六二八三一奇積三一四一五九二六五

凡徑倍者周亦倍。而其積爲倍數之自乘。亦謂之再加比例。按

時曆謂之平差

徑二倍。周亦二倍。而其積則四倍。徑三倍。周亦三倍。而其積九

倍。乃至徑十倍。周亦十倍。而積百倍。徑百倍。周亦百倍。而積萬

倍。皆所加倍數之自乘數。亦若平方。謂之再加也。

同周較積較徑

凡方員同周。則員積大。方積小。徑亦如之。其比例若四〇〇〇

〇〇〇〇與三一四一五九二六五。

方周一〇〇〇〇〇徑〇二五〇〇〇〇積六二五〇〇〇〇〇〇〇〇

員周一〇〇〇〇〇徑〇三一八三〇九八八積七九五七七四七〇〇〇〇〇

方周四〇〇〇〇〇徑一〇〇〇〇〇積一〇〇〇〇〇〇〇〇〇〇〇

員周四〇〇〇〇〇。 徑一二七三二三九五四積一二七三二三九五四〇〇〇。
論曰。周四則徑與積同數。但其位皆陞。皆視同數之位。今用百
萬為周。則積陞六位。成萬億矣。故雖同而寔不同。不惟不同。而
且懸絶。定位之法。所以當明也。
問位既大陞而數不變何耶。曰。周徑相乘。得積之四倍。於是四
除其積。即得所求平積。此平中之公法也。茲方員之周既為四。
則以乘其徑。而復四除之。即還本數矣。惟周數之四。或十或百
或千萬億無定。而除法之四定為單數。故無改數而有進位也。
又論曰。周四倍之。徑與周一之徑為四倍。其積則十六倍。所謂
再加之比例
渾圜內容立方徑一萬寸。求圜徑。
法以方斜一萬四千一百

四十二寸為股。自乘得二億為股實。以方徑一萬寸為勾。自乘
得一億為勾實。併勾股實為三億。為弦實。開方得弦一萬七千
三百二十。〇半寸。命為渾圜之徑
又以渾圜徑求圜。得五萬四千四百十四寸弱。周徑相乘。得
九億四千二百四十七萬六九九四寸為渾巾 四除渾巾。得
二億三千五百六十一萬九千二百四十八寸奇為大平圓巾。
即立方一萬寸外切渾圜之腰圜平巾也
圜柱積四萬。〇千八百十。〇億四三一八四九八四寸 以渾
圜徑。乘平圜巾得之
倍圓柱積。以三除之。得渾圓積二萬七千二百。〇六九五四五
六六五六寸

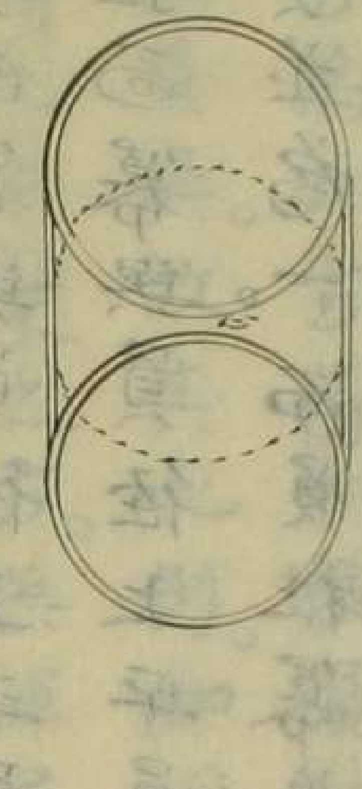
約法　立方徑一千尺。其積一十尺　外切之渾圜徑一十七
尺三二〇五　渾圜積二千七百二十〇尺六九五四　約為
二千七百廿一尺弱
試再用徑上立方求渾圜積法。即立方內求所容渾圜　以渾圜徑自棄再
棄。得渾圜徑上立方。以圓率三一四奇棄之得數。六除之得渾積
並同
立方與員柱若四〇〇與三一四奇同徑之員柱也。
立方為六方角所成。員柱為六員角所成。其所容角體並六。而
方與員異。故其比例。如同徑之同　此條為積之比例
員周上自棄之方。與渾員面冪若三一四奇與一〇〇。
渾員面冪與員徑上平方形。亦若三一四奇與一〇〇。

皆員周與徑之比例
渾員面冪與員徑上平員。若四與一。
員柱面冪與員徑上平員。若六與一。六員角之底皆外向。合成此數。
平員並為一。而員柱冪為其六倍。渾員冪為其四倍。渾員為員
柱三之二。即此可徵積之比例。如其面也。以上四條並面冪之比例。
渾員體。與員角體。若四與一。
渾員面既為平員之四倍。從面至心。皆成角體。故體之比例亦
四倍。
立方面與徑上平方。若六與一。六面故也
立方體與渾員體。若六〇〇與三一四奇。
渾員面與徑上平方。既若三一四奇與一〇〇。而立方面與徑

上平方。若六與一。平方同為一。。。而立方面為其六倍。渾員面為其三倍一四奇。故立方之面與渾員之面。亦若六。。與三一四奇也。而體之比例同面。故亦為六。。與三一四奇。

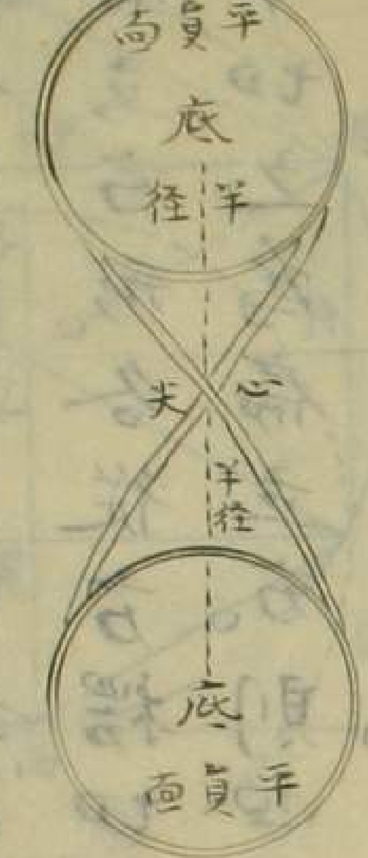
立員得員柱三之二

論曰凡員柱之面及底。皆立員径上平員也。旁周似員箭。亦如截竹。周圍並以員径為高。即員径乘員周冪也。為径上平員之四倍。與渾員面冪同積。半径乘半周得平員則全径乘全周必平員之四倍。合面與底共得平員之六倍。而渾員面冪原係平員之四倍。是員柱冪六。而渾員冪四也。而體積之比例。準此可知。亦必

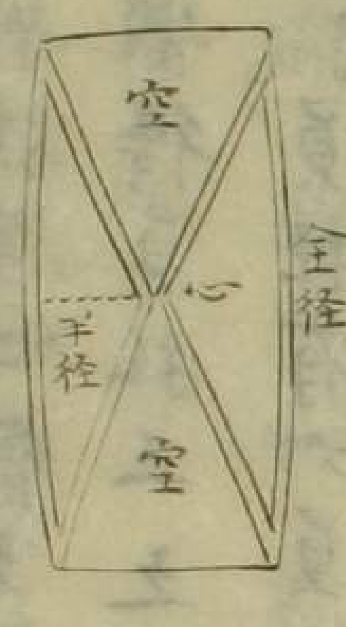


圓柱形

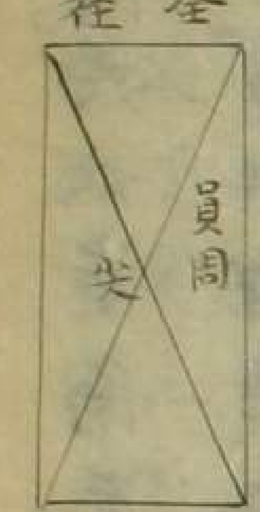
為三之二矣。三之二即六之四之半。問體積之比例。何以得如面冪。曰試於員柱心作員角體至面至底。成員角體二。皆以半径為高。平員為底。其餘則外如截竹。而內則上下並成虛員角。于是縱剖其一邊。而令員箭伸直。以其冪為底。以半径為高。成長方錐底濶如全径。直如員同。高如半径。錐只一點。此體即同四員角。或縱剖為四方錐。亦同。皆以同四分之一為底濶。以全径為底長。以半径為高。其體並同員角。何也。以周四之一乘全径。與半径乘半周同。故方底同員底。而其高又同。則方角同員角。合面底二員



圓柱內截兩圓角體



圓柱內截去兩圓角體之餘



長方錐形

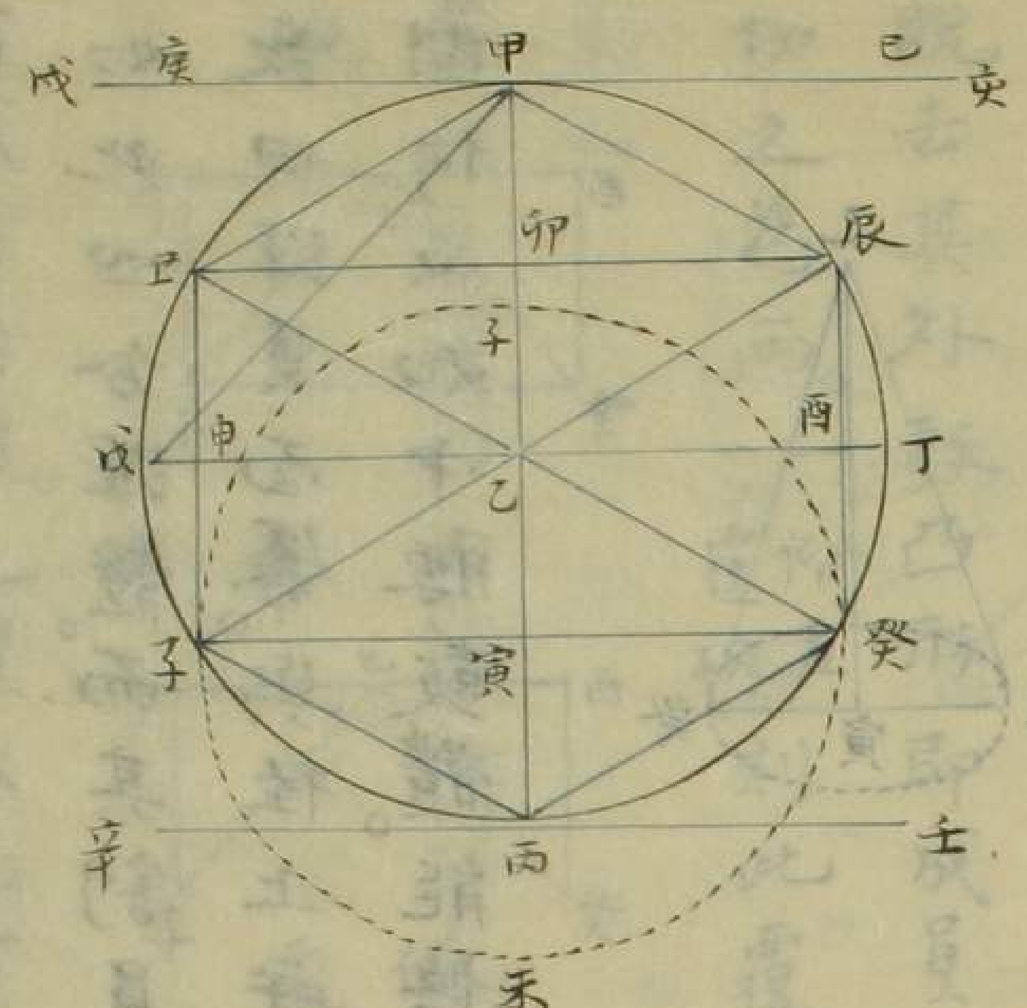
用。共六員角矣。而渾員體原同四員角。渾員面為底。半徑為高。作員錐。即同四員角。是員柱渾員二體之比例。亦三與二也。

員角體得員柱三之一　凡角體並同

準前論。員柱有六員角。試從中腰平截為兩。則有三員角。而員筩體原當四員角。今截其半。仍為二員角。或面或底原係一員角。合之成三員角。以為一扁員柱。然則員角非員柱三之一乎。若立方形。各從方楞切至心。則成六方角。皆以方面為底。半徑為高。從半徑平切之為扁立方。則四周之四方角。皆得一半。成兩方角。而或底或面原有一方角。亦是三方角合成一扁立方。而方角體亦三之一矣。

渾員體分為四。則所分角體各所衆之渾冪。皆與員徑上平員冪等。

甲戊丙丁渾員體。

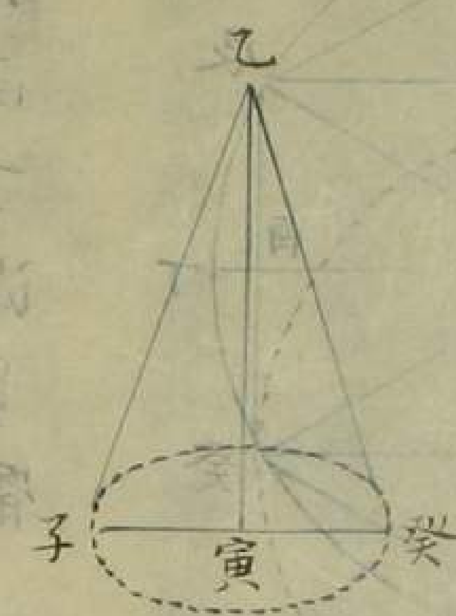


從壬乙辰乙癸乙子乙卯乙寅乙等各半徑。各自其渾冪透至乙心。而以半徑旋行而割切之。則成上下兩員角體。一甲卯辰壬乙。以甲壬卯辰割渾員之而為底。乙為其銳。此割員曲徑。自壬而甲而辰。居員周三之一。一丙癸寅子乙。以子丙寅癸渾員之割而為底。乙為其銳。此割員曲徑亦三之一。三百六十之一百二十。如此上下兩角體相等。皆居全渾體四之一。中腰成鼓形。而上下兩面並空。各成虛員角其外則周遭皆凸面。如壬戌子及辰丁癸之割員狀。此割員曲徑。自辰而丁而癸居員周六之一。為三百六十之六十

此鼓形體。倍大于上下兩角體。居渾員全體之半。若從戊乙丁腰横截之為二。則一如仰盂一如覆碗。而其體亦渾員四之一也。

如此四分渾體。而其割員之面冪。即各與員徑上之平員冪等。故曰渾員面冪。與徑上平員若四與一也。

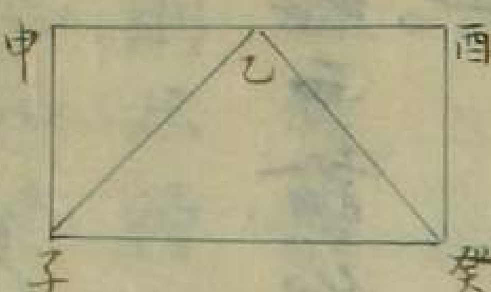
問何以知中腰鼓體。能倍大于上下兩角體。曰試于子丙乙癸角體。從子寅癸横切之。則成子未癸午小員面。為所切乙子寅癸小員角體之底。乃子寅小半徑。乘子未癸小半周所成也。然則以子寅小半徑。乘子未癸小半周。又以乙



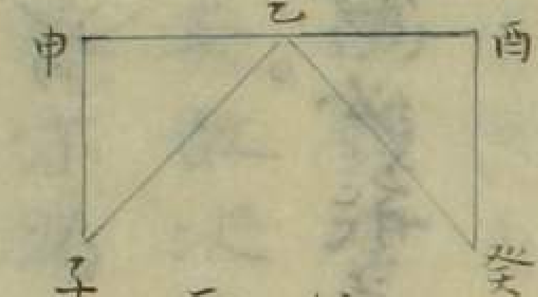
寅半半徑為高乘之。而取其三之一。即小角體矣。

試又于中腰鼓體。從壬子及卯寅及辰癸諸立線。周遭直切之。脫去其外鼓凸形。即成員柱體之外周截竹形。又從酉乙申横切之為兩。一仰盂一覆碗。則此覆碗體舉一式為例可直切斷而伸之。亦

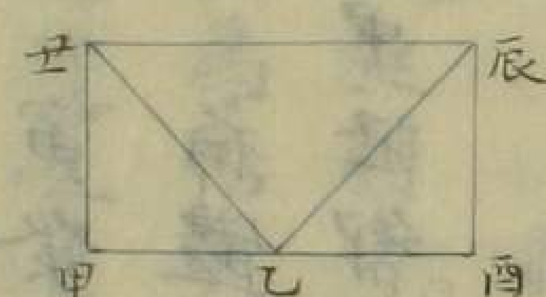
覆碗

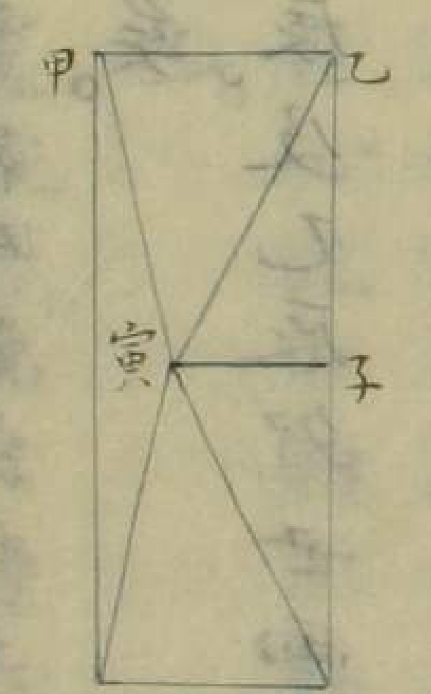


内形



仰盂

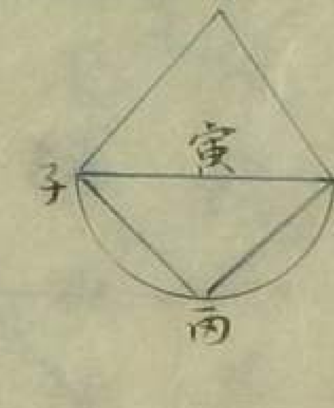




長方角體

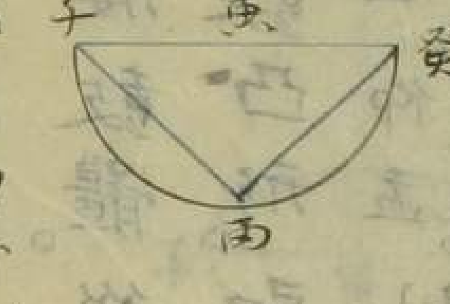
可成方角體。此體以乙寅半半徑。乘子未癸午小員全周為底。其形長方。又以小半徑子寅乙申即為高。而乘之。取三之一為長方角體。此長方角體。必倍大于小員角體。何也。兩法並以小半徑。

反半半徑。而次連乘。取三之一成角體。而所乘者一為小員全周。一為小員半周。故倍大無疑也



又丙癸寅子亦可成角體。與乙子寅癸等。覆碗體既倍大。則兼此兩角體矣。

準此而論。仰盂體必能兼甲丑卯辰及乙辰卯丑兩角體。亦無疑也。

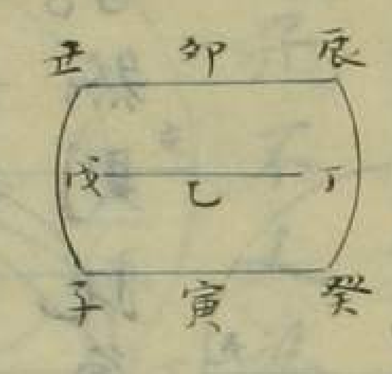


又角體內。既切去一小角體。又穵去一相同之小角體。則所餘者為丙癸寅子員底仰盂體。

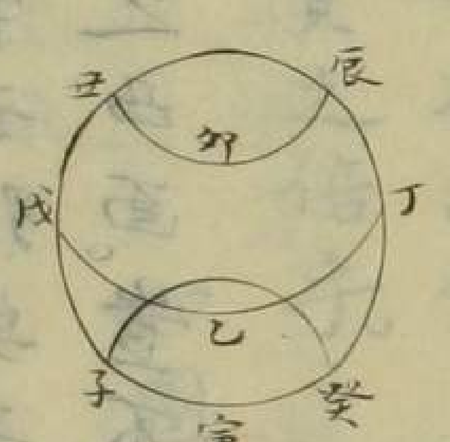
鼓體內既穵去如截竹之體則所餘者為內平如丑子及辰癸外凸如子

戊丑及辰丁癸之空圈體。而此體必倍大于員底仰盂體。何以知之。蓋

平視



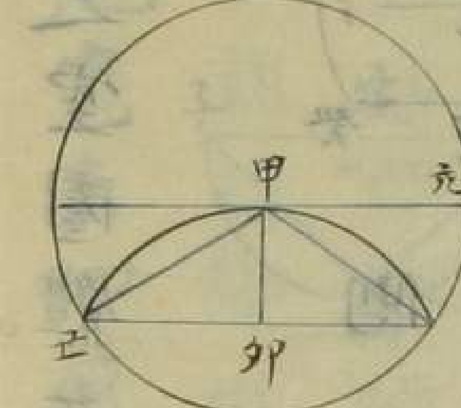
側視



而體並以半徑為平面。丑子與癸丙並同。並以員周六之一為凸面。而腰鼓之平面。以半徑循員周行。員底仰盂之平面。則以半徑自心旋轉。周行者。而頭全用。旋轉者。在心之一頭不動。而只用一頭。則只得其半矣。故決其為倍大也。準此而甲丑卯辰。亦為穵空之員覆碗體。而只得鼓體之半矣。由是言之。則上下角體。各得中腰鼓體之半。而鼓體倍大于角形。渾體平分為四。夫復何疑。曰渾體四分如此。真無纖芥之疑。體既勻分為四。則其渾體外

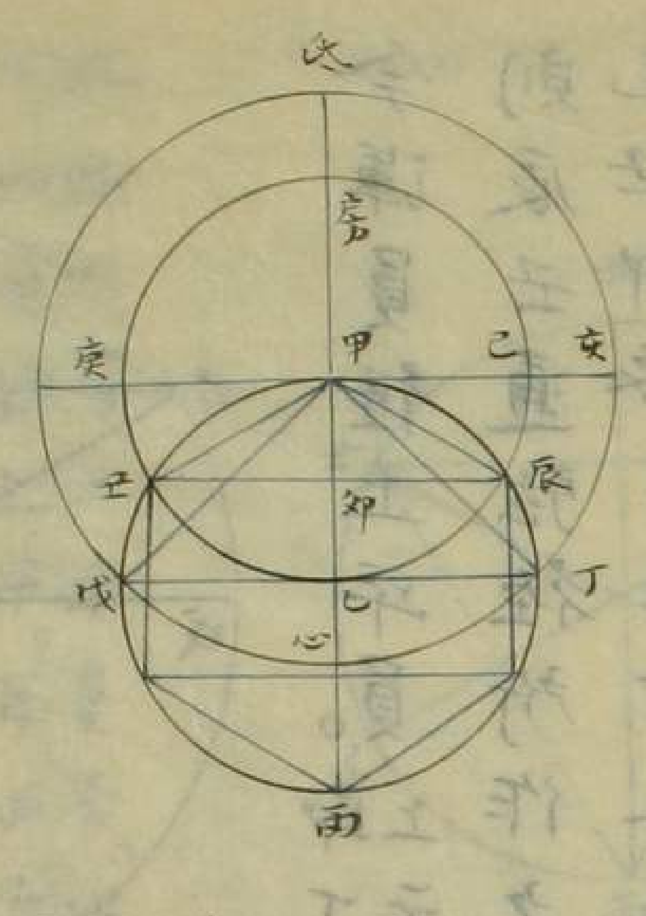
冪亦句分為四。亦無可復疑。但何以知此所分四分之一。必與
径上平員相等耶。曰此易明也。凡割渾員一分而求其冪。法皆
從其所切平面員心。作立線至凸面心。而以其高為股。員面心
至邊之半径為句。句股求其斜弦。用為半径。以作平員。即與所
割圓體之凸面等冪。

假如前圖所論上下両角體。從丑卯辰橫線切之。則以甲卯為
股。卯丑為句。求得甲丑弦。與半径同。以作平員。與丑卯辰甲凸
面等。然則此角體之凸面。豈不與径上平員等冪乎



甲亢半径。與甲丑同。以作丑亢平員。與甲丑卯辰凸面等
冪。

試又作甲戊線。為半径之斜線。甲乙與戊乙皆半径為句。為股故也。以為半径而
作平員。必倍大于半径所作之平員。而渾員半冪與之等。則渾
員半冪。不又為平員之倍乎。



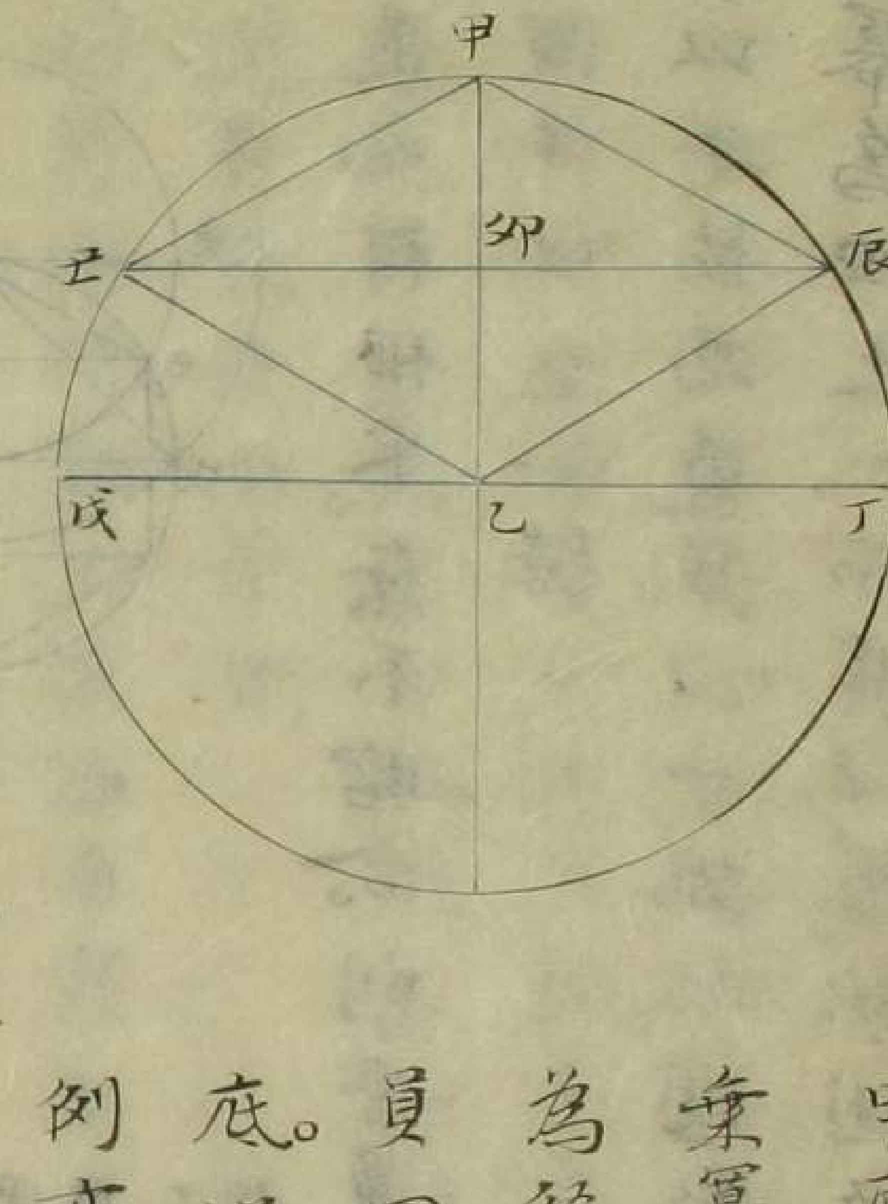
如圖
甲丑為半径。作乙庚房平員
與両戊甲平員等。亦與甲辰卯
丑割員凸面等。為
渾冪四之一也。
甲戊為半径。作戊心亥平員。與
甲丁乙戊半渾冪等。而倍大于
乙庚房。亦倍大于両戊甲平員。
則平員居渾冪四之一

如是宛轉相求。無不脗合。則平員為渾員冪四之一。信矣。

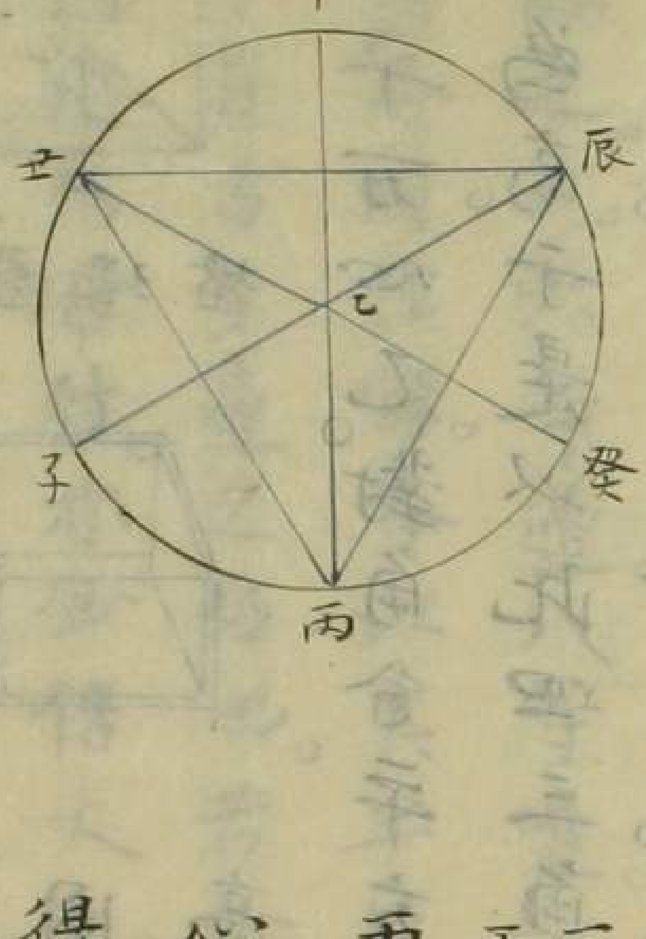
取渾冪四之一法

當以半径為通弦。以一端抵圓径之端為心。旋而規之。則所割
渾冪為四之一。而其渾冪。與圓径上平員冪等

甲辰即丁乙之自冪一百。辰卯之自乘冪七十五。如四與三。則辰壬通弦為徑以作平員。亦丁戊全徑上平員四分之三也。大小兩平員各為底。以半徑為高而作員角體。其比例亦四與三也。



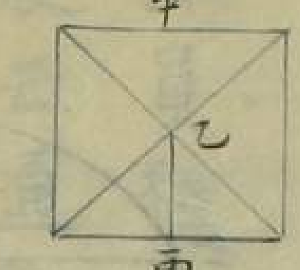
今渾員徑上平員。即丁戊徑上平員。所作之員角體。既為渾積四之一。則辰壬通弦徑所作之員角體。即渾體十六之三矣。即甲壬卯辰角體及乙壬卯辰角體之合。若以壬辰通弦上平員為底。半半徑為高。而作角體。即渾體卅二之三。合渾體為四。又法



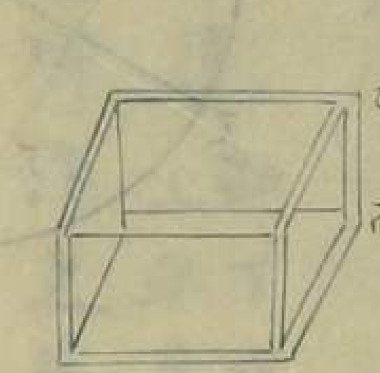
甲乙丙渾員體。從員周分為三。一壬甲辰。一辰癸丙。一丙子壬。各得周三之一。又從辰從丙從壬。依各半徑辰乙丙乙壬乙皆是。至乙心。旋而切之。則成三角體者三。各得渾體四之一。一辰甲壬乙。一壬子丙乙一丙癸辰乙。說見前。則其所餘亦渾體四之一也。此餘形有三平員面。以辰壬壬丙辰丙為員徑。而並空至乙心。如員錐之界。有兩凸面。以辰壬壬丙辰丙之員周為界以乙為頂。皆弧三角形。三角並銳。兩凸面各得渾員界八之一。按辰壬即一百二十度通弦也。準前論。以此通弦為圓徑作平員為底。半半徑為高。而成員角體。此員角體積。即為渾員體積三十二分之三。即先所論員角體八之三。

若依此切渾員體。成半平半乃之體。其積為渾積三十二之五。
即員角體八之五
環堵形面冪　錐形面冪
有正方正員面。欲於周作立圓之堵牆。而冪積與之倍。
法於方面取半徑為高即得。

平方



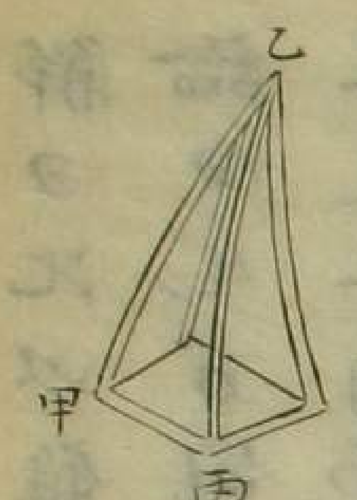
方圜環堵



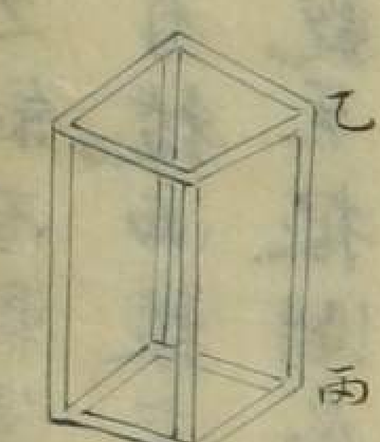
甲乙丙平方。於其周作立起之方圜。形如環堵。取平方乙丙半徑為高。則方圜面冪。倍大於平方。

論曰。從平方心乙。對角分平方為四。成四三角形。並以方根為底。半徑為高。于是以此四三角形立起。令乙銳上指。則皆以乙丙半徑為高。而各面皆半冪。故求平方以半徑乘周得冪也。然則依方周作方牆。而以半徑為高。豈不倍大於平方冪乎。準此論之。凡六等邊。八等邊。以至六十四等邊。雖至多邊之面。而從其各周作牆。各以其半徑為高。則其冪皆倍于各平冪矣。然則平員者多邊之極也。若於其周作立圜如環。而以其半徑為高。則環形冪積。亦必倍大於平員

有方錐。員錐。於其周作圜牆。而冪積與之倍。
法於錐形之各斜面。取其至銳之中線。如乙丙以為環牆之高。即得。



方錐亦曰角體



方牆如環堵。底用方周。高如乙丙。即斜面自銳至底之斜立中線。

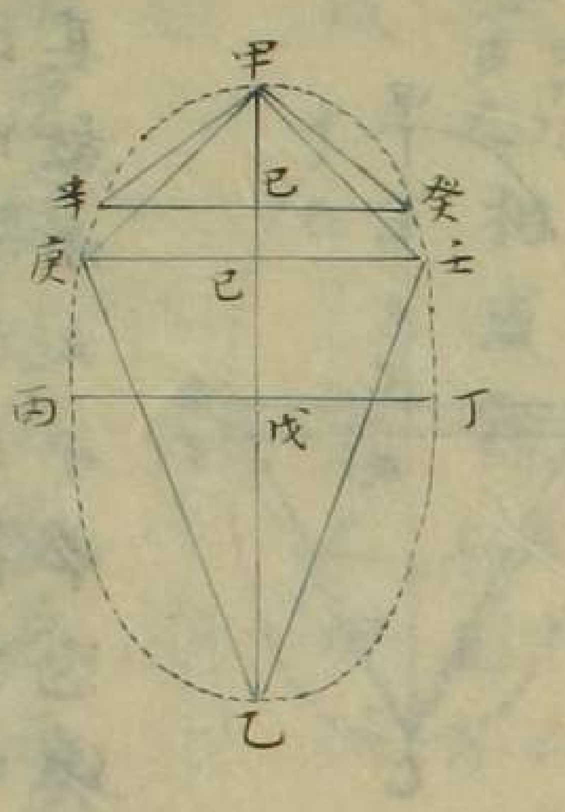
觧曰此以錐體之斜面較冪也。
論曰凡方錐皆有稜。而稜交于銳。各成三角面而斜立。從此斜
立之三角面。自銳至根濶處。平分之得中線。而于是自稜剖之。
成四三角面。而植之。則中線直指天頂。而各面皆圭形。為半冪
故凡錐體亦可以中線乘半周得冪也。然則于底周作方牆。而
以中線為高。四面補成全冪。豈不倍大乎。
準此論之。凡五稜六稜以上。至多稜多面之錐體盡然矣。而員
錐者。多稜多面之極也。則以其斜立線為高而自其根作員環。
則其員環之冪。亦必倍大于員錐之冪。
前條所論切渾員之算得此益明。蓋員仰盂員覆碗。及空空之
鼓形。其體皆一凸面。一平面。相合而成。其凸面弧徑皆割渾員

圜周六之一。其平面之濶。皆半徑。然而不同者。其内面空空之
平冪。一為錐形。仰盂覆碗之内空如笠。一為環形也。鼓體之内空如截竹。准前論空
空之環冪。必倍大於錐形之冪。則其所負之割渾員體。亦必環
形。所負倍大於錐形。而空空之鼓體。必能兼員覆碗員仰盂之
二體

橢圓算法 訂曆書之誤

偶查橢圓求體法。見其截小分之法有誤。今以數考之。

假如橢圓形。長徑為一千四百尺。短徑七百尺。大分截長徑一千〇五十尺。



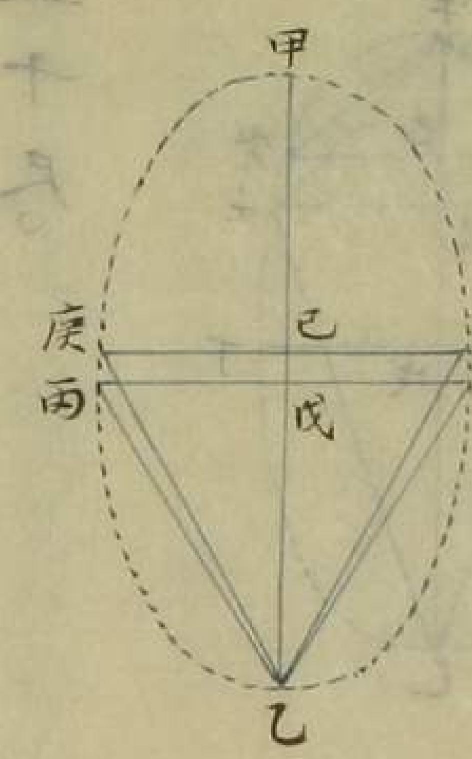
甲己三百五十。戊乙七百。相并。得一千〇五十。以此乘。

己乙一千〇五十尺。以此除。

兩數相同。

右依曆書。先求得庚壬甲圓角形。為第三率。再用截大分軸己乙為法。為第一率。以截小分軸甲己。并戊乙半長徑為第二率。求得小分之容。與圓角形等。夫小分之容。形外為弧線。圓角之

容。形外為直線。小分必大于圓角。而今等。是不合也。況自此而截小分漸小。則乙已大分軸。反大于甲已小軸。及戊乙并之數。而求小分之容。反將更小于圓角矣。有是理哉（小分漸小如辛癸甲則其甲已小于已戊而已乙者已戊與戊乙并也則其數亦大于甲已與戊乙并矣）



又如截大分長七百二十分。已乙為其軸。甲已為其小分軸。六百八十分

依曆書法。甲已小分軸（六百八十）為一率。甲乙長径（一千四百）并戊乙短径。（七百共二千二百）為二率。求到庚壬乙圓角體為三率。則所得四率。為大分之容者。比圓角容大三倍有奇。亦恐無是理也。何也。圓角在圓柱形為三分之一。而揩形必小于柱形。不宜有三倍之比例也。（雖壬庚畧小于丙丁在中腰相近。可以不論）

今試求之。（用第一圖）依勿庵改法。

假如截已乙大分軸一千〇五十尺。求庚已壬平圓面。法先求庚已。依勿庵補法以已戊（三百五十尺）自乘（一十二萬二千五百尺）與甲戊（七百尺）自乘（四十九萬尺）相減餘（三十六萬七千五百尺）。開方。得已庚相當之原數。再以丙戊（三百五十尺）乘之。甲戊（七百尺）除之。為已庚寔數。倍之為庚壬線。

再以壬庚線上方。變為平員。今用簡法（因長径甲乙。與短径丙丁。原是折半之比例故）也。竟以減餘（三十六萬七千五百尺。）命為庚壬線上方。以十一乘之得（四百〇四萬二千五百尺）。又以十四除之。得（二十八萬八千七百五十尺）。為庚壬線上所截揩體之平圓面。

法以平圓面。各乘其大分小分之軸。一千〇五十尺三百五十尺皆成圓柱形。乃三除之。為大小分內所容之大小圓角形。再以長徑一千四百尺乘大圓角為實。小軸三百五十尺除之。為所截楕形之大分。以長徑一千四百尺乘小圓角為實。大軸一千〇五十尺除之。為所截楕形之小分。

今用簡法置平圓面三除之。得九萬六千二百五十尺以小分軸三百五十乘之。得庚甲壬小圓角形。三千三百六十八萬七千五百尺置小圓角。四因三除之。得四千四百九十一萬六千六百六十六尺三之二為所截小圓分。

又置圓面三除之積。九六二五〇以大分軸一千〇五十尺乘之。得庚壬乙大圓角形。一億〇一百〇六萬二千五百尺

置圓角形一〇一〇六二五〇〇用四因之。得四億〇四百二十五萬尺為所截大圓分。

小圓分。大圓分。兩形并之。共四億四千九百一十六萬六六六六為楕形全積。

另求楕形全積

置短徑七百自乘。得四十九萬。以長徑一千四百乘之。得六億八千六百萬以十一因之。二十一除之。得三億五千九百三十三萬三三三為真楕圓全積。

以真楕圓積。與兩截形并相較其差為九十分之一而弱。

若用曆書法。求得截小分。二千三百六十八萬七千五百尺。與小圓角同。截大分。六億〇六百三十七萬五千為大圓角之六倍相并得六億四千〇六萬二千五百尺為楕圓全積。與楕圓真積相較。其

差更甚。
如是轉輾推求。則知楕體大截分不可筭。今别立法。
凡楕體。皆先如法求其全積再如法求其小分截積。以小分截
積減全積。餘為大分截積。此法無弊可存

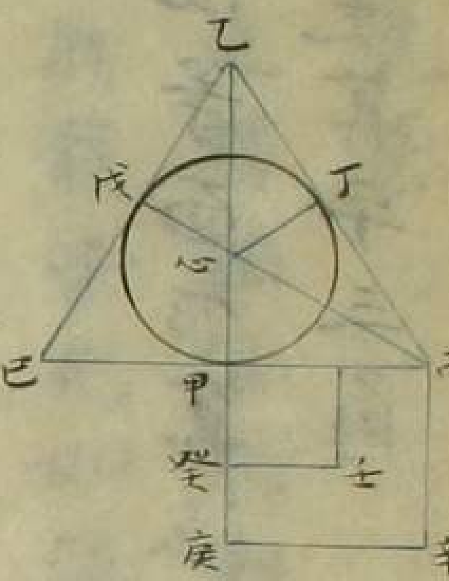
兼濟堂纂刻梅勿菴先生曆算全書

幾何補編　卷一

宣城梅文鼎定九著　男以燕正謀纂　孫瑴成玉汝
玕成肩琳
栢鄉魏荔彤念庭輯　男乾敳一元
士敏仲文
士説崇寛同校
錫山後學楊作枚學山訂補

四等面形算法

先算平三角



平三角形三邊同者。求得中長線乙甲其三之一。即內容平圓半徑。心甲其三之二。即外切圓之半徑。乙心或心丙

又法。以邊半之。丙甲自乘得數。丙庚方取其三之一。開方。甲壬小方得容圓之半徑。壬癸。或甲癸。俱與心甲等。又取自乘數。丙庚方三分加一。丙庚方加壬甲小方并而開方。得外切圓之半徑。丙心

論曰。三邊角等。則半邊之角六十度。丙心甲角其餘角三十度。心丙甲角之正弦。心甲外切圓半徑如全數。丙心其比例為一與二。故內容圓半徑。心甲正得外切圓半徑丙心之半也此論可解前一條

形內丙心甲與乙心丁丙小句股形相等。又並與乙甲丙大句股形相似。何則。乙角丙角並分原等角之半丁甲等為正角。則三角皆等而邊之比例等。而大形之句丙甲既為其弦乙丙之半。則小形之句。心丁亦即心甲自必各為其弦心乙亦即心丙之半。故知心甲原同心丁為乙甲之半也

心甲既為心丙之半。則心甲一。心丙必二。而丙戊必三矣。乙甲同何也。以乙心與丙心同為二。心甲與心戊同為一也。聯心乙二與心甲一。豈不成三

今以內圓半徑為股。心甲外圓半徑為弦。心丙三邊之半為句。丙甲成心甲丙句股形。則心丙自乘內。弦巾。有心甲股巾。及甲丙句巾。而自乘之積也。而心甲股與心丙弦。既為一與二之比例。則心甲之冪一。心丙之冪必四也。以心甲股冪一。減心丙弦冪四。其餘積三。即丙甲句冪矣。故心甲之冪一。則丙甲之冪三。心丙之冪四。今

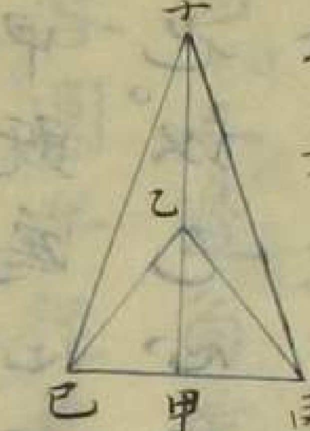
先得邉。故以丙甲三為主。而取其三之一。為心甲股冪。又於丙甲三加三之一為四。即成心丙弦冪也此論可解後一條

以上俱明三等邉平面之比例

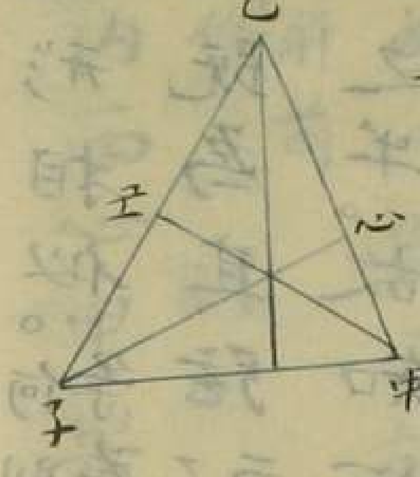
今作四面等體求其心

法自乙頂向子向甲剖切之。成乙子甲三角面

合形



剖形



心者面之心。中者體之心。前圖所謂心者。面之心也。今所求者體之心。即後圖所謂中也。故必以剖而後見

次求甲壬線

乙子邉平分于壬。從壬向甲得垂線。此壬甲垂線。在體中必小於乙甲在外之垂線。故乙甲如弦。壬甲如股。乙壬如句也。法以乙甲弦自乘。內減乙壬句冪。餘為股冪。開方得壬甲

又法。準前論。乙壬之冪三。即丙甲半邉故。皆則乙甲之冪九。乙甲三倍大于心甲。故心甲冪一。則乙甲冪九。以三減九。餘六。亦即甲壬股冪矣。以開方得甲壬。

提法。倍原半邉甲丙自乘數。以開方。得甲乙中垂線。或半原邉丙巳自乘之數。開方。亦得甲壬。

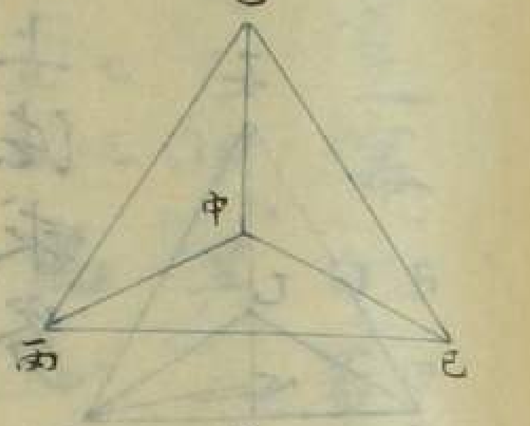
丙甲之冪三。乙壬同則甲壬之冪六。而丙巳之冪十二也。甲壬與丙巳冪積之比例。為一與二

次求心中線

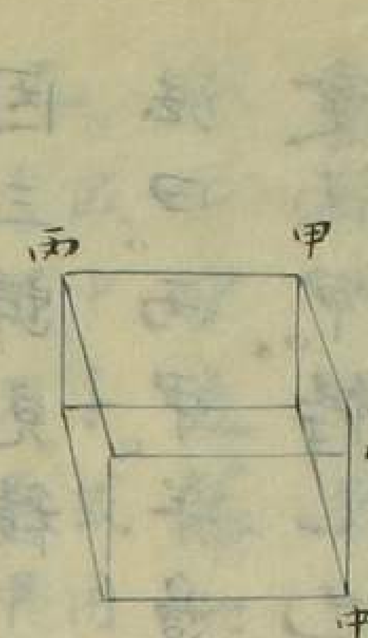
捷法。但半心甲自乘。即心中冪

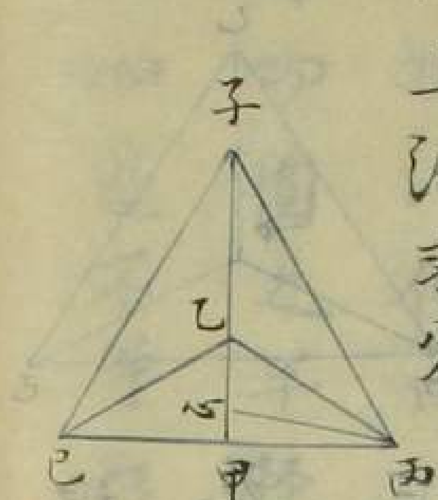
論曰。心甲與心中。猶甲壬與乙壬也。甲壬冪與乙壬冪。為六與三則心甲與心中之冪。亦如二與一

又提法。心中之冪一。心甲之冪二。則乙丑之冪六。即丙甲而心丙之冪八。亦即乙心俱倍數
但以半邊乙丑丙甲或之冪。取六之一。即心中冪。開方得心中。即四等面形內容小渾圓之半径也。心中線者。即各面之心至體心也。故為內容小渾圓半径。
以心中之冪一。句加乙心之冪八。股并之為弦冪九。開方得中乙。或中子。或用前總圖則為甲丙。為甲巳。並同是即四等面形外切渾圓之半径也。
外切圓之冪九。中乙。內切圓之冪一。心中得其根之比例為三與一。
故四等面形內容渾圓之径一。則其外切渾圓之径三
又提法。但以乙丑半邊之冪加五。即二之一。為中乙子或中等冪。開方得外切圓之半径。九。蓋乙丑之冪六。中乙之冪九。其比例為一有半也
此四邊不等形。又為三角立錐形。為四等面形四之一。各自中切至邊線成此形其底三邊等。即四等面形之一面。其高為中心。即內容小渾圓之半径其中乙等三楞線三倍大於中心之高。即外切渾圓之半径

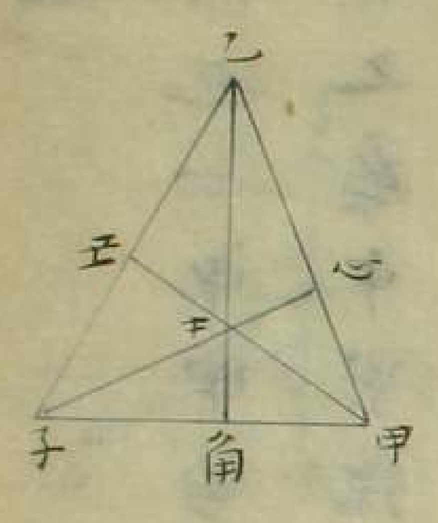


取四等面形全積提法
先取面冪。即前圖乙巳丙平面。依前比例求其冪 以內容圓半径心中乘之得數四因。三歸。見積
法曰。丙甲半邊之冪三。則甲乙中長之冪九開方得中長甲乙以乘丙甲。得乙巳丙三等邊之冪積即四等面形之一面也
次求本積四之一。即各面輳心剖裂之形。如右圖
丙甲半邊之冪六。則中心之冪一。開方得中心高。以乘所得面冪。而三分取其一。即為四等面形四之一。於是四乘之。即為全

積也
又捷法。以丙甲乘心甲。又以中心乘之。即得本形四之一。即同三除。
以心甲為乙甲三之一故也


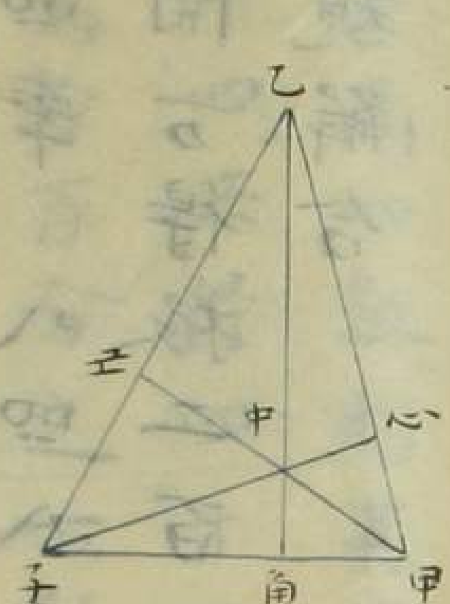
此帶從小立方形。與右圖四等面形四之
一等積
又捷法。以丙已全邊亦即丙乙。乘乙心。再以中
心乘。即得本形全積。乙心為心甲之倍數。丙已為丙甲之倍數。用以相乘。則得丙甲乘心甲之四倍數也。
邊設一百
依上法求容


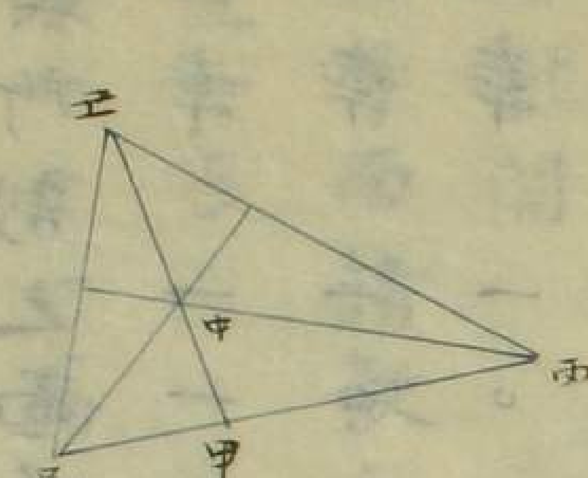
丙已邊一百。其冪一萬　丙甲半邊五十。其
冪二千五百。三因之。得七千五百。為乙甲中

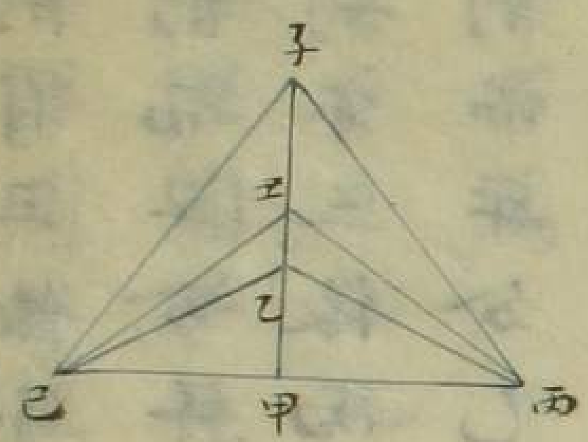
垂之冪。丙甲股冪。減丙已弦冪。得句冪也。丙已。亦即丙乙　平方開之。得八十六六〇二五
為乙甲。其三之一。得二十八八六七五為心甲。其三之二。得五十
七七三五〇。為心乙。　又置丙甲冪二千五百。取六之一為心中冪。
得四百一十六六六六不盡。　開方得心中之高二十零四一二
四。亦即內容渾圓之半徑
依上法。以丙已全邊一百。乘乙心五十七七三五〇得五千七百七
十三半。　又以心中二十零四一二四乘之。得全積一十一萬七千
八百五十一弱。與曆書微不同


四等面體求心捷法
准前論。心中冪一。則心甲冪二。中乙冪九。乙壬
冪六。以句股法弦之。則中甲與中壬之冪俱三

也。
何也。心中甲句股形。以中甲為弦。故心中句冪一。心甲股冪二。
并之為中甲弦冪三也。而乙中壬句股形。以中壬為句。故乙中
弦冪九。內減乙壬股冪六。其餘為中壬句冪亦三也
由是徵之。則中壬與中甲正相等。但如法求得甲壬線。折半得
中點。即為體心
又捷法。取乙壬冪（即原設邊折半自乘）半之。為中壬冪。開方得中壬。亦得
甲中。（或乙子全邊自乘取八之一為甲中冪亦同）
中壬。即原邊乙子距體心之度。甲中。即原邊丙已距體心之度。
而中為體心
相甲點在丙已邊折半之處。今從側立觀之。則線化為點。而丙







已與甲成一點。故從丙已原邊依楞直剖至
乙子對邊。即成甲壬線。其線即所剖面之側
立形
此圖即前圖甲壬線所切之面。蓋面側視則
成線矣
原設四等面全形。今依子壬乙楞剖至甲。則
成縱剖圖。故甲點內有丙已線。若依丙甲已
楞剖至壬。則成橫剖圖。故壬點內有子乙也。

縱剖有三。依子乙楞剖至甲。而平分丙已邊於甲。一也。依丙乙
楞剖而平分子已邊。二也。依已乙楞剖而平分子丙邊。三也
橫剖亦三。依丙已楞剖至壬。而平分子乙邊于壬。一也。依子丙
邊剖而平分乙已邊。二也。依子已楞邊剖而平分丙乙邊。三也。
其所剖之面並相似。皆以中點為三對角垂線相交之心

一率 一一七八五一 例容
二率 一〇〇〇〇〇 例邊之立方積
三率 一〇〇〇〇〇 設容
四率 八四八五二九。 設邊之立方積

開方得根二百。四弱。為公積一百萬之四等面體楞。與比例
規解合

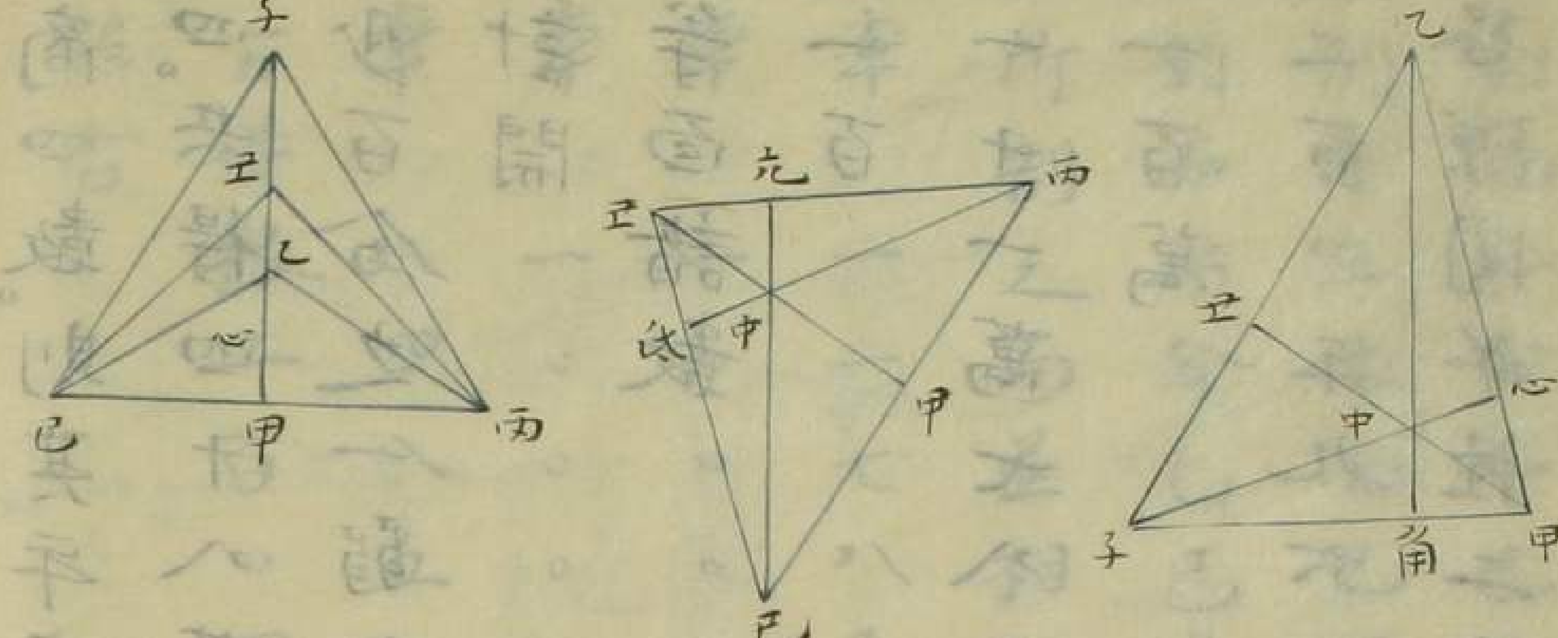
若商四數。則其平廉積四十八萬長廉積九千六百其隅積六
十四。共得四十八萬九千六百六十四不足四千三百七十。四
為少百分之一弱故比例規解竟取整數也

計開

四等面諸數

邊一百
積一十一萬七八五一
積一百萬
邊二百。三九六
內容渾圓半徑二十〇四一二四
外切渾圓半徑六十一二一〇〇
內容渾圓全徑四十〇八二四八
外切渾圓全徑一百念二四二〇〇

剖求心之圖



設邊一百。其冪一萬。丙巳。乙子。乙丙。乙巳。子丙。子巳。並同。為外切渾圓徑冪三之二

半邊五十。其冪二千五百。丙甲。甲巳。乙丑。丑子。等並同。為邊冪四之一

斜垂線之冪七千五百。乙心甲。子角甲。丙亢丑。巳氐丑。並同。為邊冪四之三

其根八十六。六〇二五

斜垂線三之一二十八。八六七五。其冪八百三十三。三三。即外切渾圓徑冪十八之一。為邊冪十二之一。即

各面內容平圓半徑。心甲。角甲。亢丑。氐丑。並同

斜垂線三之二五十七七三五。其冪三千三百三十三。三三。乙心。子角。丙亢。巳氐。並同

內容渾圓半徑二十。四一二四。其冪四百一十六。六六不盡。為邊冪二十四之一。即外切渾圓三十六之一。即分體中高。心中。角中。亢中。氐中。並同若內圓全徑之冪。則一千六百六十六。六六。為邊冪六之一。外切渾圓徑冪九之一。

外切渾圓半徑六十一。二三七二。其冪三千七百五十。即分體之立面楞。乙中。子中。丙中。巳中。並同四因之為渾圓全徑。冪一萬五千。其徑一百二十二。四七四四

又外切正相容之立方。其冪五千。為四等面邊冪之半。即斜方之比例。又為外切渾圓徑冪三之一

一率 外切渾圓徑一百二十二四七四四

二率 四等面之邊一百
三率 渾圓徑一百
四率 內容四等面邊八十一六四九六
又捷法。渾圓徑冪一萬五千。則內容四等面邊冪一萬或內容
立方面之斜。亦同為渾圓徑冪三之二
若設渾圓徑一百。其冪一萬。則內容四等面邊之冪六千六百
六十六六六。亦三之二也
平方開之。得八十一六四九六為四等面邊。即內容立方之斜。
內容立方面冪。三千三百三十三三三。為渾圓徑冪三之一。即
方斜之半冪。亦即四等面邊冪之半
平方開之。得五十七七三五。是為渾圓徑一百內容立方之
邊。亦即渾圓內容立方。立方又容小圓之徑
若於四等面內又容渾圓。則其徑冪一千一百一十一一一。為
渾圓徑冪九之一。為四等面冪六之一。立方面冪三之一
開得平方根三十三三三不盡。冪九之一。則其根必三之一也。為內容小渾圓
之徑。以徑乘冪。得三萬七千〇三十七為徑上立方積 以十
一乘十四除。得二萬九千一百。〇半為圓柱積 柱積取三之
二。得一萬九千四百。為小渾圓積。得大渾圓二十七之一 以
小渾圓積 十七因之。得五十二萬三千九百。為四等面外切
大渾圓積。即徑一百之渾圓積也。
互剖求心說
凡四等面體。任以一尖為頂。則其垂線為自尖至相對之平面

心。亦即平面容圓之心。而以餘三尖為底。其垂線至底之點。旁距三尖皆等。即乙心丙心己心。三線之距心皆等。而以子尖為頂。其垂線為子中心。其底為乙丙己平三角面。餘倣此。此為正形。各尖皆可為頂。其法並同。若以子中心垂線為軸而旋之。則成圓角體

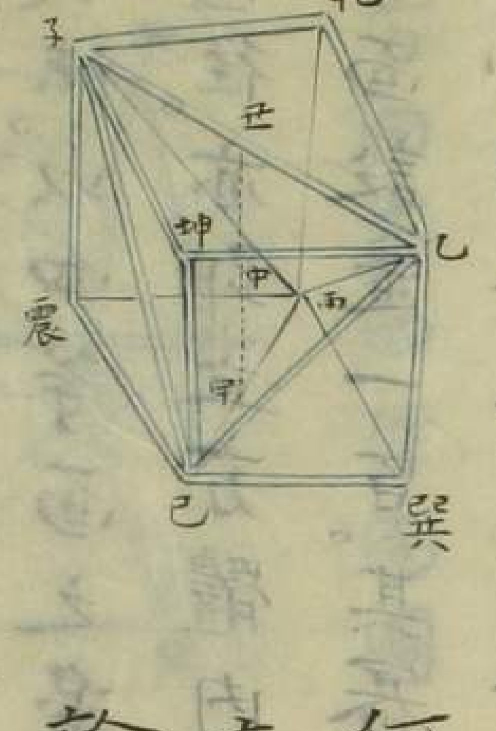
凡四等面體。任平分一邊。而平分之點為頂。以作垂線。則其垂線自此點至對邊之平分點。而以對邊為底。底無面。但有邊。底邊與頂邊相午直。正如十字形

假如以子乙邊。平分於壬。以線綴而懸之。則其垂線至所對丙己邊之平分。正中為甲點。其線為壬中甲。而子乙邊衡於上。則丙己邊縱於下。正如十字無左右之欹。亦定高下之微差也

若以壬中甲垂線為軸。旋之則成圓柱體

凡四等面體。以其邊為斜線而求其方以作立方。則此立方能

容四等面體



何以知之。曰。準前論。以一邊衡於上。而為立方上一面之斜。則其相對之一邊。必縱於下。而為立方底面之斜矣。又此二邊之勢。既如十字相午直。而又分於上下為立方。上下兩面之斜線然則自上面之各一端。向底面之各一端。聯為直線即為四等面之餘四邊亦即立方餘四面之斜如此。則四等面之六邊。各為立方形六面之斜線。而為正相容之體

如前所論圓角體。圓柱體。雖亦能容四等面形。而垂線皆小於圓徑。故不得為正相容

捷法。四等面之邊。自乘折半。開方。即正相容之立方根即弦倍句股意

設邊一百。其冪一萬。折半五千。即為立方一面之積。求其立方根。得七十。七一。〇六。即壬中甲垂線之高

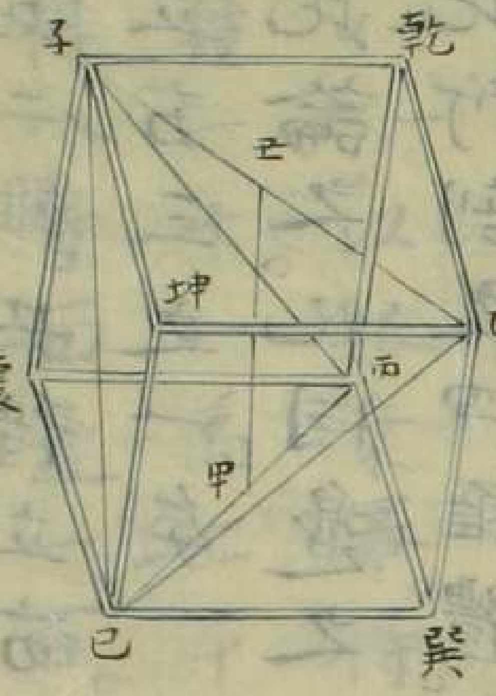
若以此作容四等面之圓柱。則其高七十。七一。〇六同立方之立根。而其圓徑一百同立方面之斜。此圓柱內可函立方

其乙中子中等。為自四等面體心。至各角之線。又為立方心。至各角之線。又為外切渾圓之半徑。又為四等面分為四體之楞線。又為立方分為六方錐之楞線

又捷法。以四等面之邊冪。加二分之一。開方即外切正相容之渾圓徑。亦即立方體內對角線如自乙至震折半為自心至角線

四等面設邊一百。其冪一萬。用捷法。二分加一。得一萬五千為外切正相容之渾圓全徑冪。開方得一百二十二四七四四為渾圓全徑。折半得六十一二三七二為渾圓半徑

立方內容四等面圖



設立方邊一百。其積百萬。內容四等面邊一百四十一四二一三其積三十三萬三千三百三十三。三三三三為立方積三之一。

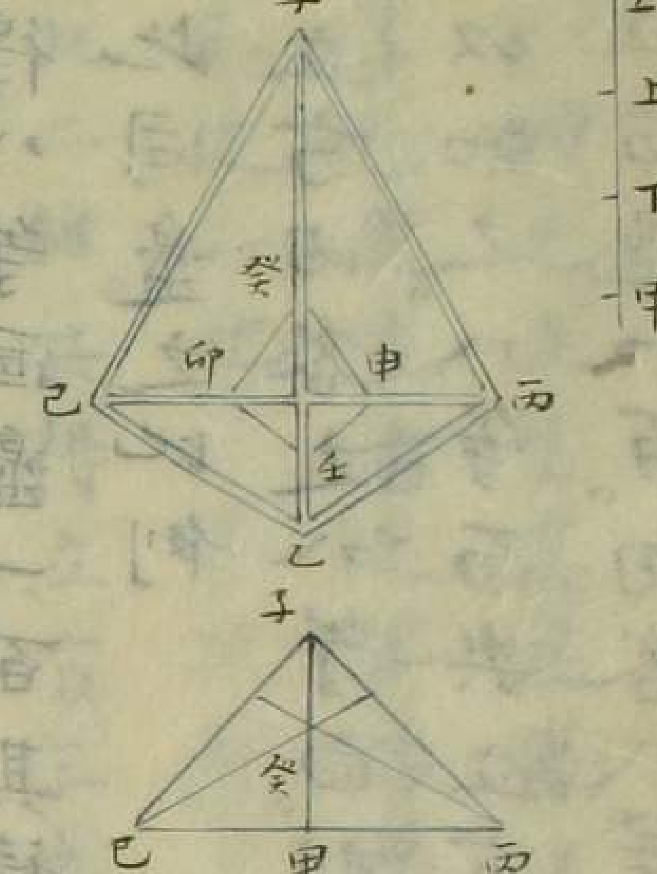
乾坤震巽立方。乾丙坤巳乙巽子震與中心之壬甲同高。內容子乙丙巳四等面為立方積三之一

何以明之。凡錐體為同底同高之柱體三之一。今自立方之乙角依斜線剖至丙巳。成乙丙巳巽三角錐。以丙巳巽立方之半底為底。又自子角斜剖至丙巳。成子丙巳震錐。以丙巳震立方之半底為底合兩半底則與立方同底矣。而子震與乙巽之高。

即立方高也。是此二錐。得立方三之一矣
又自子乙斜線。斜剖至巳角成倒錐以子乙坤立方之半頂為
底。以坤巳立方高為高。又自子乙斜剖至丙角。亦成倒卓之錐。
以子乙乾立方之半頂為底。以乾丙立方高為高。與前二錐同。
亦三之一也
合此二錐。共得立方三之二。則其餘為子乙丙巳四等面體者。
少立方三之一矣
準此論之。凡同邊之八等面積。四倍大於四等面積。何以知之
以此所剖之四錐體。合之則為八等面之半體。皆以剖處為面。
而其邊其面。皆與四等面等。是同邊之體也。而八等面之半體。
既倍大於四等面。則其全體必四倍之矣

設八等面邊一百四十一。四二一三。與四等面同邊。則八等面之積。
一百三十三萬三千三百三十三。不盡。三三三為四等面之四倍。
若設四等面邊一百。則其外切之立方面冪五千。立方根七十
〇。七一〇六。以根乘冪。得立方積三十五萬三千五百五十三。四等
面積一十一萬七千八百五十一。為立方積三之一
推得八等面邊一百。其積四十七萬一千四百〇四
此同邊之比例
若立方內容之八等面。則其積為立方內容之四等面二之一。
何以知之。八等面與立方同高。則其積為立方六之一故也
設立方邊一百。內容八等面邊七十〇。七一〇六。其積一十六萬六
千六百六十六。為四等面之半。若設立方邊七十〇。七一〇六。則內

容八等面積五萬八千九百二十五半。其邊五十



四等面體。又容小立方。小立方內又容小四等面體。則內容小立方徑為外切立方三之一。內小四等面在小立方內。其徑亦為四等面三之一。而其積皆二十七之一

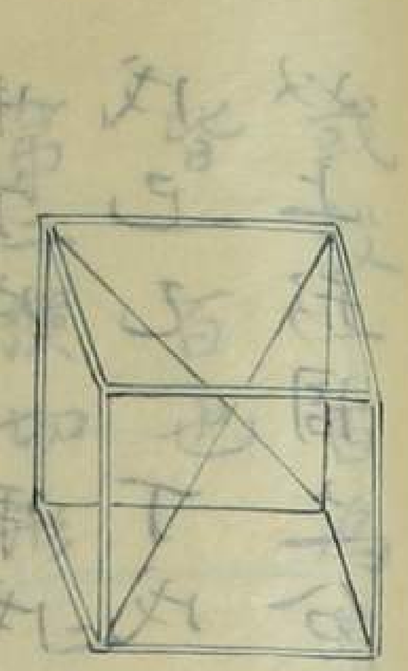
何以知之。凡三等邊平面之心。皆居垂線三之一。假如子巳丙為四等面之一面。其平面之心必在癸。而子甲垂線分三之一為癸甲。其餘三面盡同。而內容之小立方。必以其下方之面角縱切子巳丙之癸心。及乙巳丙之壬心。其上方之面點。必橫切於子乙巳之卯心。及子乙丙之申心。而立方內容之小四等面。亦必以其四角同切。此四點也。今壬癸兩點。既下距丙巳線為其各斜垂線三之一。而卯申兩點。又上距子乙線之斜垂線亦三之一。則其中所餘三之一。必為立方所居也。而內小立方。不得不為子乙與丙巳相距線三之一矣

問癸點為三之一者。斜面之垂線也。小立方者。直立線也。何以得同為三之一乎。答曰。癸點所居三之一。雖在斜面。而子乙縱線與丙巳橫線。上下相距。必有垂線直立於其心。此直立垂線即前圖之甲壬與外切立方線同高者也。壬甲中垂線以上停三之一之上點。與卯申平對。以下停三之一之下點。與壬癸平對。依句股法。弦與股比例同也。然則壬甲線之中停。即小立方之所居矣

又壬甲者。即外切立方之高也。故知小立方徑。為外切立方徑
三之一
又小四等面。在小立方內。以其邊為小立方之斜。而縱橫邊相
午對如十字。其中心亦以壬甲線之中停為其軸。其斜面之藝。
一切皆與大四等面同。而壬甲者。亦大四等面之軸也。小四等
面之中軸。既為壬甲三之一。其餘一切皆三之一矣
夫體積生於邊者也。邊為三之一者。面必為九之一。體必為二
十七之一。無疑也
準此論之。渾圓在四等面內者。亦必為外切渾圓二十七之一。
其徑亦三之一也。何也。渾圓之切點。與小立方小四等面之切
點並同也

以此推知小立方與小四等面。在大四等面內。或居小渾圓內
以居大四等面內。其徑積並同
求體積
渾圓徑一百。其徑上立方一百萬。依立圓法。以十一乘十四除。
得七十八萬五千七百一十四為圓柱積。仍三分取二。得五十
二萬三千八百〇九為渾圓積
內容立方面冪三千三百三十三。三三其邊五十七。七三五以邊為
高乘面得一十九萬二千四百五十。為內容立方積
內容四等面體邊冪六千六百六十六。六六其邊八十一。六四九六
依前論四等面體。為立方三之一。得六萬四千一百五十。為
四等面積

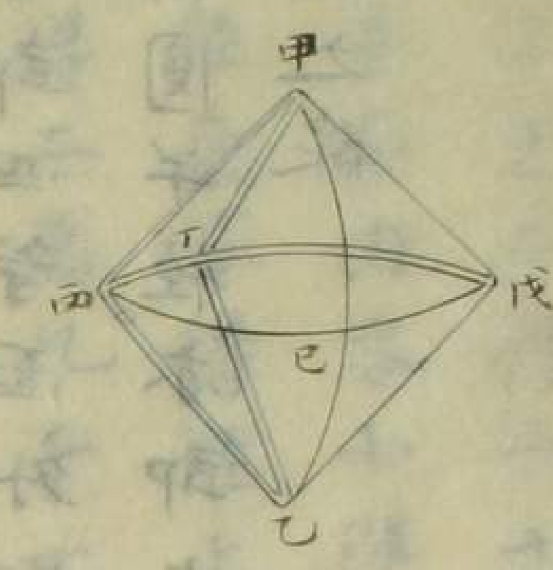
立方内容小渾圓。以立方之邊為徑五十七七三五。依立圓法。以
立方積十一乘十四除。得一十五萬一千二百一十為圓柱積。
取三之二。得一十。萬。八百六十六。為小立圓積
四等面内容小渾圓徑冪一千一百一十一一。其徑三十三三。三
以徑乘冪得徑上立方積三萬七千。三十七。以十一乘十四
除。得二萬九千一百。半。為圓柱積。又三分取一得一萬九千
四百。為立方内之四等面内容小渾圓積。為大渾圓積二十七
之一。若先有内小渾圓積。但以二十七因之得大渾圓積
依此論之。凡渾圓内容立方。立方内又容四等面體。四等面内
又容小渾圓。其内外相似之大小二體。皆二十七之比例也
又提法用方斜比例



立方面之斜設一百。其冪一萬。則其方冪五
千。用三因之。得一萬五千。開方得立方對角。
斜線即為外切渾圓全徑
立方面之斜一百。即立方内容四等面之邊
立方體對角斜線一百二十二。四七四四。即立方外切渾圓之全徑。
亦即四等面外切渾圓全徑半之。得六十一。二三七二。即立方外切
渾圓半徑。亦即立方體心。至各角之線。亦即四等面體心至各
角之線

八等面形圖註

第一合形



甲丁　甲丙　甲己　甲戊　丁丙

丙己　己戊　戊丁　戊乙　己乙

丁乙　丙乙

以上形外之楞。凡十有二。即根數也。其長皆等。

或設一百為一楞之數。則十二楞。皆一百也

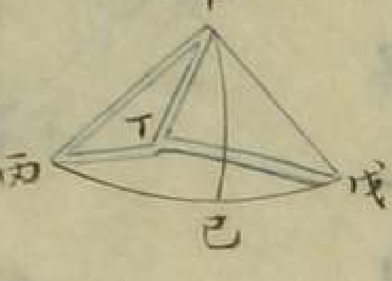
甲丁戊　甲戊己　甲己丙　甲丙丁

戊己乙　丁戊乙　丙丁乙　己丙乙

以上形周之分面凡八。皆等邊平三角形也。其容積其邊皆等。

或設一百為邊數。則三邊皆一百。而形周之分面八。皆三邊。邊皆一百也

第二横切形



二

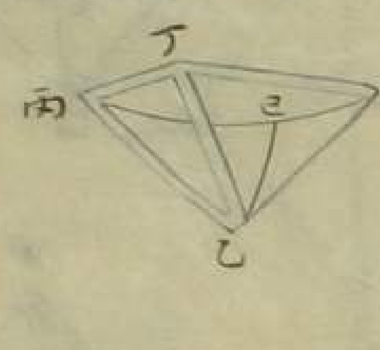
甲丁丙己戊。為上半俯形

丁丙己戊乙。為下半仰形

右二形各得合形之半。皆從丁戊楞横剖至己丙

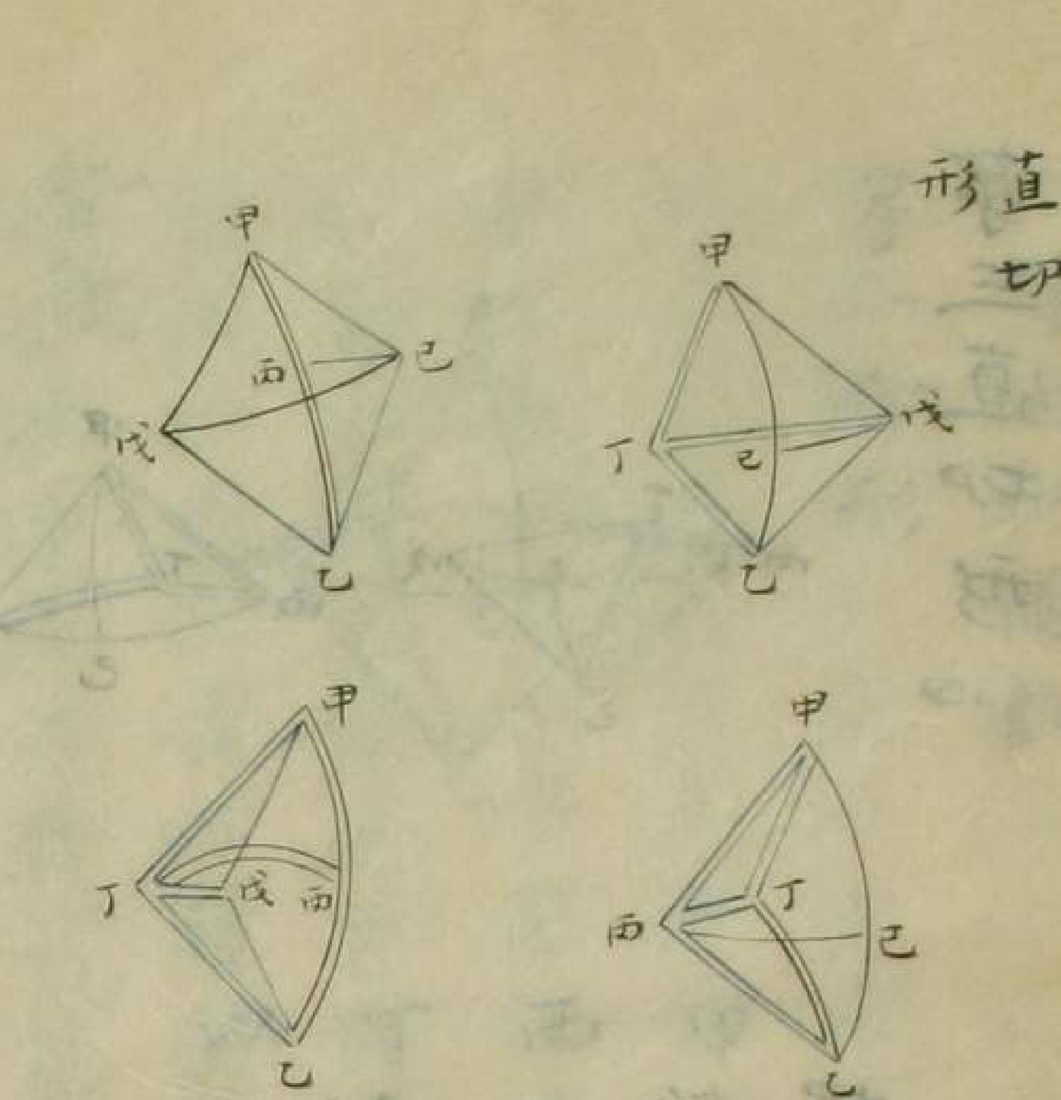
一俯一仰。皆方錐扁形。丁丙己戊為方錐之底。其邊皆等其從四角湊至頂之楞皆與底之邊等

第三直切形



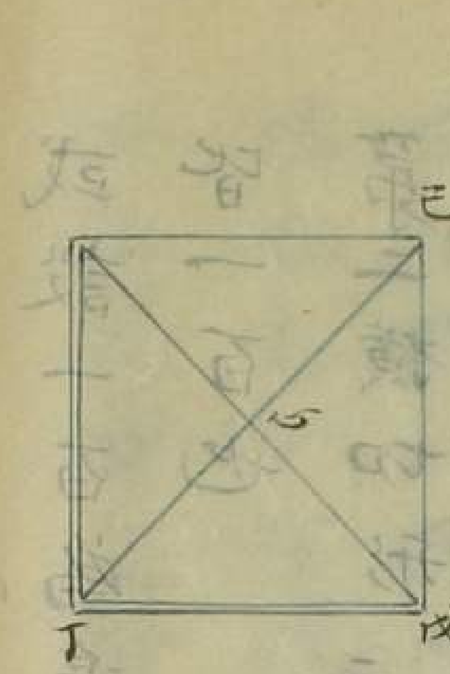
四

直切形



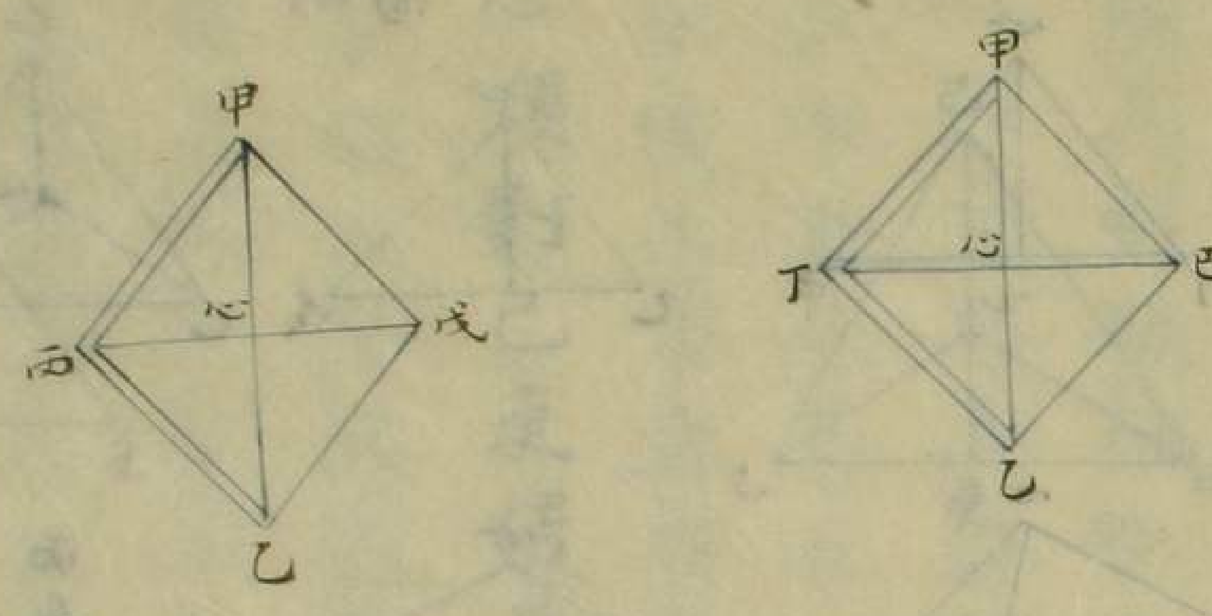
從甲尖依前後掦直剖過丁已至乙
尖成左右兩形
從甲尖依左右掦直剖過丙戊至乙
尖成前後兩形
此四形者。一切皆與仰俯二形同。但
彼為眡坐之體。故為方錐。仰者即倒卓方錐
而此則立體。即如打倒方錐之形也。

第四橫切之面一。直切之面二



橫切之面

因橫剖得正方平面。在立方錐以此
為底。倒方錐以此為面。在合形則為
腰圍。其已丁及丙戊兩對角斜線相
交於心。即兩直切之界也。心即合形中心
因直剖得斜立方面二。其已丁及戊
丙橫對角線。即橫切之界。其從甲至
乙垂線。即直剖之界如立面在前後
互剖之形。則此線為左右直剖之界。
彼此互為之也。亦即為全形之中高
徑線
以此知八等面之中高線為方斜之
比例



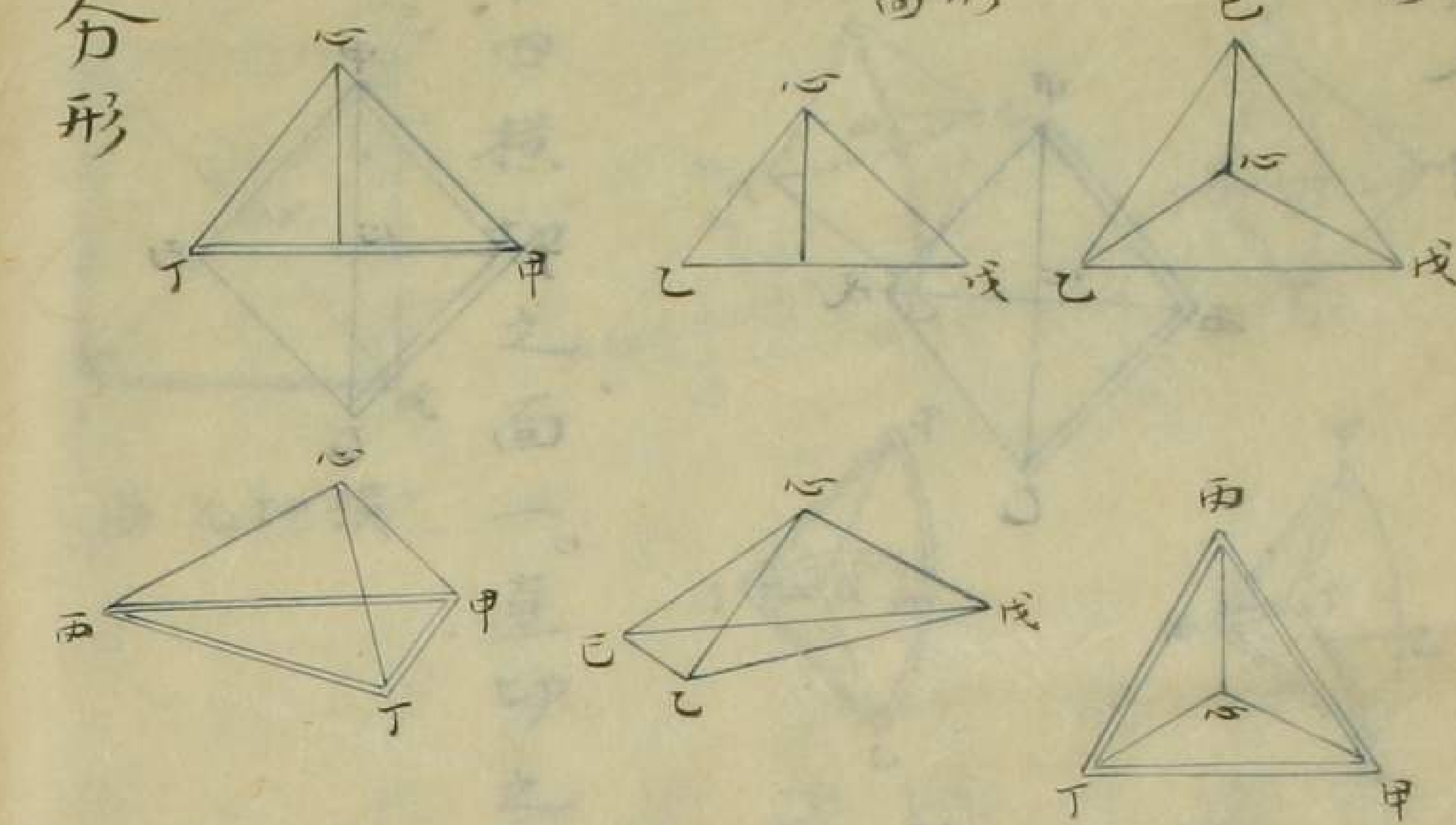
第五分形

因横剖及兩直剖分總形為八。皆
三角錐形也
皆以等邊平三角形面為錐形之
底。而以横直剖線相交處之點為
其銳頂。即合形之中心也
其自頂心至角之撱皆等。皆邊線
之方斜比例也。底線為方。則此線為其斜之半。而
比撱線。又即為八等面形之外切
圓之半徑

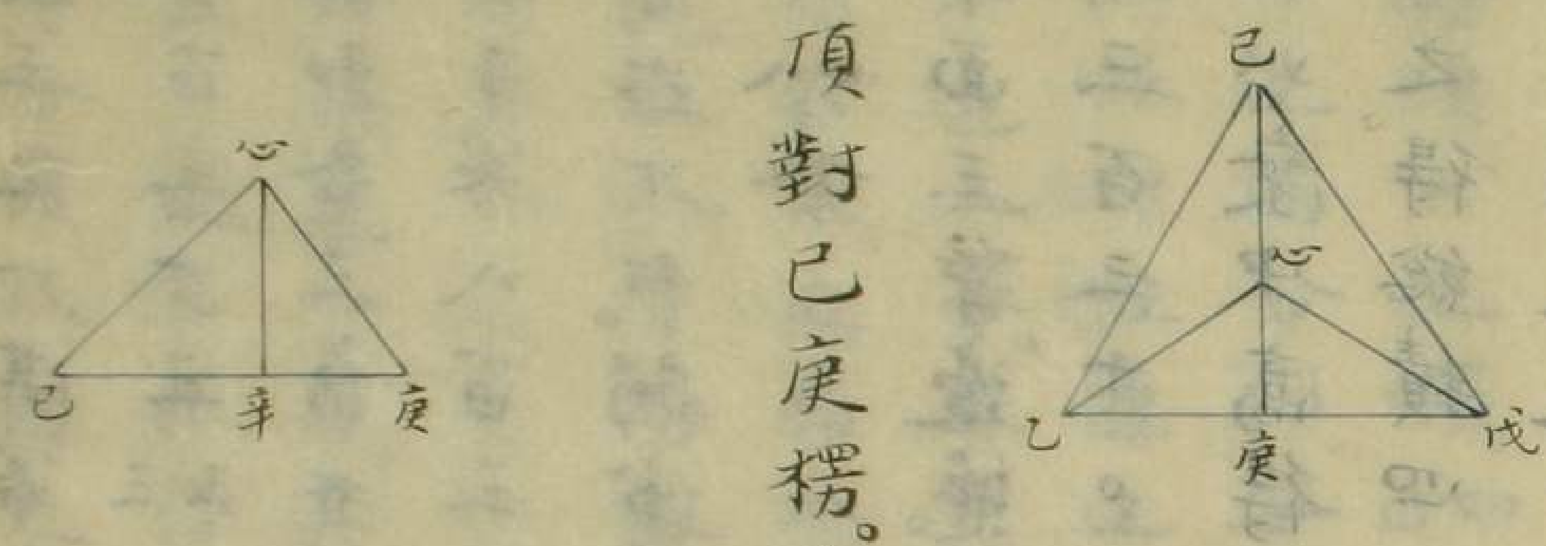
合形正面

分形側面

算分形



設己戊邊一百。其冪一萬。則心戊撱
之冪五千。倍戊庚半邊之冪為半斜冪也
戊心之冪五千。內減戊庚冪二千五
百。則其餘二千五百為心庚之冪。故
心庚必與戊庚等
從心頂對己庚撱。直剖至庚分形為兩。則其中剖處成三角平
面



己庚者乙己戊等邊。三角平面之中
垂線也。其冪為邊四之三。設邊一百
之冪一萬。則己庚之冪七千五百
庚辛者。平面三角容圓之半徑也。得

己庚三之一。其冪則九之一也。己庚之冪七千五百。則庚辛之
冪八百三十三三三
辛點即各三角平面之中心
以庚辛冪八百三十三。三三減心庚冪二千五百。得心辛冪一千
六百六十六。開方為心辛。即分形之中高也。求得分形中高四
十。八二四七
依平面三等邊法。設邊一百。其中長線八十六。六〇二五其冪積得
四千三百三十。一二五〇取平冪三之一。得一千四百四十三。
三七五〇以象中高得分形積五萬八千九百二十五。三五一三再以
八因之。得總積四十七萬一千四百。二。八一〇四與總算合
設八等面之邊一百。其冪一〇〇〇〇。即橫剖中腰之正方

半之為每角輳心之線之冪得。五〇〇〇此線即分形自底
角輳頂心之楞。如心戊心己心乙又為八等面形外切渾圓之半徑
又半之為分形。每面自頂至邊斜垂線之冪。即心庚得。二五〇
〇此線即設邊之半。其冪為設邊四之一
設半邊之冪。取其三之二為分形中高線之冪。即心辛得。一六
六六不盡。又為八等面形。內容渾圓之半徑
揔法。取八等面設邊之冪六而一為八分體中高之冪。開方得
中高
假如設邊一百。其冪一萬。則分體中高之冪。一千六百六十六
不盡 求其根得四十。八二四八以中高乘三角平面冪三除
之得分體。八因之得全積

又捷法。八等面設邊之冪取三之二為體。内容渾圓之径冪。開
方得内容渾圓径。折半為八分體中高
假如設邊一百其冪一萬。則内容渾圓之径冪。六千六百六十
六不盡 求其根得八十一 六四九六 折半為分體中高
或意以内容渾圓全径乘設面三角平冪。四因三除之得全積。
又捷法 此方斜之比例
八等面設邊之冪倍之為體外切圓径冪。開方得径以乘設邊
之冪。即腰廣 平方 得數三歸見積
假如設邊一百。其冪一萬。其斜如弦。弦之冪倍方冪得二萬。求
其根得一百四十一。四二一三 以乘腰廣一萬。得一百四十一萬
四千二百一十三 三除之。得総積四十七萬一千四百。四。

一系 八等面體之邊上冪。與其外切渾圓之径上冪 其比
例為一與二 方斜比例
一系 八等面體之邊上冪。與其内容渾圓之径上冪 其比
例為三與二
一系 八等面體外切渾圓之径上冪。與其内容渾圓之径上
冪。其比例為三與一
准此而知八等面内容渾圓。渾圓内又容八等面。其渾圓外切
之八等面邊。或径上冪與内容之八等面邊或径上冪。其比例
亦必為三與一也
計開
八等面形諸數

設邊一百　其積四十七萬一四〇四。與曆書所差甚微

其體外切渾圓之徑一百四十一。內外兩渾圓之徑冪。為三與一。其根約為四與七而強

體內容渾圓之徑八十一

八等面外切立方徑一百四十一。方斜比例也與外切渾圓同

八等面內容立方徑四十七

內外切大小立方之徑之比例為三與一

內外兩立方之積之比例為二十七與一

若渾圓內容立方。立方內容八等面體。八等面體內又容渾圓

則大小兩渾圓之徑。亦若三與一。其積亦若二十七與一

一率　四七一四〇四　例容

二率　一〇〇〇〇〇　例邊之立方

三率　一〇〇〇〇〇〇　設積

四率　二一二一三二二　設邊之立積

開立方得根一百二十八為公積一百萬之八等面根。與比例規解合

二十等面形自腰切之成十等邊平面。先求甲丁。乃十等邊平面從心對角之線。亦即二十分形各三角立體一面之中垂斜線。

法為甲乙（即切形十等邊之半。在原設二十等面形邊為四之一。）與甲丁。若十八度之正弦與全數也。（十等邊各三十六度。其半十八度。）

設邊一百。所切十等邊平面之邊五十。其半甲乙二十五。

一率　十八度正弦　〇三〇九〇

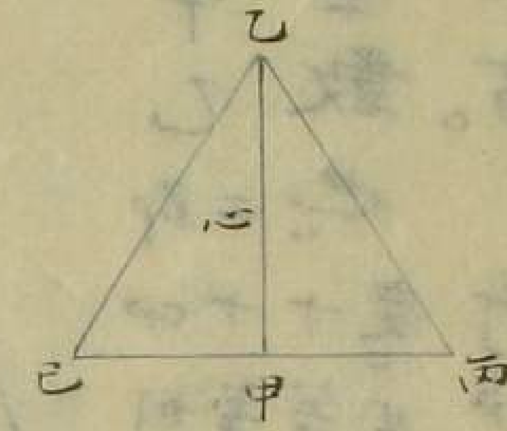
二率　全數　一〇〇〇〇

三率　甲乙　二五　相乘加四位

四率 甲丁 八〇九〇六一

用等邊三角求容圓法

設邊一百　其內容圓半徑二十八八六七五為心甲



以心甲為句。二十八八六七五　其冪八百

三十三三三二五　以甲丁為弦。八十。九〇六一　其冪六千

五百四十五七九七〇

句冪減弦冪。餘五千七百一十二四六四五為心丁股冪

開方得心丁七十五五八〇八　此即各面切形。自各面之心至切

體尖之高也。其切體之尖。即原設二十等面總形之體心為

丁點

用後法得乙己丙平面冪積四千三百三十。一二五〇

又依三等邊角形。設邊一百。丙己　其半五十。丙甲　求到乙甲中

長八十六六〇二五。用其三之一。即心甲二十八八六七五。以與丙甲五

十相乘。得一千四百四十三三七五〇為各等面平積三之一。三因之得

平面冪

又以丁心七十五五八〇八乘之。得一十。萬九千。九十一四三七二。

為二十等面形分切每面至心之積。又以二十乘之得全積

依上法求到二十等面全積

設邊一百　其積二百一十八萬一千八百二十八。查比例規解差不多。

惟測量全義差遠

按此法以本形分為二十。各成三角立錐形。而各以分形之

高乘底。取三之一以為分形積。然後以等面二十為法。乘而
并之得總積。可謂的確不易矣。然與曆書中比例規解。及測
量全義。俱不合。何耶

計開

二十等面形

設邊一百　其每面中長線。八十六六〇二五

其每面冪積。四千三百三十。一二五〇

其每面容平圓之心作線至形心之丁七十五。五八〇八即心丁。

其分形各以每面之冪積為底。心丁為高。各得三角立錐積一
十〇萬九千〇九十一四三七二

其立錐積凡二十。合之得總積二百一十八萬一千八百二十
八

用上法求形內容渾圓

其心丁七十五五八〇八即內容渾圓半徑。以心丁線與各平面作垂線。而丁點即體心故

倍之得一百五十一一六一六為內容渾圓全徑

置小渾圓徑一百五十一零。自乘得二萬二千八百〇一。以十
一乘十四除。得一萬七千九百一十五為圓冪

置內容渾圓之平圓冪一七九一五。以圓徑一百五十一。取三
之二。得一百強。以乘平圓冪。得一百八十〇萬二千二百四十
九。為二十等面內容渾圓之積

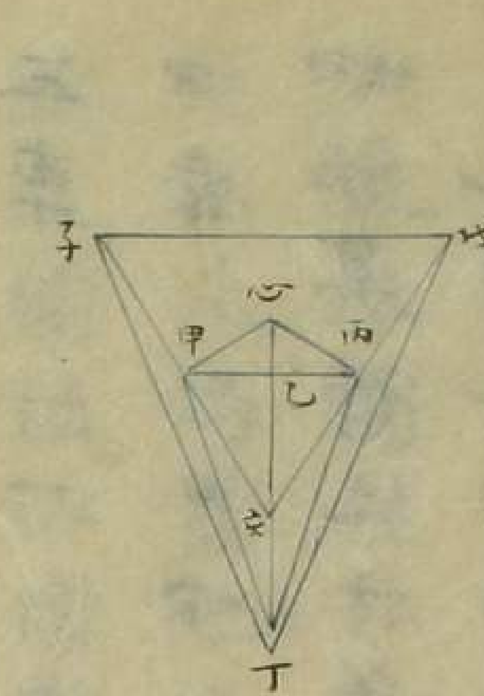
置內容圓徑一百五十一。自乘得二萬二千八百〇一。再乘三百四十四萬二千九百

五十一。以立員捷法〇五二三五九八七七乘之得渾圓積一百八十〇萬
二千七百二十五
先用容率十四除十一乘得渾圓一百八十〇萬二千二百四十九
以較立圓捷法。所得少尾數四百七十六。約為一萬八千之五
弱。不足為差也
依立圓法。以圓率三一四一五九二乘。立圓法六而一。得五十
二萬三五九八。為径一百之渾圓積
依法求得立方邊五十七七三五〇立方積一十九萬二四五。〇四
等面積六萬四千一百五十〇。並合前算
小渾積一〇〇七六六　若用捷法。以渾圓率五二三五九八。
乘立方積。得數後去末六位。亦得一十〇萬。七六六

內容渾圓尚且如此之大。況二十等面之形。又大於內圓乎。
然則曆書之率。其非確數明矣
二十等面
一率　二一八一八二八　例容
二率　一〇〇〇〇〇〇　例根一百之體積
三率　一〇〇〇〇〇〇　設容
四率　〇四五八三三二　所求根立積
如法算得二十等面之容一百萬。其根七十七
比例規解作七十六。尚差不多。測量全義云。二十等邊設一
百。其容五二三八。九。則大相懸絕矣。又知其誤。今乃得其
確算。已来年所定之率。以西書酌而為之。究竟不足。今乃得

之。可見學問必欲求根也

二十等面分體之圖



亥子戍為二十等面之一面。亦即各分體之底

亥子子戍戍亥皆其邊。即根也。半之為亥甲

甲乙丙為橫邊切處。即橫切成十等邊形之一邊

丁為體心。亦即切十等邊平面之中心

甲乙丙丁。即橫切十等邊平面之分形　心為二十等面。每面之正中

心丁為體周各平面至體心之垂線。亦即分體之中高。亦即體內容渾圓之半徑

丁亥丁子丁戍皆分體之楞線乃自各分面角輳體心之稜也。亦即為外切渾圓之半徑

丁甲丁丙。皆橫切平面各角輳心之線。亦即分體各斜面之中垂斜線也

求法。以丁甲為股。亥甲為句即根之半兩冪相并。開方得弦。即丁亥也丁子丁戍同

求二十等面外切渾圓之半徑

依句股法以丁甲股八十。九〇六一自乘冪六千五百四十五七九七〇。亥甲句五十。自乘冪二千五百　相并為亥丁弦冪九千。四十五七九七〇。平方開之。得亥丁九十五。一〇五二為外切渾圓半徑　亦即二十分形。自其各角輳心之稜　倍之得一百九十。二一〇四。即外切渾圓全徑

計開二十等面體諸數

設邊二百　其容二百一十八萬一千八百二十八

其內容渾圓徑一百五十一　其外切渾圓徑一百九十

其每面中心至體心七十五半 即內容渾圓之半徑

其每面各角至體心九十五 即外切渾圓之半徑

計開二十等面體諸用數

設邊一百　外切立方之半徑八十。一九七。為體心至邊之半徑 即寅中卯中辰中等

倍之為邊至邊一百六十一三八四。即外切立方全徑

外切渾圓之半徑九十五五一六。為體心至各角尖之半徑 即甲中戊中心中等

倍之為角尖至角尖一百九十。一二二。即外切渾圓全徑

內容渾圓。及內容十二等面之半徑七十五六一五七為體心至各面之半徑。即巳中庚中等

倍之為內容渾圓全徑一百五十一二二一五為面至面

內容十二等面之邊五十三九四三四

每面之冪四千三百三十。一二五。

二十等面之冪。共八萬六千六百。二半

分體積一十。萬九千。八十四六五為二十等面體積二十之一

合之得全積二百一十八萬一千六百九十二

內容小立方之邊八十七二七六七 以內容立圓徑自乘之冪。取三之一。開方得之。

內容燈體邊五十。即原邊之半

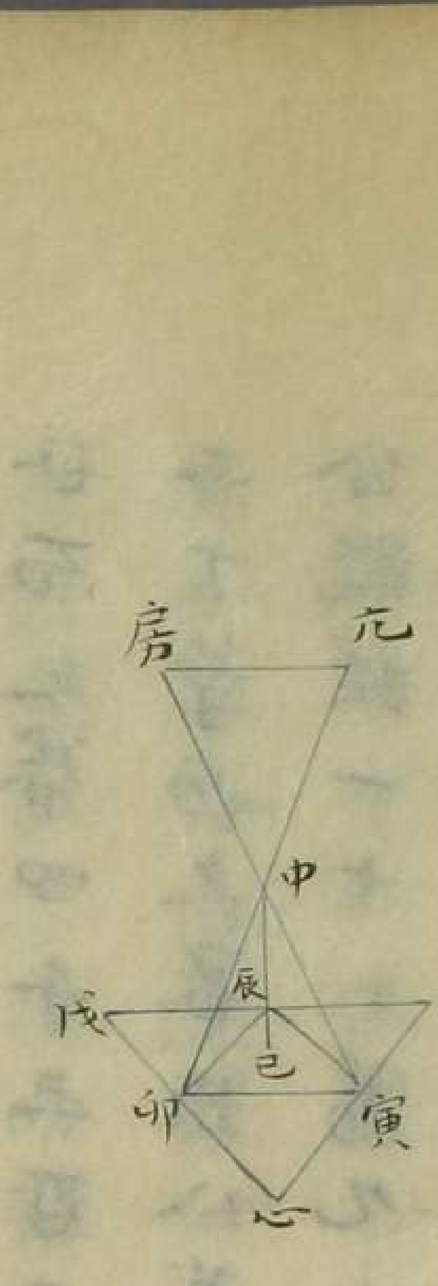
立方內容二十等邊算法

亢卯寅房為立方全徑一百

中寅中卯為半徑五十

寅卯二點為二十等面邊折半之界。

寅卯線為二十等面邊之半



中為體之中心　寅中卯角為三十六度

中寅半徑當理分中末之全數　寅卯即理分中末之大分

甲戊心心甲。皆寅卯之倍數。即二十等

面之邊。其數六十一八〇三三九八

甲辰半邊三十。九〇一六六九。與寅卯同

心辰垂線五十三三二三三。半垂線心箕二十六七六一六甲辰冪

九百五十四九一五〇三因甲辰冪為心辰冪二千八百六十四

七四五〇不盡

計開

立方徑設一百　半徑五十

理分中末線大分六十一八〇三三九八。即二十等面之邊

論曰。以中寅半徑五十求寅卯。正得理分中末大分之半。而甲

戊邊。原倍於寅卯。寅房全徑。亦倍於寅中。是全數與大分皆倍

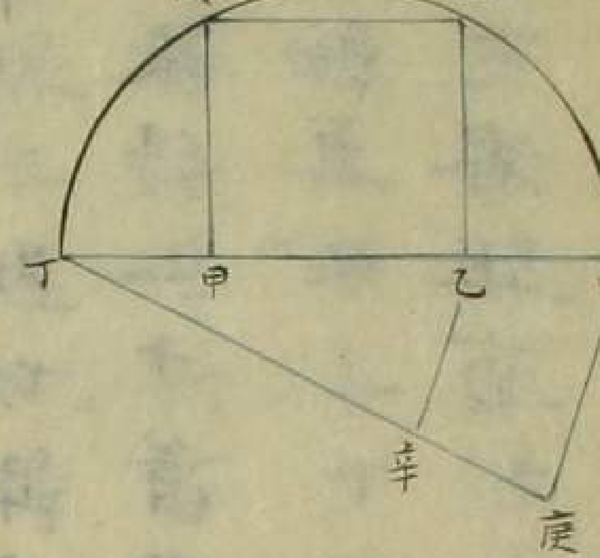
也。故徑以全數當寅房全徑。以理分中末之大分。當甲戊等二

十等邊之全邊也

又立方邊設一百即寅房徑　半之五十。即中寅

内容二十等面之邊六十一八〇三三九八。即甲戊等
面之中垂線五十三五二三三。即心辰
中垂線之半二十六七六一六。即心箕
面之冪一千六百五十三九五七八。甲戊心面
中垂線三之一。得一十七八四一一。即心巳
内容立圓半徑四十六七〇八六。即巳中 全徑九十三四一七二
二十等面全積。五十一萬五千〇二十六九五九七
約法
立方根與所容二十等面之邊。若全數與理分中末之大分
面冪三之一以乘容圓全徑。得數十之為全積
中垂線三之一心巳為句。即平面容員半徑 自乘得句冪三百一十八

三〇四九。以減中寅弦冪二千五百〇〇餘巳中股冪二千一百
八十一六九五一五二。開方得巳中根四十六七〇八六
二十等面邊設一百用理分中末線求其外切之立方
一率 二十等面邊六十一八〇三三九八
二率 外切立方一百〇〇
三率 二十等面邊一百〇〇
四率 外切立方一百六十一八〇三四
依法求得二十等面邊一百。其外切立方一百六十一八〇三四。與
先所細算合
半圓内容正方
法以圓徑為三率丁丙 理分中末之小分為二率庚辛 理分中



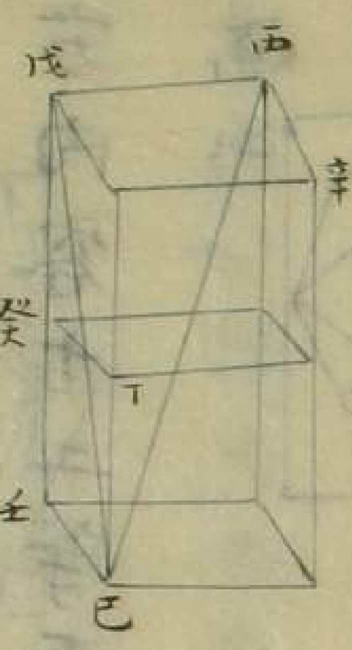
未全線加小分為首率丁辛為全線。再加庚辛為小分。共得為丁庚總線也。二三相乘。一率除之。得四率。丙乙即甲丁為全徑之小分。以減全徑。餘乙丁乃于乙作正十字線至圓界。如己乙即以此線自乘作正方。己甲如所求

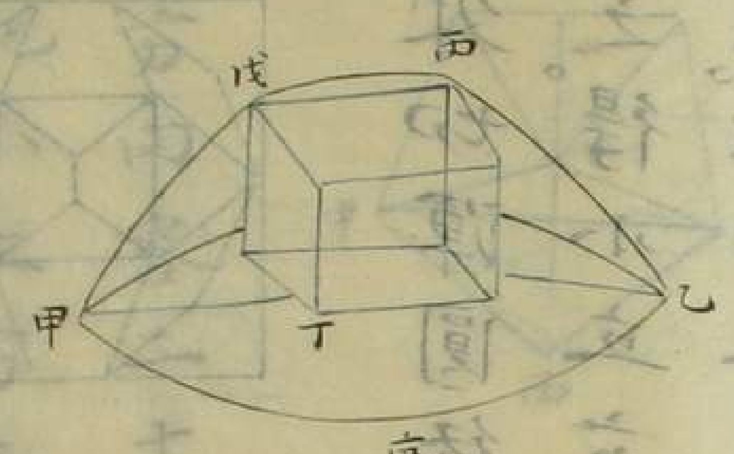
論曰。己乙即丙乙與乙丁之中率。而丙乙既為乙丁全徑之小分。則己乙即大分也。而甲乙亦為大分　甲丁亦為小分矣。若自甲作甲戊。必與己乙甲乙等。而其形正方

半渾圓內容立方

法以乙甲圓徑自乘之冪。取其六之一。開方得容方根。丙丁方。丙戊邊

論曰。試倍甲丙乙庚半渾圓為全渾圓體。亦倍丙丁正方形。作





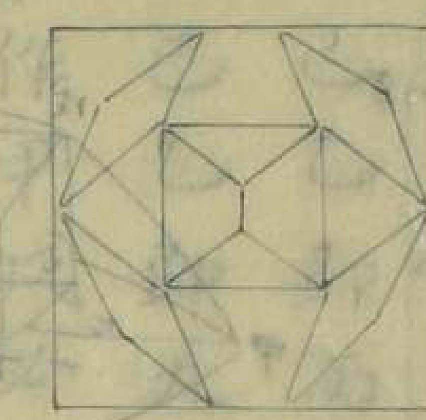
丙己長立方形。亦必能容矣。然則丙己線在長立方形之內為斜線者。亦即渾圓之徑也。與甲乙徑等

試於長立方面作戊己斜弦。則己壬為之句。戊壬為之股。而戊己弦冪內。有己壬冪與戊壬冪矣

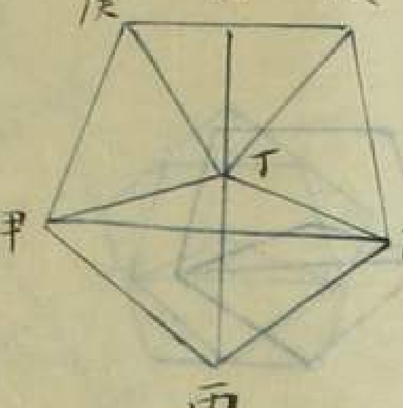
而丙己線為弦。則戊己又為股。丙戊又為句。而丙己自冪內又兼有戊己冪及丙戊冪矣。丙戊亦即己壬

又戊壬為己壬即丙戊。亦即戊癸。之四倍。則戊壬股冪內有己壬句冪四。合之為戊己弦冪。則戊己冪內有己壬冪五矣

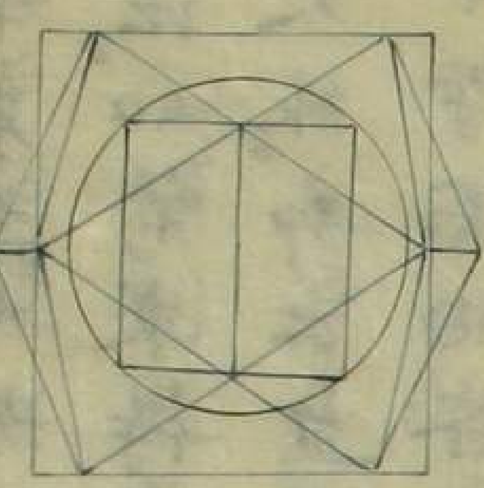
而丙已弦冪內。復兼有戊已股冪。及丙戊句冪。是丙已冪內有
丙戊冪六也。丙已既同圓徑。則取其冪六之一。開方必丙戊容
方邊矣
立方內容十二等面。其內又容立方。此相容比例



立圓內容十二等面。其內又容立方。此
立方之面冪。為外圓徑上面冪三之一。此
而立方之各角。即同十二等面角。以切
於立圓之面
法以外切渾圓徑上冪取三之一。為十二等面內小立方冪。平
方開之。得小立方根根乘冪見積
又簡法。以十二等面之面冪。求其橫剖之大線。此線即廿二等



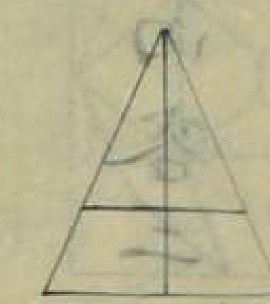
面內容小方之邊
如圖作甲乙線。剖一面為二。此線在面
中最大。即為內小立方根。以此自乘而
三之。即小立方外切渾圓徑冪
凡立方內容二十等面。二十等面內。又容渾圓。圓內又容小立
方。此小立方之各角。能同渾圓之切點。以切於二十等面之
平面心

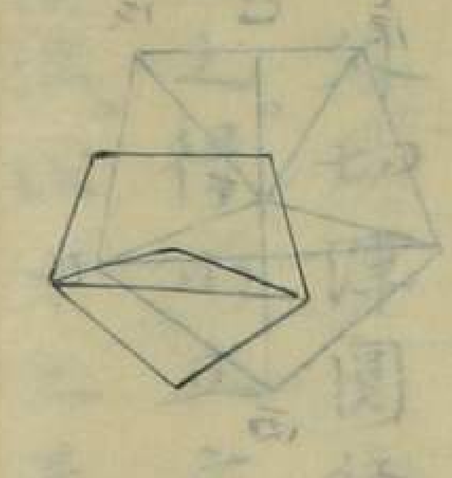


法以內容渾圓徑之冪。取三之一為內
小立方之冪。平方開之。得切點相距。即
小立方根。以根乘冪見積
簡法。取內容渾圓之內容立方邊。求其

理分中末之大分。為內容十二等面邊一

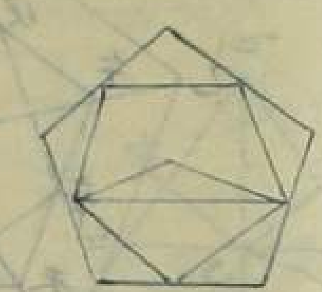
又簡法。如前求得二十等面。內容十二等面之一面。乃求其橫剖之大線。即二十等面內容小立方之根。以根自乘而三之。即二十等面內容渾圓之徑冪。開方得根。即內容渾圓徑折半為分體之中高





此二十等面之面。作三分之一橫剖

此十二等面之面。在二十等面內



此五等面邊。即前橫線所成

凡五等邊平面。其邊即七十二度之通弦。橫剖大線。即一百四十四度之通弦。各折半為正弦可以徑求

一率　三十六度正弦

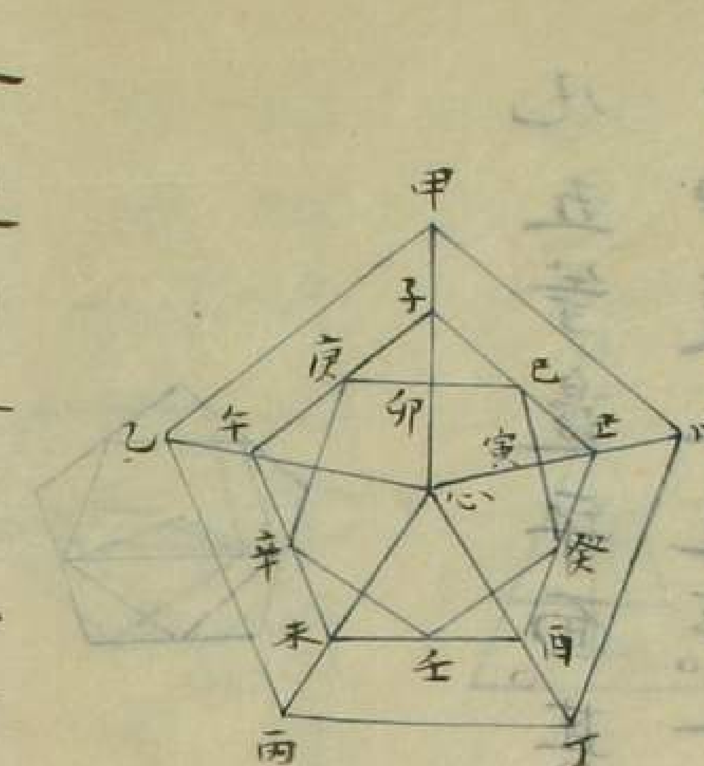
二率　七十二度正弦

三率　五等邊之一邊

四率　橫剖之大線

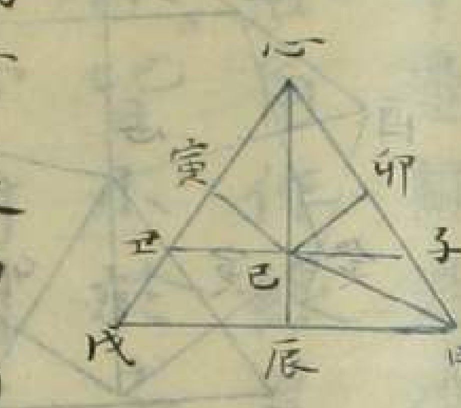
凡十二等面體。與二十等面體。可互相容而不窮

十二等面體有二十尖。二十等面體有十二尖。其各尖之相距
心均。其互相容也。皆能以其在內之尖。切在外各面之中心而
徧
凡二十等面內容立圓。仍可以容二十等面
二十等面內容立圓。仍可以容十二等面

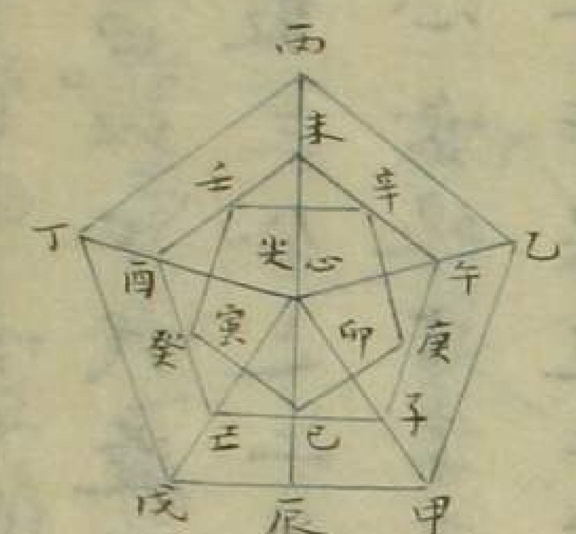


甲心乙　乙心丙　丙心丁　丁心戊
戊心甲皆二十等面之一面。其各三
邊皆等。各以庚辛壬癸己為其面之心。
若內容十二等面體。則十二等面之各
尖。必切於庚辛壬癸己等心點
今求內容十二等面之邊。則必以庚辛等心點聯為直線。即成

五等邊面之邊。而與十二等面之形相
似。而可以相容矣
法當以邊如戊甲半之如辰甲作對心垂線。



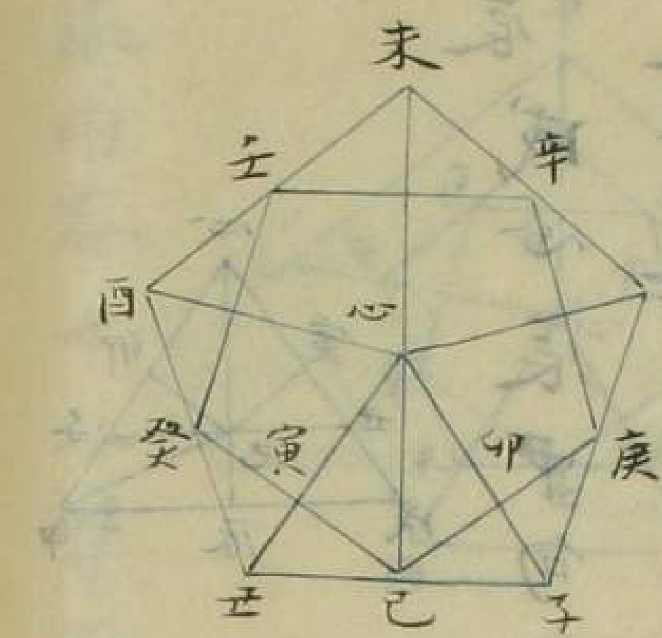
如辰心成心辰甲句股形。既得巳卯。倍之為巳庚。即內容十二等
面之一邊
二十等面體內容十二等面之圖



第一圖。原形如五面扁錐。心尖銳起。甲
心戊等三等邊平面凡五。共輳而成一
心尖。乃二十等面四之一
其巳庚辛壬癸五點。皆三等邊平面之
中心。亦即內容十二等面之稜尖所切。

故必先求此點

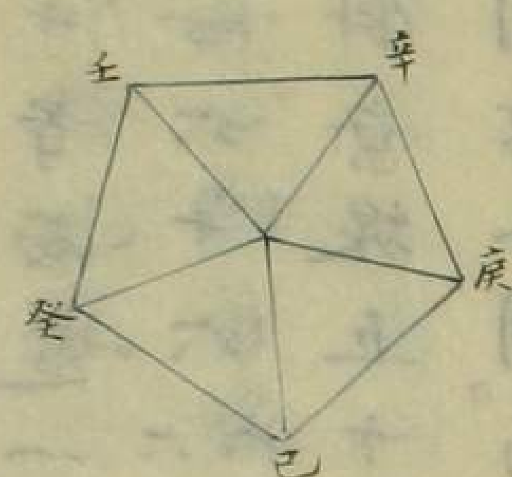
簡法曰。以甲戊邊半之於辰。作辰心對角斜垂線。又以心甲心戊。各取三分之二為心。子心壬乃聯子壬為線。與甲戊邊平行。與辰心垂線。十字交於已點。則已點即甲心戊平面之心。再從子至午作與邊平行線之半即庚點。餘三面盡如此作平行線。則辛點在午未線。壬點在未酉線。癸點在酉壬線。但半之皆得心矣。



第二圖剖形。是五等邊平面

因前圖所作子壬等平行線橫剖之。去其中高之尖。成子午未酉壬五等邊平面。此平面之心點。在前圖心頂之內。惟子壬等邊線。是原形所作平行線。在體外可見。餘皆以剖而成

乃從各角作線至心。如子心等分形為五。皆平面三角形。而心子等線。皆小於子壬邊。因子已原邊及子心壬角。求得心已垂線。及子心對角線

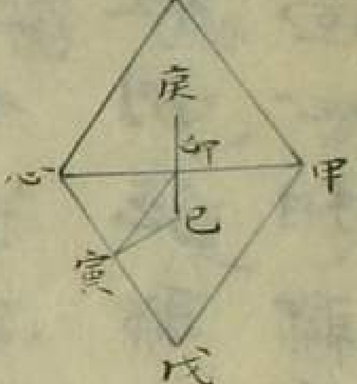


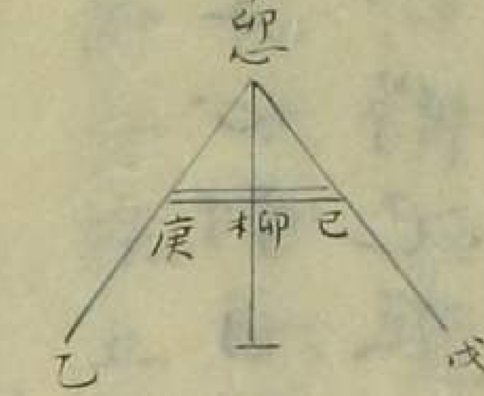
第三圖正用之形。即內容十二等面之一面

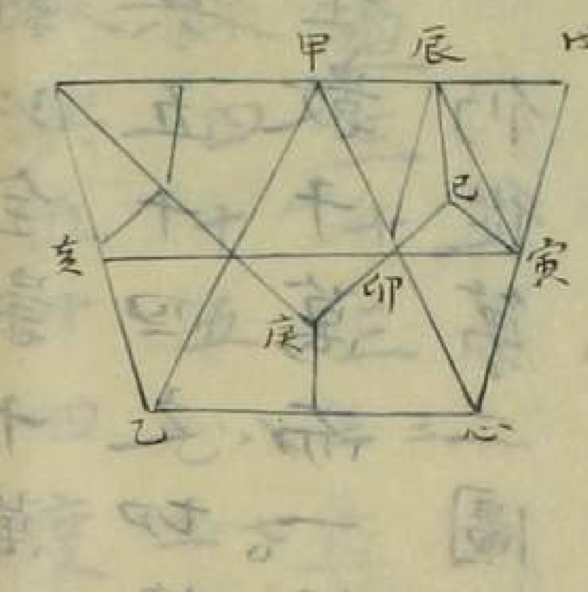
因前第二圖各平分其邊。得已庚辛壬癸五點。即原形之平面心。又聯此點作已庚等直線。則成此形。以此形為內容十二等面之一面。則已庚等五點。為十二等面之銳角。而皆切二十等面之平面心矣

求已庚線法。因心子對角線。及心已垂線子已原半邊得已卯。
倍之為已庚
第一圖
設二十等面邊一百　甲戊等五邊甲心等五棱頂線並同
則子心六十六六六　子壬平行線同。皆為原邊三之二
心已斜垂線五十七七三五。為心辰斜垂線三之二
以上用第一圖。乃斜立面也
第二圖
子已半邊三十三三三　子心對角線五十六七九九。
已心垂線四十五八七九二
法為全數與五十四度之割線。一七一三。若子已邊與子心也。子

已乘割線以全數十萬而一。得子心
又全數與五十四之切線。一三七六三八若子已邊與已心也。子已乘
切線以全數十萬而一。得已心。凡全數除降五位
第三圖　仍從第二圖生
已庚等兩平面心。相距線五十三五八一六　其半已卯二十六七九
心。
法為子心對角線與已子半邊。若心已垂線與已卯也
倍已卯得已庚
求得二十等面邊一百　內容十二等面。其邊五十三五八一六
提法。但用法聯兩平面之中心點。即為內容十二等面之邊
兩平面心相聯為直線之圖



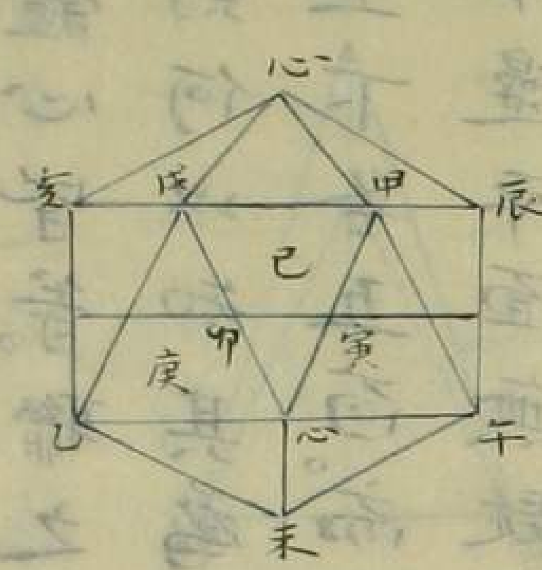




乙心甲及戊心甲面等邊平三角面。以甲心邊為同用之邊。而甲心陰起如屋之山脊。而平面之中心為己為庚。聯為己庚線。與甲心為十字。然不緊相切何也。甲心既隆起。則甲心折半之卯在己庚折半之柳點上。其距為卯柳

試側視之。則甲心戊面。變為戊卯線。甲心乙面。變為卯乙線。而甲卯心線。變為卯點。己庚點在平面。原近甲心點。為卯戊卯乙三之一。則卯柳之距。亦為垂線三之一矣

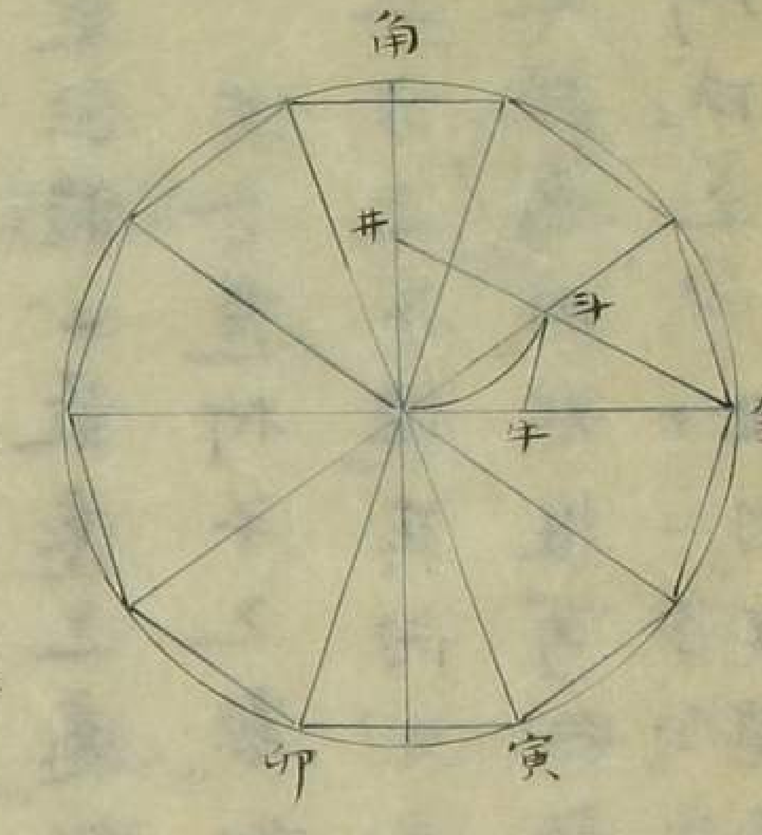
二十等面從腰橫剖之圖



凡二十等面體。其面之邊皆等。而皆斜交。故邊皆高於面。面之中心如己如庚。是距體心最近之處。故為內容渾圓及十二等面所切之點也

邊之兩端。又高於其折半之處。邊所輳為尖。如甲如戊如乙如心等。是距體心最遠之處。故為外切渾圓。及外切十二等面之尖也　其各邊折半之點。如寅如卯。其距體心在近遠酌中為外切立方之半徑。其內切之己庚。外切之甲戊乙心等。賴寅卯距心之線為用。然後可知。故其用最要

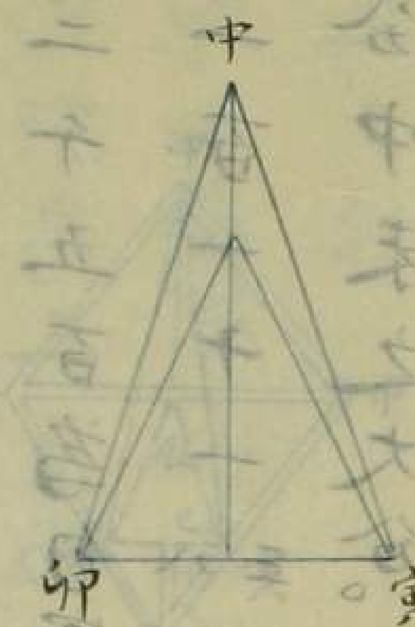
橫剖所成之面。十二等面。從腰橫剖。其根亦同



問各邊既高於面。而又斜交。何以能橫切成平面乎。曰。從右圖觀之。甲戊尖最高。則其所對之乙心等邊似平矣。而乙心等尖亦高。則其所對之甲戊等邊又平。一高一平。彼此相制。而成相等之距。故寅卯等折半之處。其距體心皆等。聯之為線。即成相等之線而皆平行也

然則何以知其為十等邊平面。曰。准右圖上下各五面。其腰圍亦上下各五面。而大牙相錯成十面。今各從其半邊割之。則必為十邊平面無疑也

如圖奎卯寅十等邊平面。以中為心中寅中卯。皆原體心與其邊折中處相距之半徑。亦即為外切立方之半徑也。於前圖作外切之奎角卯寅平圖。則寅卯等。即為分圓線。乃全圈十分之一。當三十六度



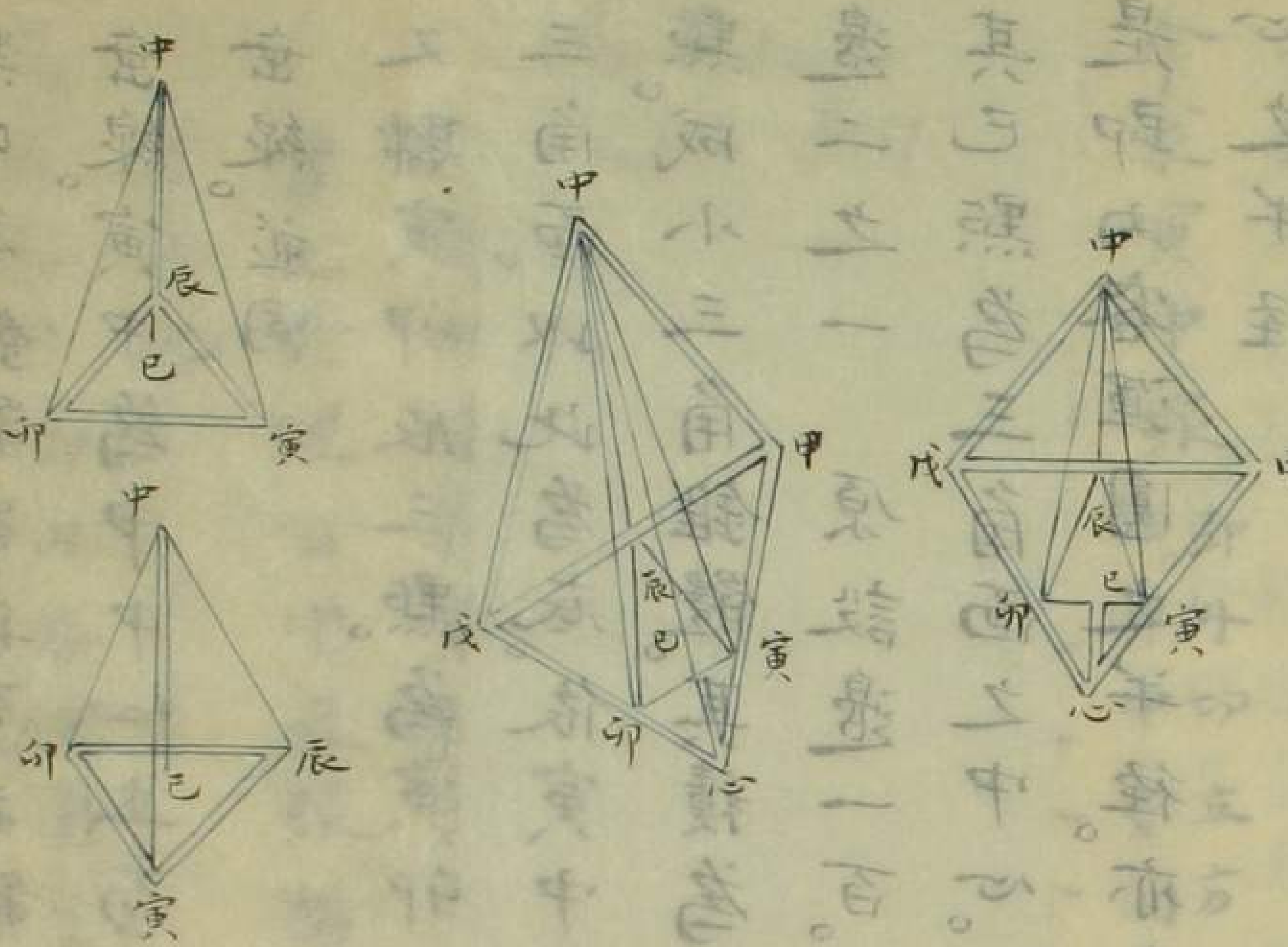
理分中末線圖

奎中為全徑。井中為半徑。以半徑設五十為句。全徑設一百為股。求其弦得一百一十一八〇二三九八為井奎。以井為心。中為界。作圓分如中斗。截井奎線於斗。則井斗亦半徑也

以井斗減井奎。其餘斗

奎。即為理分中末線之大分亦即奎半以奎半為度作點于倍徑
之圈周而徧。即成十千分圈周之點。聯其點為線。即成寅卯等
十等邊。故十等邊之寅卯等。即本圈半徑之理分中末大分也。
若奎中為半徑。則并中為半半徑亦同
奎中全數半徑設一百　寅卯必六十一八〇三三九八即半徑理分中
末之大分奎半即奎半
理分中末線　法以全數一百之冪一萬。為股冪。其半五十之
冪二千五百為句冪。并得一萬二千五百為弦冪。開方求其根。
得一百一十一八〇三三九八以半數五十減之。得六十一八〇三三九八為
理分中末之大分。即三十六度之分圓線也
半之為十八度之正弦。三〇九〇一六九九。八線表作三〇九〇二

二十等面分體之圖



甲戊心為二十等面之一面。其三邊
等中為體心
甲中戊中心中。皆各面之銳角距體
心之線。又為體外切渾圓及外切十
二等面之半徑
以甲戊心面為底。依甲中戊中心中
三線。剖至體心中。成三角錐體。為二
十等面體二十之一
錐體之底。各以其三邊半之。於寅於
辰於卯。從此三點作線。而體心之中

點。皆為錐體各立面之斜垂線。如辰中。即為甲中戌立面之斜垂線。寅中為甲中心立面之斜垂線。卯中為戌中心立面之斜垂線。並同

又聯寅卯辰三點。為寅卯卯辰辰寅三線。成寅卯辰小等邊平三角面。以此為底。依寅中卯中辰中三斜垂線。剖至體心之中點。成小三角錐體。其積為大三角錐四之一。其寅卯等邊為原邊二之一 原設邊一百。則寅卯五十

其巳點為三角面之中心。大小並同 巳中即分體之中高 大小錐體同 是即內容渾圓之半徑。亦即內容十二等面體各尖距其體中心之半徑

其辰中卯。寅中卯。卯中辰。皆立三角面。皆為橫剖。成十等邊平面之分形。故寅卯與寅中之比例。若理分中末線之大分。與其全數也

今求寅中線。即外切立方半徑。卯中亦同

一率　理分中末之大分　六十一八〇三三九八

二率　全數　一百

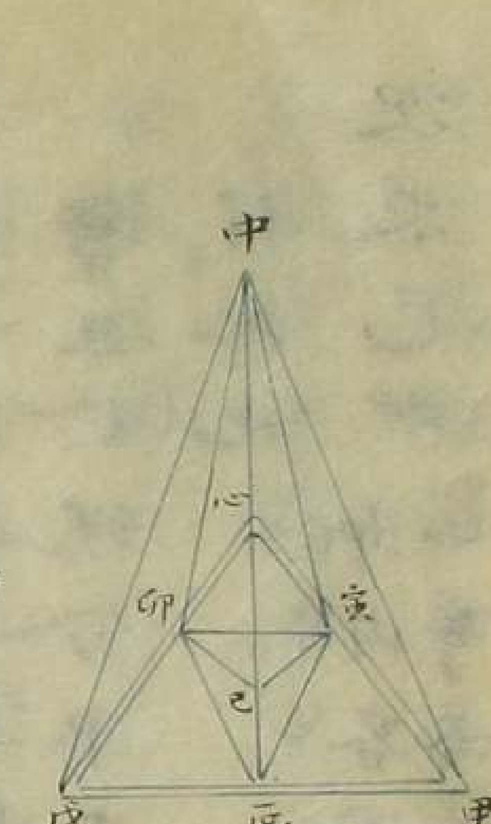
相乘得五千

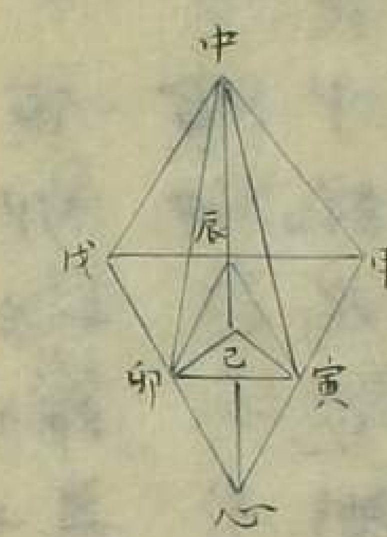
三率　寅卯 剖形十等邊之一。即原邊之半　五十

四率　寅中　八十〇九〇一七

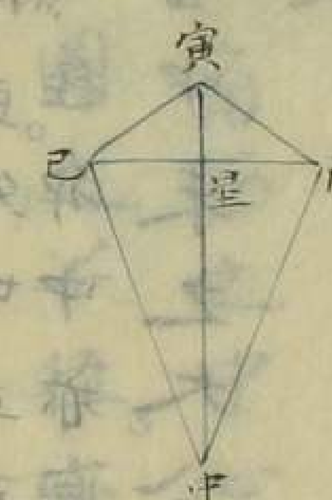
按寅中線為量體之主線。既得此線。即可以知餘線。而此線實生於理分中末線。幾何原本。謂理分中末線。為用最廣。蓋謂此也

次求巳中 即內容渾圓。及十二等面之半徑





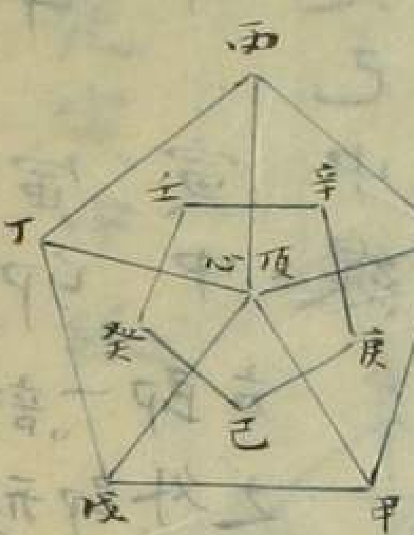
甲戊原邊。設一百半之於寅。作寅巳
垂線至巳心。乃平面心
巳寅二十八八六七五為句。其冪八百三
十三三三三三用提法以邊冪一萬。取
十二之一得之
寅中八十。九〇一七為弦。其冪六千五
百四十五。〇八五〇
句冪減弦冪。餘五千七百一十一七五一七
開方得股。為巳中七十五五七六一



訂定寅中線
一率 理分中末線大分 六十一八〇三三九八

二率 全數 一百 相乘得五千
三率 寅卯 剖形十等邊之一。即原邊之半 五十
四率 寅中 即外切立方之半徑 八十。九〇一七
訂定巳中線
甲戊邊原設一百半之於寅作寅巳線
巳寅句二十八八六七五 冪八百三十三三三三三
寅中弦八十。九〇一 冪六千五百四十五〇八五〇
巳中股冪五千七百一十一七五一七 根七十五三六一
末求巳庚線兩平面心相聯。即內容十二等面之邊
一率 寅中 八十。九〇一七 為大弦
二率 巳中 七十五五七六一 為大股

三率　寅巳二十八八六七五　為小弦
四率　巳星二十六九六七二　為小股
倍巳星得五十三九三四四為巳庚
解曰。中寅巳大句股形。與巳寅星小句股形。同用寅角。則其比例等。而為相似之形，故也
巳庚等線相聯成五等邊平面圖



准前論。甲心戊等三角平面。合二十面為廿等面體。則甲心等邊線。皆高於平面而邊線之端五相輳。即為尖角。如心點依此推知甲乙丙丁戊點皆必與他線五相輳而成尖角矣。

其巳庚辛壬癸各點為各平面之最中央在體為最平之處。故內容之渾圓。及內容之十二等面。各尖必切此點今依前法。求得巳庚等點相聯為直線。則凡五平面相輳為尖。必有各中央之點相聯為線。而皆成五等邊平面形矣。此平面形正與心尖相應

依此推知甲乙丙丁戊各點皆能為尖。則其周圍相輳之五平面。亦必各以其中央之點相聯為線。而皆成五等邊平面形

二十等面體。以五邊線相輳之尖。凡十有二。每一尖之周圍。皆有五平面。即皆有其中央之點。相聯而成五等邊平面。亦十有二

如此而內容十二等平面體已成。故曰但聯巳庚二點為線。即

內容十二等面之邊也

求甲中線即外切渾圓及十二等面之半徑。心中戊中並同

寅甲為原邊之半設五十。其冪二千五百為句冪

寅中為外切立方半徑八十。九〇一七

其冪六千五百四十五。〇八五。為股冪并句股冪九千〇四十五

〇八五〇平方開之。得甲中弦

依法求得甲中九十五。一〇六五

求體積

設邊一百。其半五十斜垂線八十六。六〇二五相乘得面冪四

千三百三十。一二五。

又以己中高七十五。五七六一乘面冪。得柱積三十二萬七千二百

五十三。九六〇

三除之。得分體積一十〇萬九千〇八十四。六五

以二十乘之。得全積二百一十八萬一千六百九十三

十二等面分體之圖

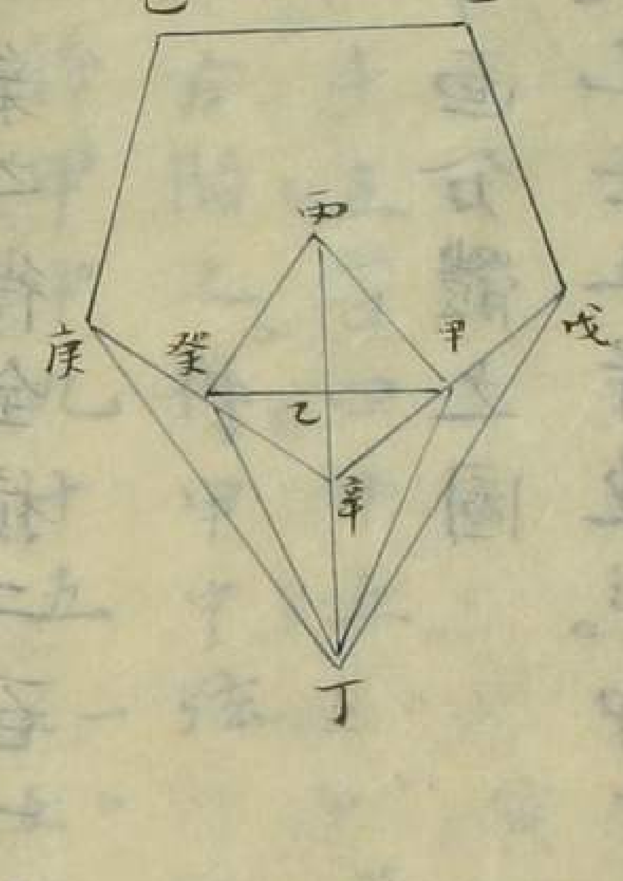
戊辛庚己壬五等邊形。即十二等面立體之一面　亦即分體

形之底。乃五面立錐形之底丙為平面心

丙丁為平面心。至體心之垂線。亦即分體形之中高。又為體內

切渾圓之半徑。亦即為內切二十等面之半徑

丁為全體之中心。又為十二分體之上銳。即五等面立錐形之頂
戊辛壬庚等。皆各面之外周線也。即邊為體之稜。亦名之為根
自分面之心丙作垂線至邊如癸丙甲
丙分各邊為丙。其分處為癸為甲。即各邊折半處
乃自癸至甲聯為癸乙甲線。又自
此線。向丁心平剖之。成甲丁癸三



角形面。各分形。俱如此切之。成十等邊平面形。故丁癸丁甲。皆
分體形。自頂銳至各邊之斜垂線。在所切之十等邊平面形。即
為自丁心至平面角之線。甲癸等點。在各邊為折中。在切形之平面則對角

又自丁至體周各角之線。如丁辛丁庚丁戊等。在分體即為自底角至頂
銳之稜。又為外切渾圓之半徑。又為外切二十等面之半徑
先算十二等面之面。即戊辛庚己壬
法為全數與五十四度之切線。若甲辛與甲丙也　以甲丙棄
甲辛又五棄之得戊辛庚己壬五角面積甲丙辛角為五等邊之半角三十六度。其
餘角甲辛丙。必五十四度
次算面上大橫線即甲癸
又全數與三十六度之正弦。若甲丙與甲乙也。倍甲乙得甲癸
次算中高線丙丁
法為全數與七十二度之割線。若甲乙與甲丁也因平切十等邊為三十六
度。半之為十八度。其餘角
七十二度。即乙甲丁角

乃以甲丁為弦。甲丙為句。兩冪相減。開方得股即丙丁也
次算分體之積
法以中高丙丁乘戊辛庚巳壬底而取其三之一為分形積
末以十二為法。乘分形積得總積
簡法。以分形中高乘底。又四乘之即得總積。三歸三因。對邊省角

算甲丙

一率 全數 一〇〇〇〇〇

二率 五十四度切線 一三七六三八

三率 設根之半 甲辛 五〇 相乘得六八。八九

四率 甲丙 六八 以全數除之。減五位為畸零

算甲乙

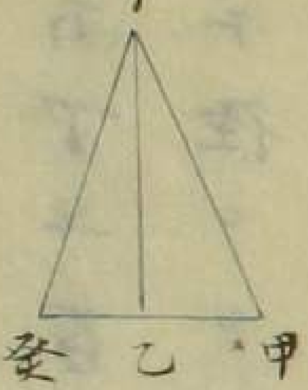
法為全數與三十六度之正弦。若甲丙與甲乙也

一率 全數 一〇〇〇〇〇

二率 三十六度正弦 五八七七九

三率 甲丙 六八八一九。

四率 甲乙 四〇四五一



甲癸為橫切十等邊平面之一。其半為甲乙丁。即總形之心。亦橫切平面之心

算甲丁

法為全數與十八度之餘割。若甲乙與甲丁也

一率 全數 一〇〇〇〇〇

二率 七十二度割線 三二三六〇七

三率　甲乙　四〇四五一一
四率　甲丁　一三〇九〇二五
算丙丁中高線
法以甲丁為弦　甲丙為句　求得股為丙丁
算得丙丁一百一十一三五二六為中高線。亦即十二等面形内渾
圓之半徑
算五等邊面冪
法以甲丙乘甲辛五十。得三千四百四十。九羊。又五乘之。得
一萬七千二百。四七五。為五等邊邊各一百之平冪。亦即十二等
面分形之底積
算總積

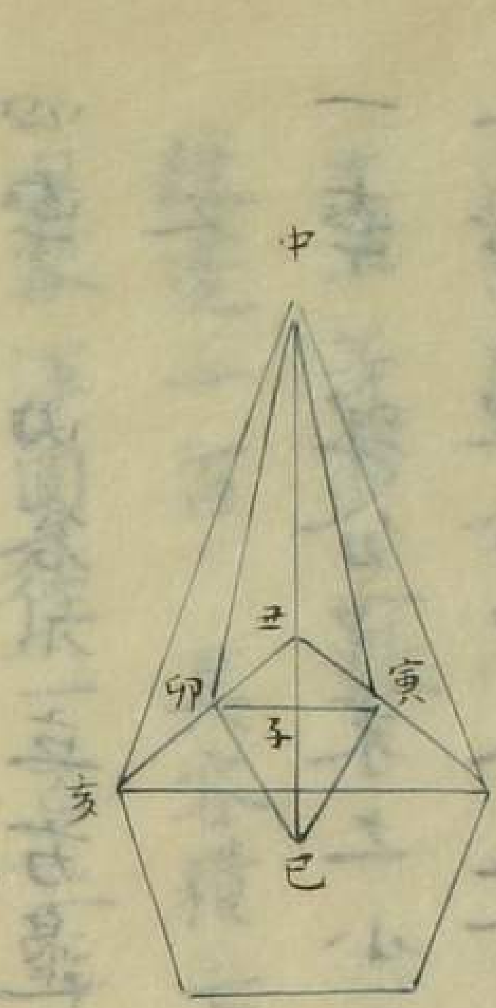
用簡法以底積一七二〇・四七五。四因・得六八九九。以乘中
高。得七百六十八萬二千二百一十五八七四。為十二等面
之積
計開十二等面　例容
一率　七六八二二一五　例邊上立積
二率　一〇〇〇〇〇　設容
三率　一〇〇〇〇〇　求得設邊上立積
四率　〇一三〇一七〇
立方法開之。得其根五十
與比例規解合。與測量全義差四千一百七十四。為二百分
之一

算辛丁（庚丁 丁並用 戊）又卽為外切渾圓半徑
法以甲丁股冪。三五一七一 甲辛句冪〇二五 并為弦冪。一九六三五 求
得弦數一百四十。為辛丁。卽外切圓半徑
計開
十二等面之數
設邊一百。 其容積七百六十八萬二二一五
內容渾圓徑一百二十二 外切渾圓徑二百八十
捷法。十二等面邊。求外切內容之立方。及外切之立圓
置十二等面邊。為理分中末之小分。求其大分。為內容立方邊。
內容立方邊。自乘而三之。開方得外切立圓全徑
又置十二等面邊為理分中末之小分。求其全線。為外切立方邊

一率 理分中末之小分 三十八一九六六〇一。 或用 理分中末之大分 理分中末之全線一百
二率 理分中末之大分 六十一八〇三三九八
三率 十二等面之邊
四率 內容小立方邊 卽大橫線
又

一率 理分中末之小分
二率 理分中末之全分
三率 十二等面之邊
四率 外切立方邊
以十二等面邊。減外切立方邊。餘為內容立方邊

以内容立方邊。加十二等面邊。即外切立方邊
又捷法。但以十二等面邊加大横線。即小立方邊 即外切立方邊
立方内容十二等面算法 用理分中末線



一 此五等邊面為十二等面之一
已為平面心 中為體心
寅卯為戌亥大横線之半。〇三十〇九〇一六九
九卯中寅中為外切立方半径。五十
戌亥為面之大横線。六十一八。三三九八 為理分中末之大分。亦即内
容小立方之根
已寅已卯。俱平面容圓半径
已中為内容立圓半徑。即分體中高

壬中為外切立圓半径。亥中戌中並同
設立方根一百為径 半径五十為寅中卯中 理分中末大
分之半為寅卯。三十。九一六九九 又半之為寅子。〇一十五四五八四九五五 為
理分中末大分四之一
一率 全數 一〇〇〇〇〇
二率 五十四度之割線 一七〇一三〇。
三率 寅子 一十五四五〇。八四九五 相乘
四率 寅已即卯已 二六二八六五
求得卯已為平面中垂線
一率 全數 一〇〇〇〇
二率 三十六度之切線 〇七二六五四 相乘

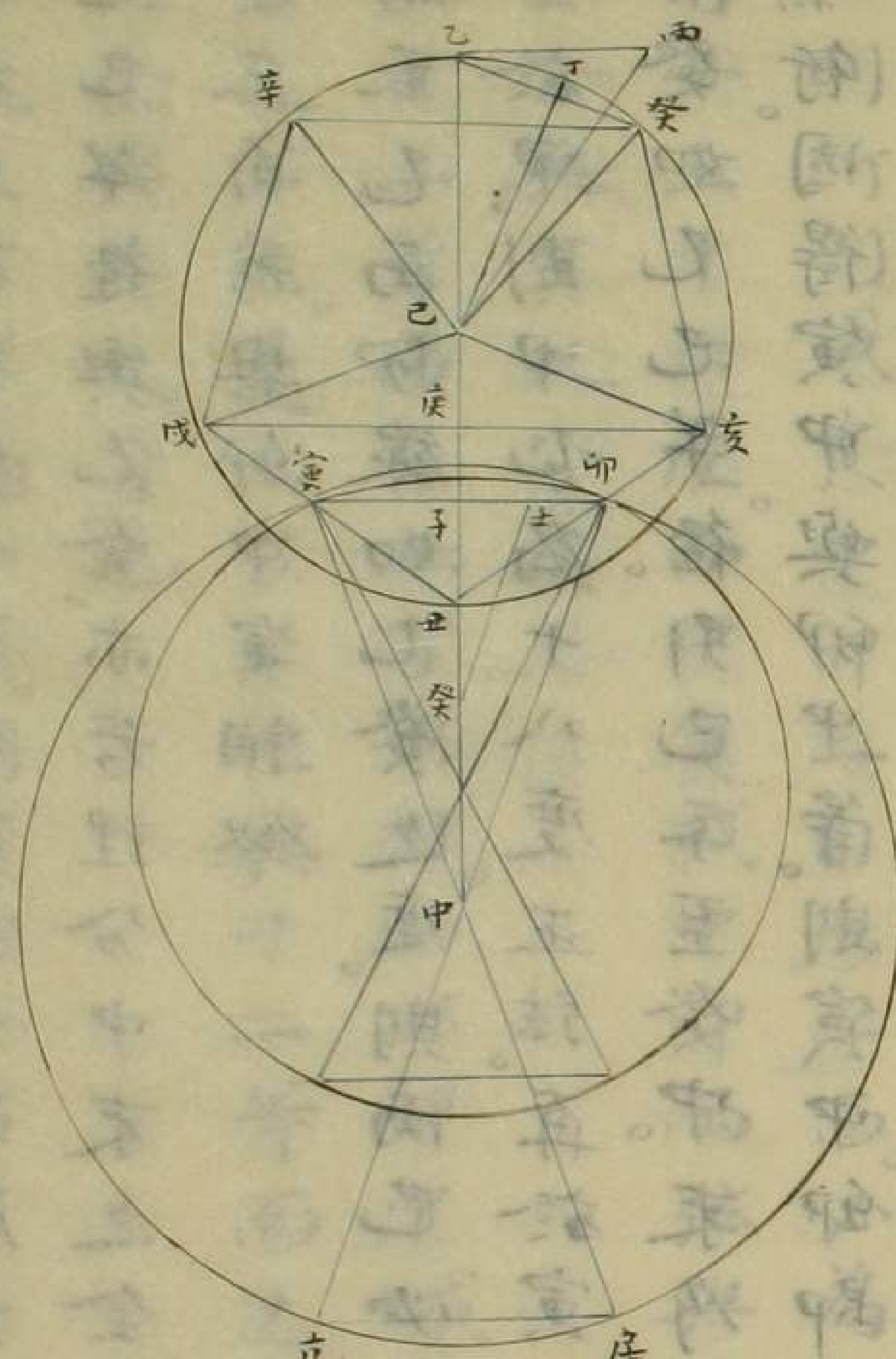
三率　卯巳　　　　二十六二八六五
四率　卯壬邊即半　一十九。九八二
倍卯壬得壬亥邊三十八一九六四即十二等面邊。乃理分中末
大分之大分也。以此知大横線與五等邊為理分中末之全
分。與其大分之比例也。
卯巳句冪。六九。九八卯中弦冪二五。。。。相減為股冪一八。九
。二　開方得巳中四十二五三二五為內容渾圓半徑
卯壬句冪。三六四七四一二四三卯中股冪二五。。相併為弦冪二八六四
七四一二四三　開方得壬中。五十三五二三二為外切渾圓半徑
壬亥巳卯相乘。五因二除。為面冪。以乘巳中。而四因之。得十二
等面積

簡法
十二等面內容小立方。六十一八三三九八。即理分中末之大分。蓋戌
亥大横線。倍大於寅卯故。也　大横線。即小立方之邊
以大横線之冪三因之。開方得亥中。為外切渾圓半徑壬中同
又立方根與所容十二等面邊。若全數與理分中末之小分
約法
立方根與其所容十二等面體內小立方之根。若全數與理分
中末之大分
凡立方外切渾圓。則圓徑上冪三倍於方冪
　計開
立方設徑一百

内容十二等面邊三十八一九六六〇一
内容小立方邊六十一八〇三三九八
外切渾圓徑一百〇七〇四六六二五　即壬中亥中倍數
外切渾圓半徑五十三五二三三　即壬中亥中
内容渾圓半徑四十二五三二五　即己中　為分體中高
内容渾圓全徑八十三〇一六五
内容二十等面邊四十四七二一一

十二等面體分圖

用理分中末線



辛戊亥五等邊形。為十二等面之一寅卯點為邊折半處中為體心卯中為外切立方半徑設五十卯亢為外切立方全徑設一百寅卯線與卯中半徑。若理分中末之大分與其全數也。在圓内

為三十六度之分圓辛癸辛戌等。俱七十二度之分圓
乙巳為半徑。巳壬同乙癸為三十六度之通弦
乙巳半徑與乙癸。亦若理分中末之全數與其大分也。故乙巳
癸三角形與卯中寅相似
若取乙丙切線如乙癸之度。則丙巳必同亥癸邊。即七十二度通弦折
半於甲。則甲乙為十八度正弦。再於寅卯線取子壬如乙甲取
壬癸如乙巳半徑。引巳子至癸中。末乃自卯作線至中。與壬癸
平行。因得寅中與卯中等。則寅中卯即為橫切之半面一
一率　全數　一。。。。。
二率　三十六度割線　一二三六〇七
三率　子寅　一十五四五〇八四九五　相乘

四率　壬寅半邊　一十九〇九八三
倍壬寅得壬戌三十八一九六六與簡法合
諳曰。凡十二等面。從其半邊之點如寅如卯聯為線。以剖至體之心。
中點則所剖成寅中卯三角形平面。必為全圈十之一。即寅中卯
角必三十六度。而中寅或中卯兩弦與寅卯底。若理分中末之
全分與其大分矣
又十二等面在立方形內。必以卯中或寅中自心至邊之線。當立
方之半徑。是立方半徑與十二等面之寅卯線。亦若理分中末
之全與其大分也
若設立方半徑一百。則寅卯必六十一八〇三三九八如理分中末之
大分也。今設立方全徑一百。其半徑五十。則寅卯亦必三十。

九〇一六九九如大分之半矣

寅卯二點。既在壬戌壬亥兩邊之折半。則戌亥大橫線。必倍大於寅

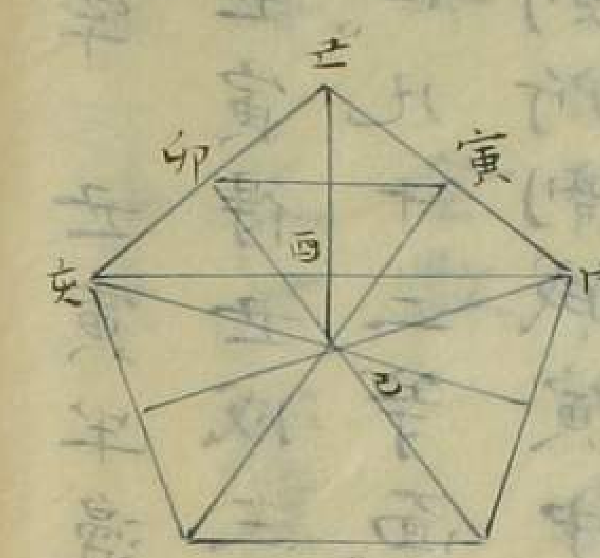
卯。而與理分中末大分之全相應。為六十一八〇三三九八

此皆設立方半徑五十之數也。而半徑五十。其全徑必一百。故

知設徑一百。則十二等面之大橫線必六十一八〇三三九八而竟同

理分中末大分之數也

既得此大橫線。則諸線可以互知



試先求邊

法為酉戌。半大橫線與壬戌等邊。若全數與三

十六度之餘割線也

一率　全數　一〇〇〇〇〇

二率　三十六度割線　一二三六〇七

三率　酉戌半大橫線　三十〇九〇一六九九

四率　壬戌全邊　三十八一九六六

論曰。五等邊各自其角作線至心。分形為五。則各得七十二度

角。如壬巳戌等。其巳角皆七十二度。其半必三十六度。如寅巳壬之巳角。得戌巳壬之半。正三十六度。

而壬戌酉與壬巳寅皆句股形。又同用壬角。則戌角與巳角等

為三十六度

十二等面求積

平面中垂線。巳卯　二十六二八六五

邊即壬亥壬戌等　三十八一九六六

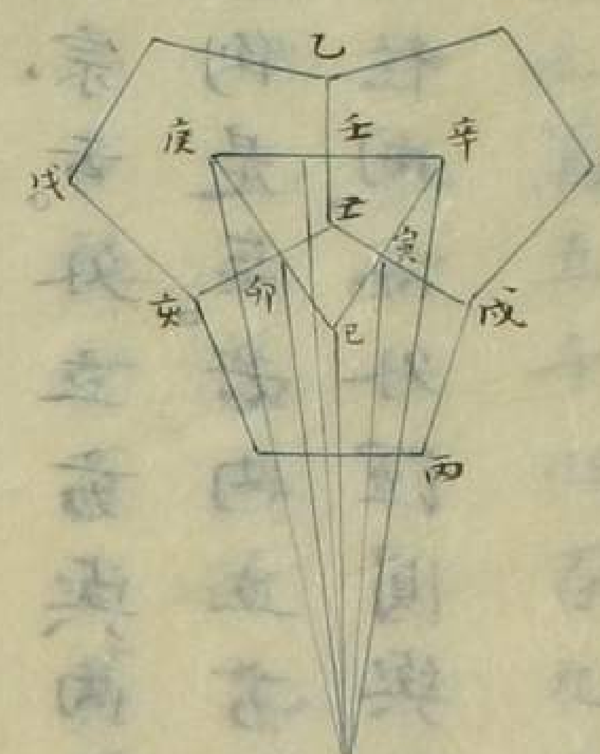
半邊即壬卯壬寅　一十九〇九八三

一面之平冪二千五百一十。一三七〇
內容渾圓半徑四十二四三二五即分體五面立錐之中高已中
中高三之一一十四一四四一
分積三萬五千四百九十五八四七三
為十二之一　其形為五面立錐。其體積
全積四十二萬五千九百五十。一六七六
外切立方根一百　其積一百萬
外切渾圓徑一百。七〇四六六
內容立方根六十一八〇三三九八
外切立方與體內容立方徑之比例。若理分中末之全分與其
大分

又若外切立方之外。又切十二等面體。體外又切大立方。則大
立方之徑。與今所算外切立方徑。亦若理分中末之全分。與其
大分而外切之十二等面。與其內十二等面徑。亦必若理分中
末之全分與其大分也
孔林宗云。外立方與內立方之徑。為理分中末線。全分與大分
之比例是矣。若內立方之內又容立圓。則小立圓之徑與小立
方之徑同。而外渾圓與外立方之徑不同。似未可以前比例齊
之
若十二等面外切大立方。大立方之外又切大立圓。大立圓外
又切十二等面。則大立圓與內容小立圓。亦必若理分中末之
全分。與其大分。而外切十二等面。與十二等面。亦必若理分中

末之全分與其大分。何則。皆外切立方。與内容立方之比例也。

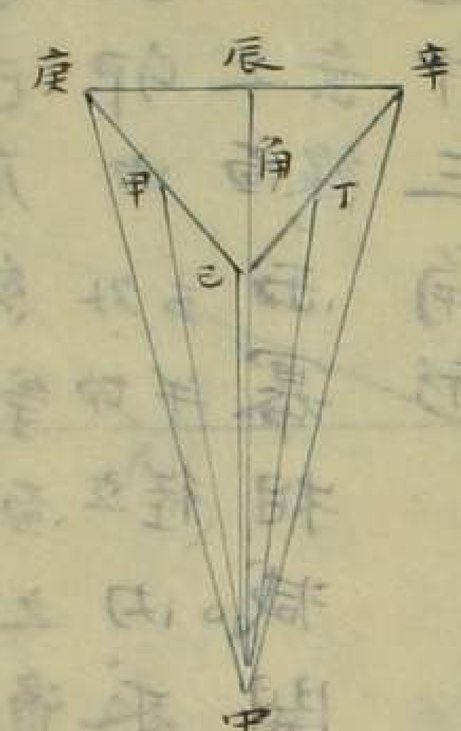
十二等面容二十等面圖



第一圖

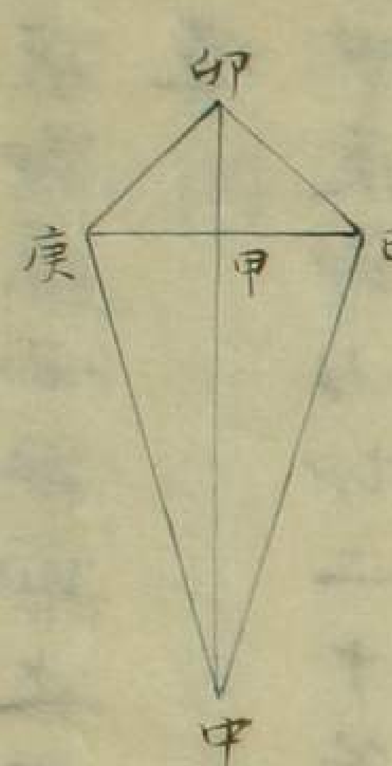
割十二等面之三平面一尖。成此形。癸壬丙壬戊壬俱五等邊平面皆十二等面之一。己庚辛。各為其中心一點

壬為三平面棱所聚之尖亥壬戊壬乙壬。俱平面邊。各為兩平面所同用之棱中為體心。己中辛中庚中。皆内切渾圓半径。亦内容二十等面。自尖至體心半径。己卯庚卯己寅辛寅辛壬庚壬。俱平面中垂線寅卯壬皆平面邊折半之點



第二圖

内容二十等面體。各自其邊剖至心。成此分體。為内容體二十分之一辛庚己三角尖。即十二等面之中心原點。此點以外。俱剖而得。甲點與卯點。同在卯中線。而甲在卯之下。丁在寅下。辰在壬下。俱同。



第三圖

自卯點起。依卯己卯庚二線。剖至體心中。成此平面形

卯即原邊折半處

卯中即原體

外切立方之半徑 中即體心

已庚即原兩平面之中心點今聯為已庚線即內容二十等面之一邊

已中庚即內切二十等面分體之立面。乃三角錐體之一面

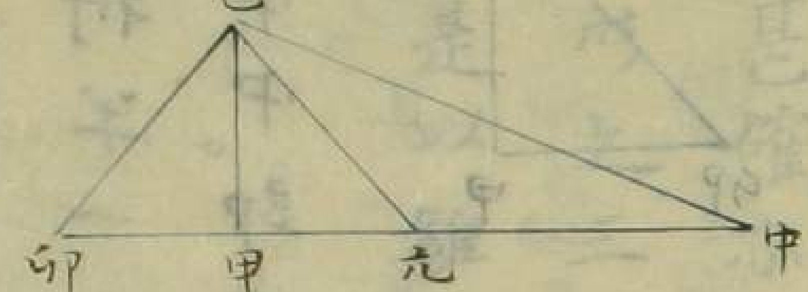
甲中為內切二十等面分體之斜垂線 觀第二圖可明 第二圖角點。居剖四三角之中心。正對原體之正尖。而在其下。故角中為內容分體之正高。而甲中為斜垂線也

今求已庚線 即內容二十等面之邊 法於卯中 外切立方半徑 內求甲中以相減得卯甲為股。用與卯已弦 原體之面上中垂線。兩冪相減。開方得句為已甲。倍之得已庚

卯已中三角形

卯中即外切立方半徑設五十為底

卯已即原體之平面中垂線二十六 二八六五



已中即內容渾圓半徑。亦即內容二十等面分體之斜稜四十二 五三二五

以卯已已中兩弦相減為較。相并為總。以總乘較為實。卯中底五十為法。除之得亢中二十二 三六〇六 以減卯中。餘二十七 六三九四 為亢卯。折半得一十三 八一九七 為卯甲。

計開

立方根設一百。其半五十 即卯中 亦為十二等面自體心至邊

十二等面之平面中垂線 即卯已 二十六 二八六五

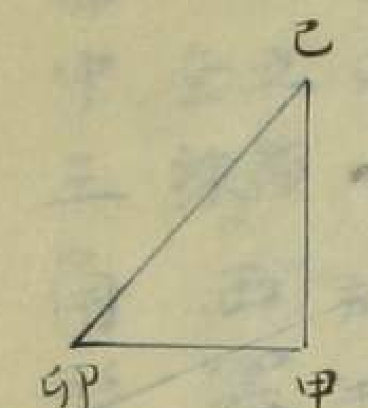
十二等面内容渾圓半徑。即巳中四十二五三二五亦為内容二十等面。自尖角至體心分體。以為錐體之稜

卯巳巳中之較一十六二四六〇總六十八八一九〇

較總相乘一千一百一十八〇三三四為實。卯中五十為法除之。

得甲亢二十二三六〇六以中亢減卯中。五十餘二十七六三九四為

亢卯折半一十三八一九七為卯甲 以卯甲減卯中。餘三十六一八〇三為甲中。即内容二十等面分體之斜垂線



卯巳自乘。得六百九十。九八〇〇為弦冪

卯甲自乘得一百九十。九八四一為股冪

相減餘四百九十九九九五九為句冪

開方得巳甲二十二三六〇五倍之得巳庚

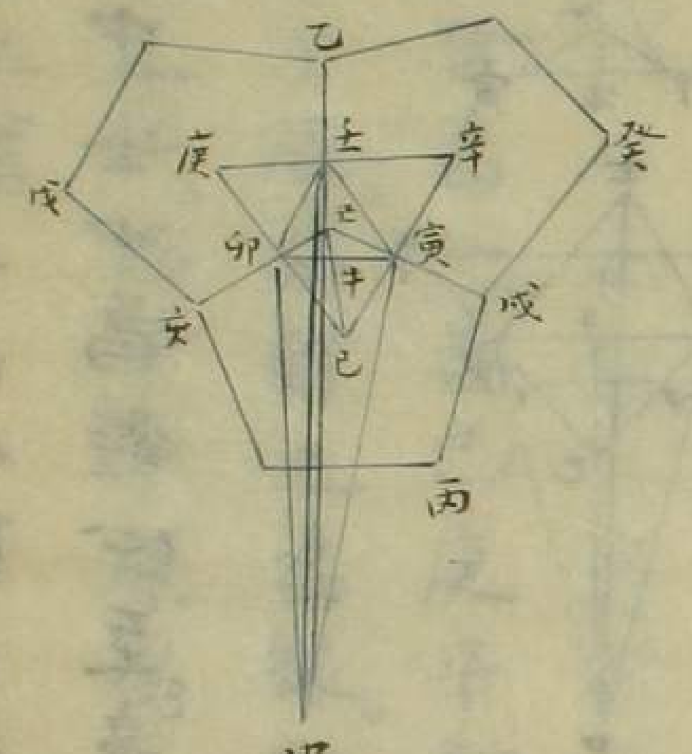
四十四。七二二一即為内容二十等面邊

此法甚確。亦且甚捷。無可疑者。偶於枕上。又思得一法。借燈

體分形之三角錐。以求十二等面。内容二十等面分體之三

角錐。是以錐體相截。而知其所截之邊。即為内容二十等面

之邊



第一圖

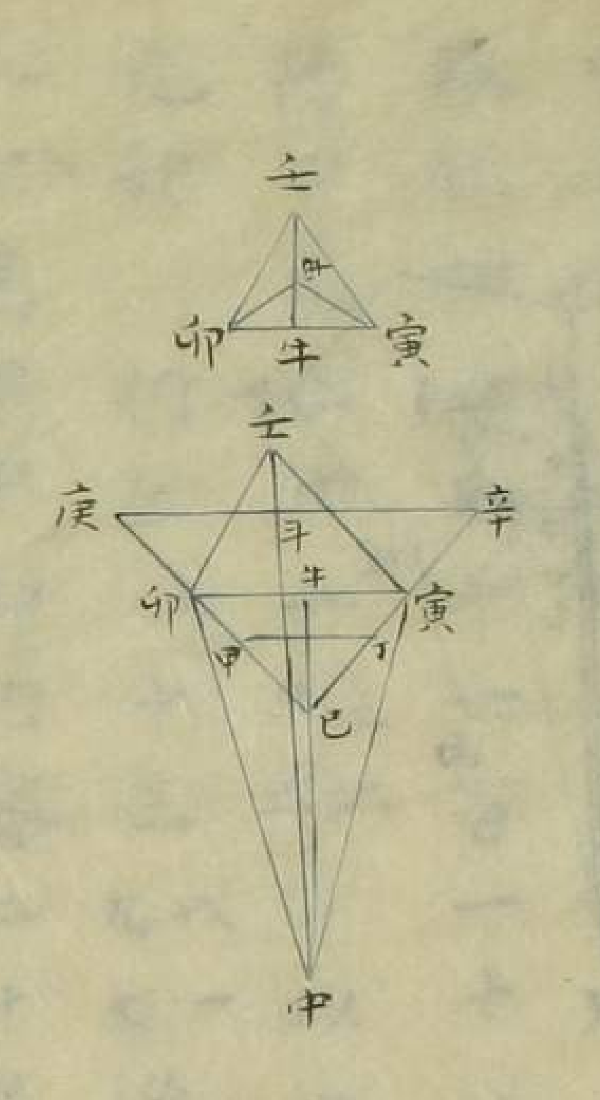
壬為三平面所聚之尖 壬戌壬

亥壬乙。皆两平面同用之稜 巳

庚辛。皆五等邊平面之心 巳寅

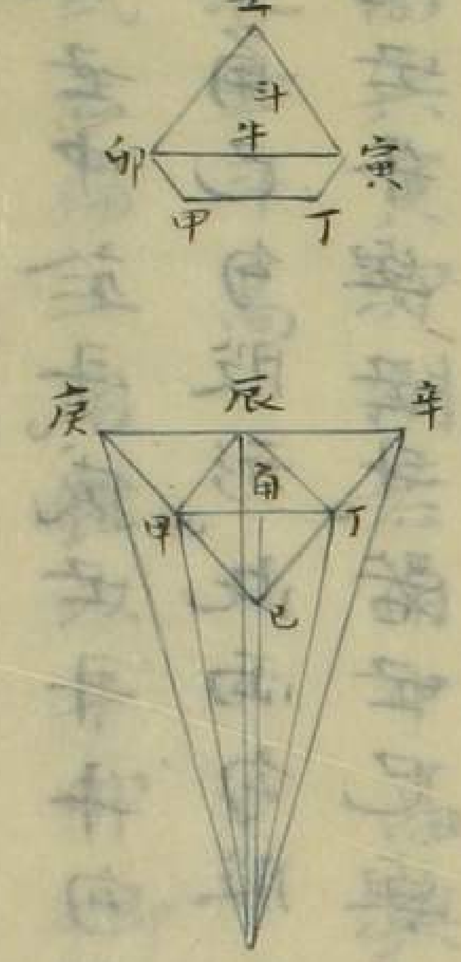
巳卯等。皆平面心至邊垂線

己午壬為平面心對角線　寅卯壬皆平面邊折半之點　寅中卯中壬中為體心至邊線。即外切立方半徑　中為體心



第二圖

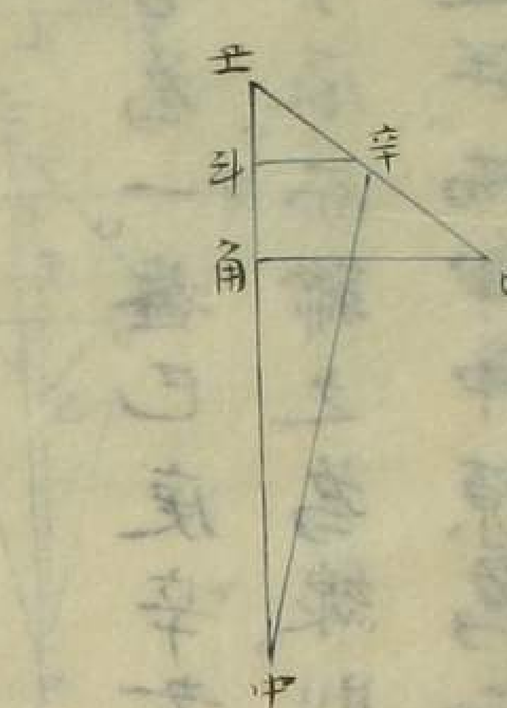
聯寅卯卯壬壬寅三線為平三角面。橫剖之。又各依寅中卯中壬中線剖至體心中。則成三角錐體二。其一為壬寅卯壬體。是三角錐而稍扁者也。其一為寅卯壬中體。是三角錐而稍長者也。其寅卯壬三角平面。為扁形之底。又為長形之面。其寅卯等線。與寅中卯中之比例。皆若理分中末之大分。與其全分也。其扁形錐既剖而去。則成圓燈。所存長錐。即燈形分體之一平面心之點為斗在壬尖下。與午點平。故壬午為弦。則斗午如句。而壬斗之距如股也



第三圖

又於圓燈分體。剖去辰甲丁之一截。則成甲丁辰中三角錐。乃十二等面內容二十等面分體中之分體。其辰甲丁面。與巳庚辛脗合為一。蓋巳庚辛者。內容二十等面之一面。各於邊折半為甲丁辰。而聯之為線。則成小三角於中。故辰丁等線。皆居巳庚線之半。而甲中原為二十等面分體之斜垂線者。今則為三角錐之摺

第四圖

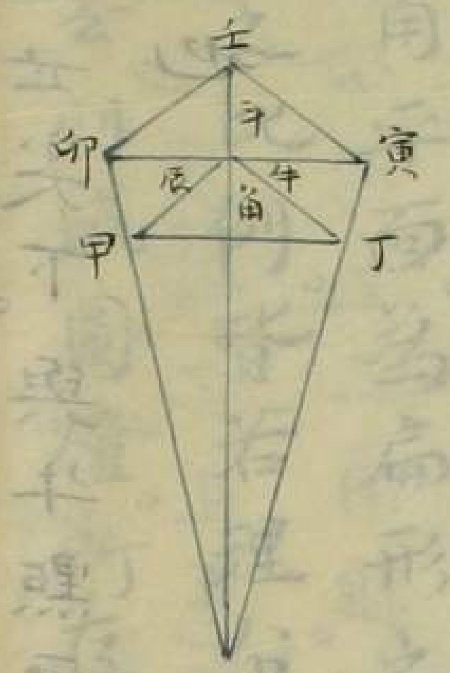


己牛壬即原平面從心至角尖之線。壬斗角中。即原體自尖至中心之線。又為外切渾圓半徑

依第二圖。截壬己於牛。而橫剖之。亦截壬中於斗。成壬斗牛勾股形成壬角己勾股形。此兩勾股形相似而比例等

法為壬牛與壬斗。若壬己與壬角也

第五圖



寅中卯三角形為圓燈分體之立面。截為甲丁中三角形。此兩形相似而比例等　法為卯中與卯寅若甲中與甲丁也

斗中中為圓燈分體之中高。其平面為寅卯壬角中中為截體之中高。其平面為丁甲甲辰。此兩體相似而線之比例等　法為斗中高與寅卯濶。若角中高與甲丁濶

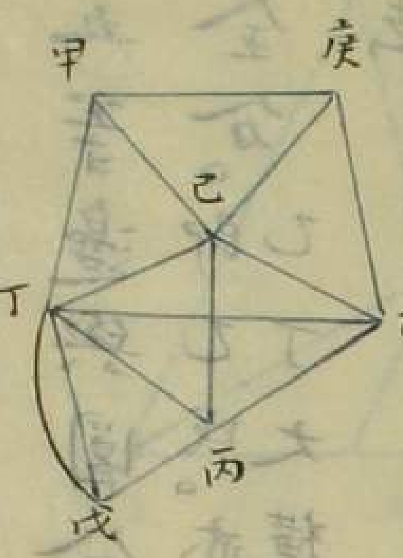
先求壬斗高

用截去扁三角錐。以牛卯即寅卯之半自乘冪三分加一。以減壬卯冪為壬斗冪。開方得壬斗高

次求壬角高

用己壬對角線乘壬斗。以壬牛除之。得壬角高　其壬牛線。以牛卯冪減壬卯冪。開方得壬牛　己寅壬寅兩冪并。開方為己壬

末求己庚線
用壬角減丑中。得角中。又用壬斗減丑中。得斗中開以角中
乘寅卯。以斗中除之得甲丁。倍甲丁得己庚。為內容二十等面
之邊

理分中末線面以量代算


先以己為心作圓。而勻分其邊為五。作
甲庚乙丙丁五等邊平面。即十二等面之一面
乙丁為大横線。設一百。甲庚等邊必六
十一八〇三三九八為大横線理分中末之大
分若乙丁大横線。設六十一八〇三三九八則甲庚等邊必三十八
一九六六。亦為大横線理分中末之大分
設立方一百內容十二等面邊三十八。一九六六為理分中末之
小分。亦即大分之大分
十二等面內又容小立方。其邊與十二等面之大横線等六十
一八〇三三九八。為大立方邊一百。與十二等面邊三十八一九六六之中

率。何也。大立方一百。乘十二等面邊三十八一六六九開方得根。即小立方及大横線六十一八。三三九八

若大横線自乘之冪。以十二等面邊除之。即仍得外立方根。而以外立方根。除大横線冪。必仍得十二等面之邊矣

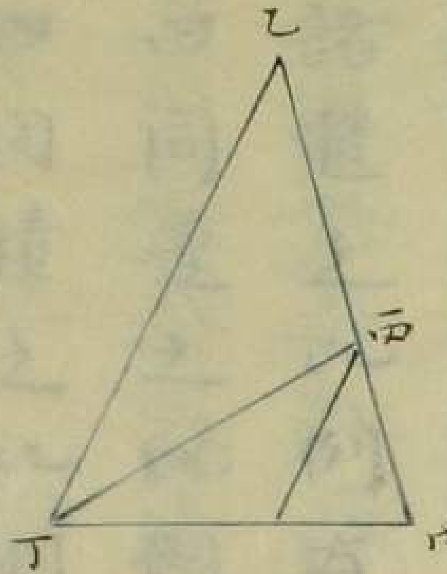
求理分中末線捷法　用前圖

作五等邊平面　求其大横線丁乙　聯丙角為線即得之

次以大横線之一端如乙為心。其又一端如丁為界。作丁戊圓分。乃引五等邊與圓分相遇。如引乙丙至戊。與圓分遇于戊。則相遇處如戊至圓心如乙為全分。即乙戊。亦即乙丁大横線。原邊為大分。即乙丙引出餘邊為小分。即丙戊

又法

作平三角。使丙角如戊如丁俱倍大於一角。如乙末乃破一倍角。平分之。作線至一邊。如平分丁角為丙。作丁丙線至乙戊邊則其斜線。即為理分中末之大分。即丁丙也



解曰。倍破角則與小角等。如破丁角為丙。皆與乙角等而乙丙丁形之乙丁丙角同大。則乙丙丁丙兩弦亦同大。而乙丙既為大分。丁丙亦為大分矣。准此又破丙角。可以通求於無窮

諸體比例

凡諸體之比例有三

一曰同邊之比例可以求積

一曰同積之比例可以求邊

一曰相容之比例可以互知

內相容之比例亦有三

一曰立圓內容諸體之比例　所容體又容立圓

一曰立方內容諸體之比例　所容體又容立方

一曰諸體自相容之比例即同徑同高之比例　或兩體互相容　或數體遞相容

等積之比例　比例規解所用。今攷定

立方積　一〇〇〇〇〇　其邊一百

四等面積　一〇〇〇〇〇　其邊二百〇四

八等面積　一〇〇〇〇〇　其邊一百二十八

十二等面積　一〇〇〇〇〇　其邊五十

二十等面積　一〇〇〇〇〇　其邊七十七

方燈

圓燈

一凡方燈依楞剖之縱橫斜側皆六等邊平面

一凡圓燈依楞剖之縱橫斜側皆十等邊平面

故皆有法形體

等邊之比例　測量全義所用。今攷定

立方邊　一〇〇　積一〇〇〇〇〇

方燈體邊　〇七〇七一〇六　積〇八三三三三二

邊　一〇〇　積二三五七〇二一

八等面邊　〇七〇七一〇六　積〇一六六六六六

邊　一〇〇　積〇四七一四〇四

四等面邊　一〇〇　積〇一一七八五一

十二等面邊　一〇〇　積七六八二二一五

二十等面邊　一〇〇　積二一八一八二二

圓燈體邊　〇三〇九〇一七　積〇二九〇九二九

邊　一〇〇　積

等徑之比例　皆立方所容

立方徑　一〇〇積一〇〇〇〇〇〇邊一〇〇

內容方燈徑　一〇〇積〇八三三三三三邊〇七〇七一〇六

內容四等面徑　一〇〇積〇三三三三三三邊一四一四二一三

內容八等面徑　一〇〇積〇一六六六六六邊〇七〇七一〇六

內容立圓徑　一〇〇積〇五二三八〇九

內容二十等面徑　一〇〇積〇五一五二二六邊〇六一八〇三四

內容十二等面徑　一〇〇積〇四二五九五〇邊〇三八一九六六

內容圓燈徑　一〇〇積〇二九〇九二九三邊〇三〇九〇一七

右以立方為主而求諸體

內立方及燈體之徑。為自面至面

四等面。十二等面。二十等面之徑。皆自邊至邊。以邊折半處作垂線。至對邊折半處。形如工字。四等面。則上下邊遙相午錯如十字。八等面之徑。為自尖至尖　然皆以其徑之兩端。正切於立方方面之中心一點。立方六面其相切亦必六點

求積約法

凡立方內容諸體皆與立方之六面同高同闊　則燈形積為立方積六之五　四等面積為立方積三之一　八等面積為立方積六之一　以上三者皆方斜比例

燈形及八等面。皆以方求斜法。以邊自乘倍之。開方得外切立方徑。以徑再自乘。得立方積。取六之五為燈。六之一為八等面積

四等面則以方求其半斜。法以邊自乘半之。開方得外切立方
徑。以徑再自乘為立方積。取三之一為四等面積
立圓在立方内。則其積為立方積二十一之十一
謹按方圓比例祖率圓徑一百一十三。圓周三百五十五。見
鄭世子律學新説。較徑七周二十二之率為密。又今推平圓
居平方四百五十二分之三百五十五。較十四分之十一為
密。又推得立圓。居立方六百七十八分之三百五十五。較二
十一分之十一為密
准立方比例。以求各體自相比。皆以同高同闊。同為立方所
容者較其積
燈内容同高之八等面為八等面得燈積五之一。又立圓
内容同高之八等面為八等面得圓積六十六之二十一。即二十二之七
二者皆同高。而又能相容
用課分法毋。互乘子得之
八等面六之一　二十一　七　若徑
立圓二十一之十一　互得　六十六　約得　二十二　若圓
之准比而知立圓内容八等面。其積之比例。若圓與徑也
又立方内容十二等面。其内又容八等面又立方内容二十
等面。其内又容八等面　二者亦同高而能相容
同高之四等面積。為燈積五之二。即十之四以燈面四因。退位得四等面積
同高之八等面積。為四等面積二之一
同高之四等面積為立圓積十一之七

四等面　三之一　互得　二十一　約得　七
立圓　二十一之十一　　三十三　　十一

比三者。但以同高。同為立方所容。而不能自相容若相容。則不同高

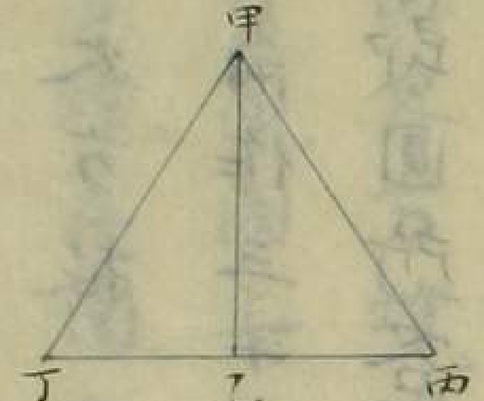
凡立方之燈形內又容立方。則內小立方邊與徑。得外立方三之二。體積為二十七之八。面冪為九之四

凡燈容立方。以其邊為方。而求其斜。為外切之立方邊。取方斜三之二為內立方邊

立方邊一〇〇　面冪一〇〇〇〇　體積一〇〇〇〇〇〇
燈邊〇七〇七一〇六　面冪〇五〇〇〇　體積〇八三三三三三
小立方邊〇六六六六六六　面冪〇四四四四四　體積〇二九六二九六

凡方內容圓。圓內又容方。則內小方之冪。得大方冪三之一

捷法。以小方根倍之。為等邊三角形之邊。而求其中垂線。即外切立圓之徑。亦即為外大方之邊如圖



三邊既等。則乙丙得甲丙之半。若乙丙一。其冪亦一。而甲丙二。其冪則四。以乙丙句冪一。減甲丙弦冪四。所餘為甲乙股冪三

內方之冪一。而外切渾圓之冪三。故其根亦如乙丙與甲乙也。或以小立方之根為句。倍根為弦。求其股為外切渾圓徑。亦同。渾圓徑。即外方邊

若以量代算。則三角形便

如以大方求小方者則以大方為中垂線。而作等邊三角形。其半邊。即小方根也
或用大方為股。而作句股形。使其句為弦之半。即得之
捷法。句股形。使甲角半於丙角。則弦倍於句。而句與股如小立方根與大方根
或以甲角作三十度。而自乙作垂線引之與甲丙弦線過于丙。則乙丙即圓所容方之根
又按先有大方求小方者。取大方根倍之。為等邊三角形之邊。而求其中垂線。以三歸之。即得
凡立方內容方燈。燈內又容立圓。圓內又容圓燈。燈內又容八等面。凡四重在內其外切於立方也皆同點切立方有六處。所回者皆在其方面之最中一點。若從此一點刺一針。則五層悉透內。惟方燈以面切面。不可言點。若言點。則有十二。皆切在立方邊折半處
凡立方內容方燈。燈內又容十二等面體。體內又容圓燈。燈內又容八等面。凡四重在內其切于立方也皆同處。凡六處皆在立方面內。方燈體以面切面十二等面。以邊切餘皆以尖切。尖切者。皆每面之最中點
凡立方內容方燈。燈內又容二十等面體。體內又容圓燈。燈內又容八等面。同上
凡立方。方燈。立圓。十二等面。二十等面。圓燈。內所容之八等面。皆同大
凡立方內容四等面體。體內又容八等面。其切立方皆同處四等面以邊切為立方六面之斜。八等面以尖切居立方各面中心。即四等面邊折半處
准此而知立方內所容之八等面。與四等面所容之八等面亦

同大且同高。各體中所容八等面皆同大。因此可知

凡立圓內容十二等面體　又容立方。其立方之角。同十二等面之尖而切於立圓。故立圓內所容之立方。與十二等面內所容之立方同大

凡二十等面體內容立圓　內又容立方。立方之角切立圓以切二十等面之面。故立圓所容之立方。與二十等面內所容之立方必同大

凡二十等面體內容立圓　內又容十二等面體。體內又容立方此立方之角切十二等面之角以切立圓而切于二十等面之面皆同處

凡諸體能相容者。其相容之中間。皆可容立圓。此立圓為外體之內切圓。亦為內體之外切圓

惟八等面外切二十等面。十二等面。四等面。及圓燈。其中間難着立圓。何也。八等面之切圓燈。以尖切尖。而其切四等面。十二等面。二十等面。則以尖切邊。故其中間。不能容立圓

其他相切之中間。能容立圓者。皆以內之尖。切外之面

凡諸體在立方內。即不能外切他體。惟四等面在立方內。能以其角同立方之角切他體。故諸體所容四等面之邊。皆與其所容立方之面為斜線

凡諸體相容其在內之體為所容。其在外之體為能容。能容與所容兩體之相切。必皆有一定之處

凡相容兩體之相切。或以尖。或以邊即體之稜或以面

渾圓在立方內。為以面切面其相切處只一點。皆在立方每面之中央。立方六面相切。凡六點

立方在渾圓內。為以尖切面。立方之角有八。故相切有八點。有一點不相切者。即非正相容也

渾圓在諸種體內。皆與在立方內同。謂其皆以面切諸體之面。而切處亦皆一點也。然其數不同。如四等面則切點有四。方燈則切點有六。八等面則切點有八。十二等面及圓燈則切點有十二。二十等面則切點有二十。其切點之數。皆如其面之數。而皆在其面之中央也。方燈則以其方面為數。圓燈則以其五等邊之面為數。而不論三角之面者。何也三角之面距體心遠。故不能內切立圓也

諸體在渾圓內。皆與立方在渾圓內同。謂其皆以各體之尖切渾圓之面也。其數亦各不同。如四等面則切點亦四。方燈則切點十二。八等面則切點六。十二等面則切點二十。二十等面則切點十二。圓燈則切點三十。皆如其尖之數也

四等面在立方內。以邊稜切立方之面。四等面有六稜。以切立方之六面。皆偏其四尖。又皆切於立方之角

十二等面。二十等面。在立方內。皆以其邊稜切立方之面。而種各有三十稜。其切立方。只有其六。以立方只有六面也

此三者為以楞切面

八等面在立方內。以尖切面。凡六點

圓燈在立方內。亦以尖切面有六點。皆在立方面中尖。與八等面同

方燈在立方內。則以面切面。皆方面也。方燈之方面六。亦與立方等也。其十二尖。又皆切於立方之十二邊楞。皆在其折半處為點

十二等面與二十等面遞相容。皆以內體之尖。切外體之面

十二等面在八等面內。以其尖切八等面之面體有二十尖。只用其八也

方燈在八等面內。亦以面切面。而皆三角面。方燈之三角面有八。數相等也。又其尖皆切於八等面各稜之中央折半處。稜有十二。與燈之尖正等也

圓燈在十二等面內。以面切面。皆五等邊平面也。圓燈體之五等邊平面。原有十二故也。又皆以其尖切十二等面之邊楞。而皆在其中半

圓燈在二十等面內。亦以面切面。皆三角平面也。圓燈體之三角平面。原有二十故也。又皆以其尖切二十等面之邊楞。而皆在其中半

問十二等面。與二十等面。體勢不同。而圓燈之尖。皆能切其楞邊何也。曰。圓燈有三十尖。而兩等面體。皆有三十楞故也

凡能容之體。皆可改為所容之體。遞相容者。亦可遞改

如立方容圓。即可刓方為圓。渾圓容方。即可削圓為方

遞相容者。如立方內容渾圓。圓內又容十二等面體。體內又容二十等面。即可遞改

凡所容之體。皆可補為能容之體。皆以數求之

如立方外切立圓。以其尖角。則求立方心至角之線。為立圓半徑

凡以面切面者。其情相通

如方燈以其方面切立方面。又能以其三角切八等邊面。則此三者。皆方斜之比例也

又如圓燈以其五等邊面。切十二等面。又能以其三角面。切二十等面。則此三者。皆理分中末之比例也

若反用之。而令立方在方燈之內。則立方之尖所切者。必二角面。若八等面在方燈之內。則其尖所切。又必方面也

若令十二等面在圓燈內。則所切者必三角面。而二十等面居圓燈內。所切者又必五等邊面也。故曰其情相通

諸體相容

凡立圓立方。皆可以容諸體

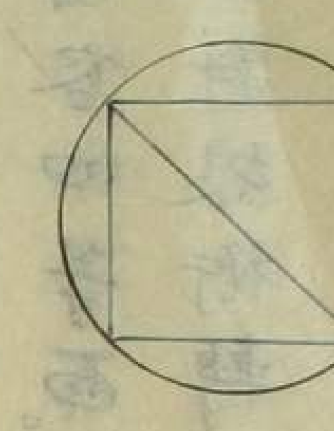
凡立圓內容立方。立方內又可容立圓。兩者不雜他體。可以相生而不窮

凡立圓內容立方。此立方內又可容四等面。四等面又可容立圓。三者以序進。亦可以不窮

凡立圓內容立方。又容四等面。四等面在立方內。以其尖切立圓。與立方尖所切必同點

凡立圓容四等面。在立圓所容立方內。必以其楞為立方面之斜。依此斜線衡轉成圓柱形。必為立圓之所容。而此柱形又能含立方

外圓者柱之底若面。內方者。立方之底若面直而斜者。四等面之邊



凡四等面體在立圓內。任以一尖為頂。以所對之面為底。旋而作圓錐。此錐體必為立圓之所容。而不能為立方之容

此兩體雖非正相容體。然皆有法之體

凡立方內可容八等面。八等面又可容立方。而相與為不窮

凡立方有六等面八尖。八等面有六尖。故二者相容。則所容體之尖。皆切於為所容大體之面之中央而等

凡立方內容立圓。此立圓內仍容八等面。其八等面尖切立圓之點。即可為切立方之點

八等面內容立圓。此立圓內仍容立方。則立方尖切立圓之點。亦即可為其切八等面之點

凡立圓可為諸等面體所容。其在諸體內。必以圓面一點。切諸體之各面。此一點皆在其各等面之中心而等而徧

凡八等面內容立圓。仍容立方。此立方內仍容四等面。而四等面。以其角切立方角。即可同立方角切立圓以切八等面。疊串四體。皆一點相切。必在八等面各面之中心

立方設一百。內容二十等面邊六十一八〇三三九八內又容立圓九十三四一七二

簡法。取內容立圓徑冪三之一。開方得內容小立方。再以小立方為理分中末之全分。而求其大分。得內容十二等面邊

凡十二等面。二十等面皆能為立圓之所容。皆以其尖切渾圓

凡十二等面。二十等面。皆能容立圓。皆以各面之中心一點。正與渾圓相切

凡十二等面。與二十等面。可以互相容。皆以內體之尖。切外體之各面中心一點

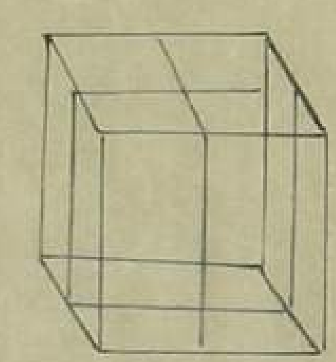
凡十二等面內容渾圓。渾圓內又容二十等面。與無渾圓者同徑。二十等面內容渾圓。渾圓內又容十二等面。亦與無渾圓同徑。何也。渾圓在各體內。皆以其體。切於外體各面之中心點。而此點即各內體切渾圓之點故也

以上皆可以迭串相生而不窮

凡十二等面內容渾圓。渾圓內又容十二等面。亦可以相生不窮

二十等面與渾圓遞相容亦同

凡立方內容十二等面。皆以十二等邊。正切於立方各面之正中凡六。皆遞相對如十字

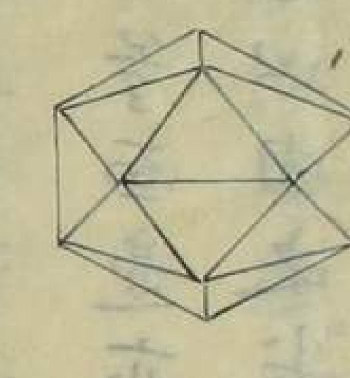


假如上下兩面所切十二等面之邊横。則前後兩面所切之邊必縱。而左右兩面所切之邊又橫。若引其邊為同線。則六處相交。皆成十字

立方內容二十等面邊亦同

凡各體相容。皆以內之尖切外之面。惟立方內容四等面。則以角而切角。立方內容十二等面。二十等面。則以邊而切面

二十等面以邊切立方之圖



十二等面以邊切立方之圖