

曆算全書

三角法舉要 卷四至卷五

第二冊

二奴5

1614

2



門二奴5
1614
卷 2



三角法舉要卷四

或問

三角大意略具首卷中。而入算取用。仍有疑端。喜同學之
好問。事事必求其所以然。故不憚為之。詳復以暢厥旨。

一 三角形用正弦為比例之理

一 和較相求之理

一 用切線分外角之理

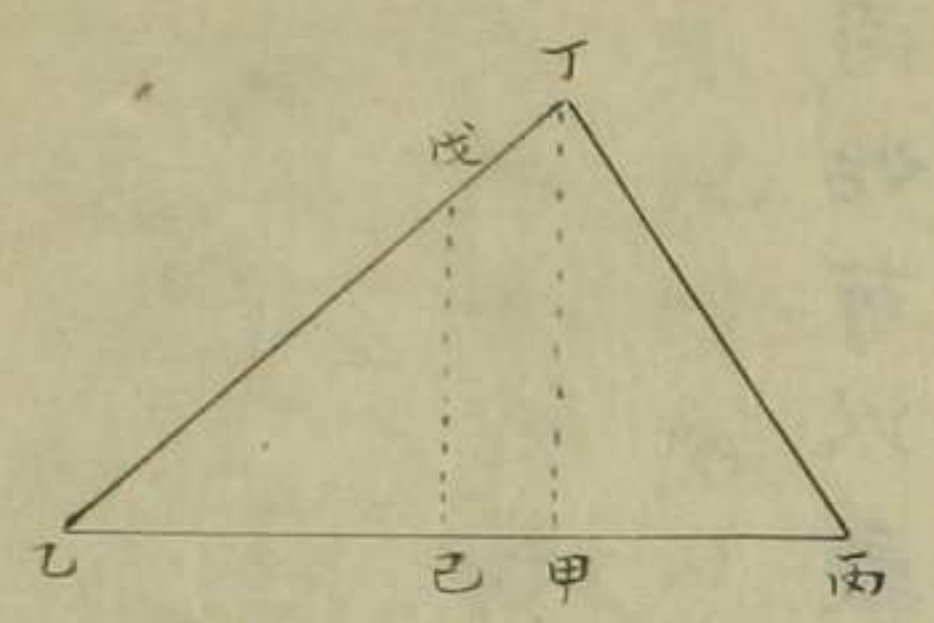
一 三較連乘之理

附三較求角

問三線求角
 一三線求角之野
 一用四線求角之野
 一用五線求角之野
 一用六線求角之野
 一用七線求角之野
 一用八線求角之野
 一用九線求角之野
 一用十線求角之野
 一用十一線求角之野
 一用十二線求角之野
 一用十三線求角之野
 一用十四線求角之野
 一用十五線求角之野
 一用十六線求角之野
 一用十七線求角之野
 一用十八線求角之野
 一用十九線求角之野
 一用二十線求角之野

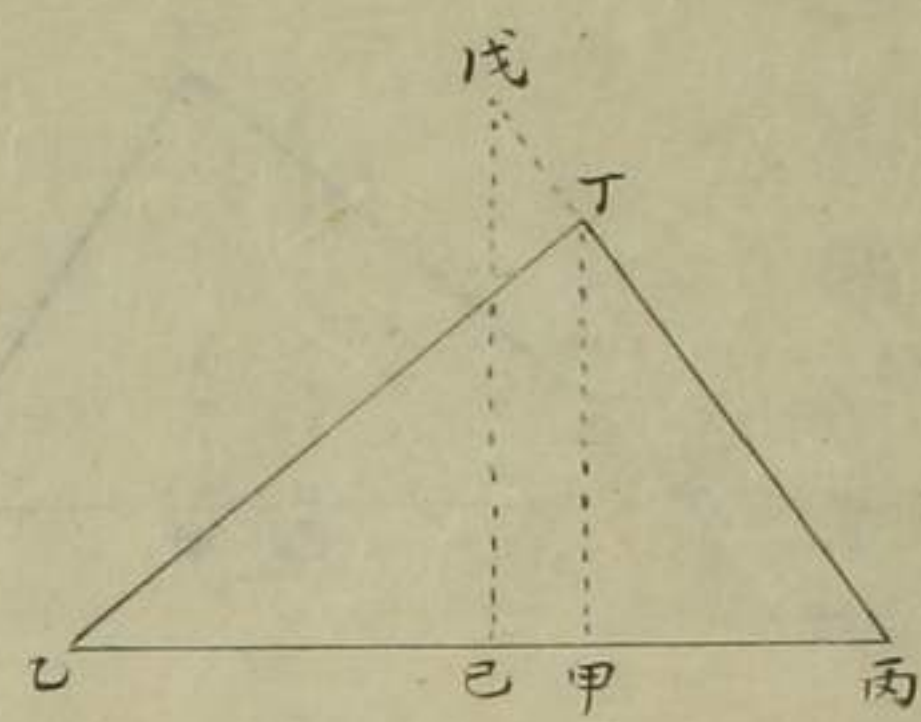


問各角正弦與各邊皆不平行何以能相為比例曰凡三角形
 一邊必對一角其角大者正強大而所對之邊亦大角小者正
 弦小而所對之邊亦小故邊與邊之比例如正弦與正弦也
 兩正弦為兩邊比例圖



乙丙丁三角形丁乙邊大對丙角丁丙邊
 小對乙角術為以丁乙邊比丁丙邊若丙
 角之正弦與乙角之正弦
 解曰試以丁丙為半徑作丁甲線為丙角
 正弦又截戊乙如丁丙半徑作戊己線為
 乙角正弦丁甲正強大於戊己故丁乙邊亦大於丁丙
 問丁甲何以獨為丙角正弦也曰此以丁丙為半徑故也若以

丁乙為半徑。則丁甲即為乙角之正弦



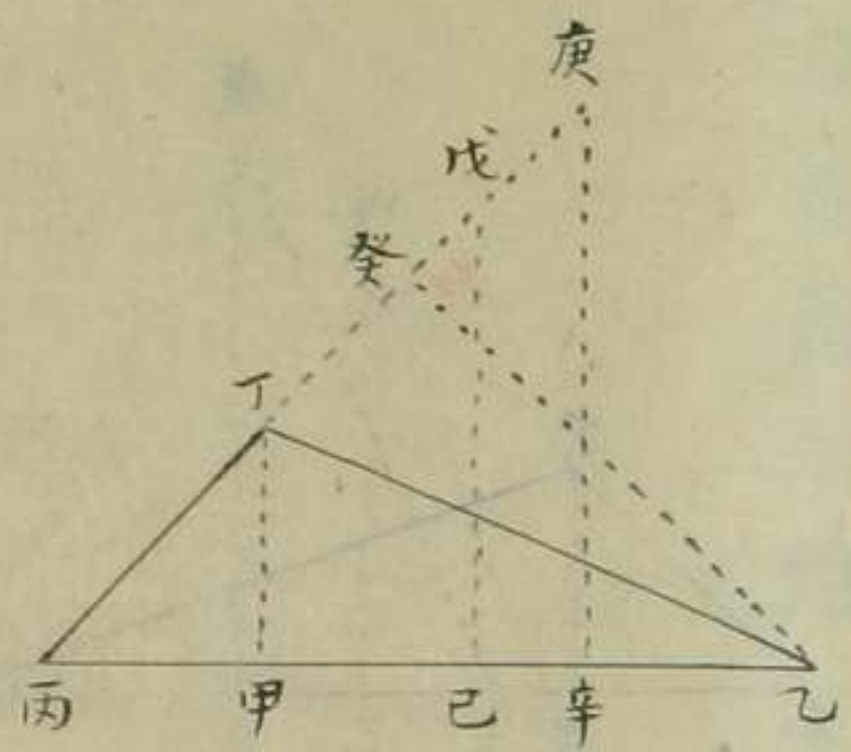
如圖。用丁乙為半徑。作丁甲線為乙角正
弦。又引丙丁至戊。令戊丙如丁乙半徑。作
戊己線為丙角正弦。即見乙角之正弦丁
甲小於戊己。故丁丙邊亦小於丁乙

解曰。正弦者半徑所生也。故必兩半徑齊

同。始可以較其大小。前圖截戊乙如丁丙。此圖引丁丙如丁
乙。所以同之也

三正弦通相為三邊比例圖

乙丁丙鈍角形。丁鈍角對乙丙大邊。丙次大角對乙丁次大
邊。乙小角對丁丙小邊。其各邊比例。皆各角正弦之比例



試以乙丁為半徑。作丁甲線。為乙小角之
正弦。又引丙丁邊至戊。使戊丙如乙丁。作
戊己線。為丙角之正弦。又展戊丙線至庚
使庚丙如乙丙。作庚辛線。為丁鈍角之正
弦。如此則三邊皆若
弦。三正弦皆若股

其比例為以乙丙大邊。同庚 比乙丁次邊。同戊 若丁鈍角之

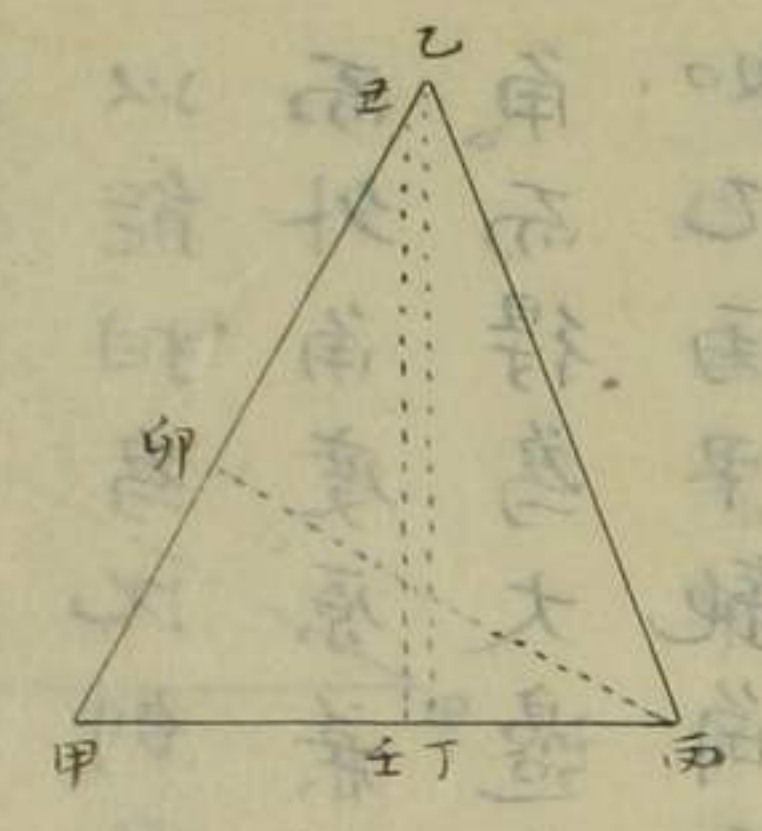
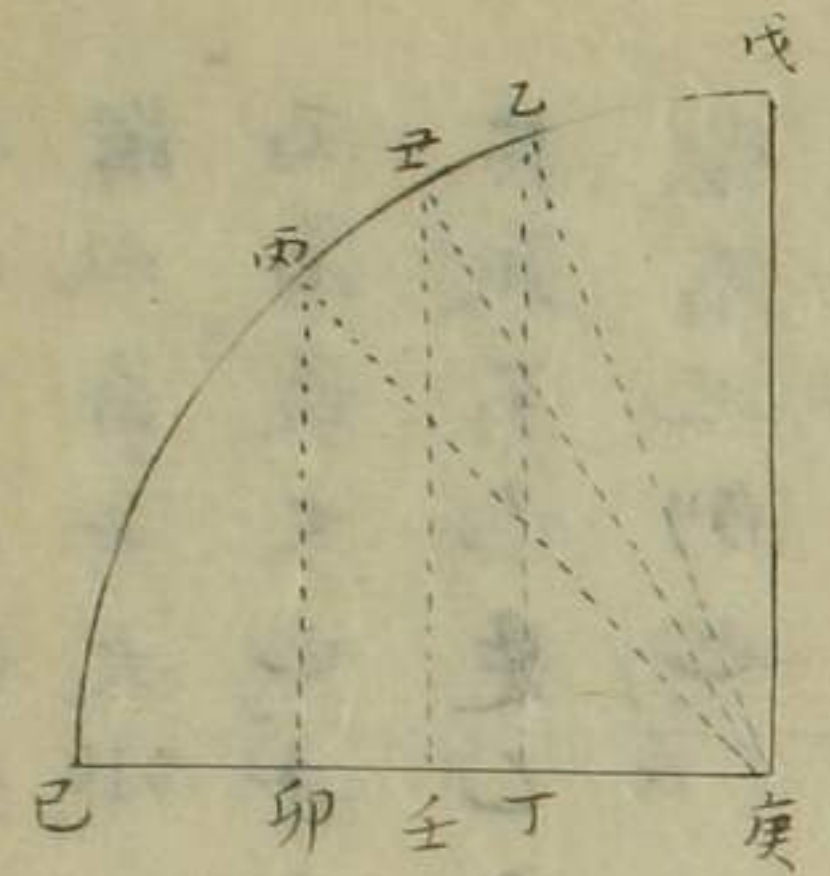
正弦庚辛與丙角之正弦戊己

又以乙丁次大邊。同戊 比丁丙小邊。若丙角之正弦戊己。與

乙角之正弦丁甲

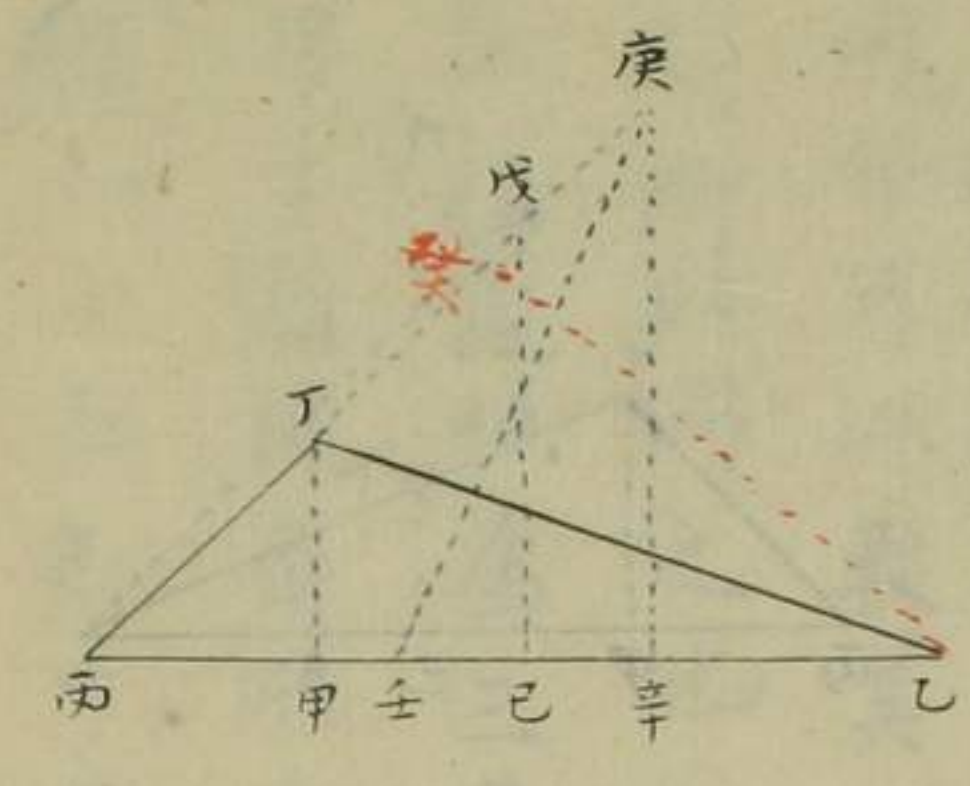
又以丁丙小邊。同庚 比乙丙大邊。同庚 若乙小角之正弦丁甲。與

丁鈍角之正弦庚辛



試以各角正弦同居一象限。較其弧度

如圖。甲乙丙形。丙角最大。其正弦乙丁亦最大。所對甲乙邊亦最大。甲角次大。其正弦壬亦次大。所對乙丙邊亦次大。乙角最小。其正弦丙卯亦小。所對丙甲邊亦最小。丙乙二角正弦。並乙丙為半徑。甲角取小。正弦截壬甲如乙丙。亦以乙丙為半徑。乃別作一象限。如戊。仍用乙丙為半徑。取庚如乙丙。而以先所得各角之餘弦取度。於丁作乙丁為丙角之正弦。於壬作壬壬為甲角之正弦。於卯作丙卯為乙角之正弦。即各如元度。而各角之差較觀矣。戊庚半徑既同乙丙。

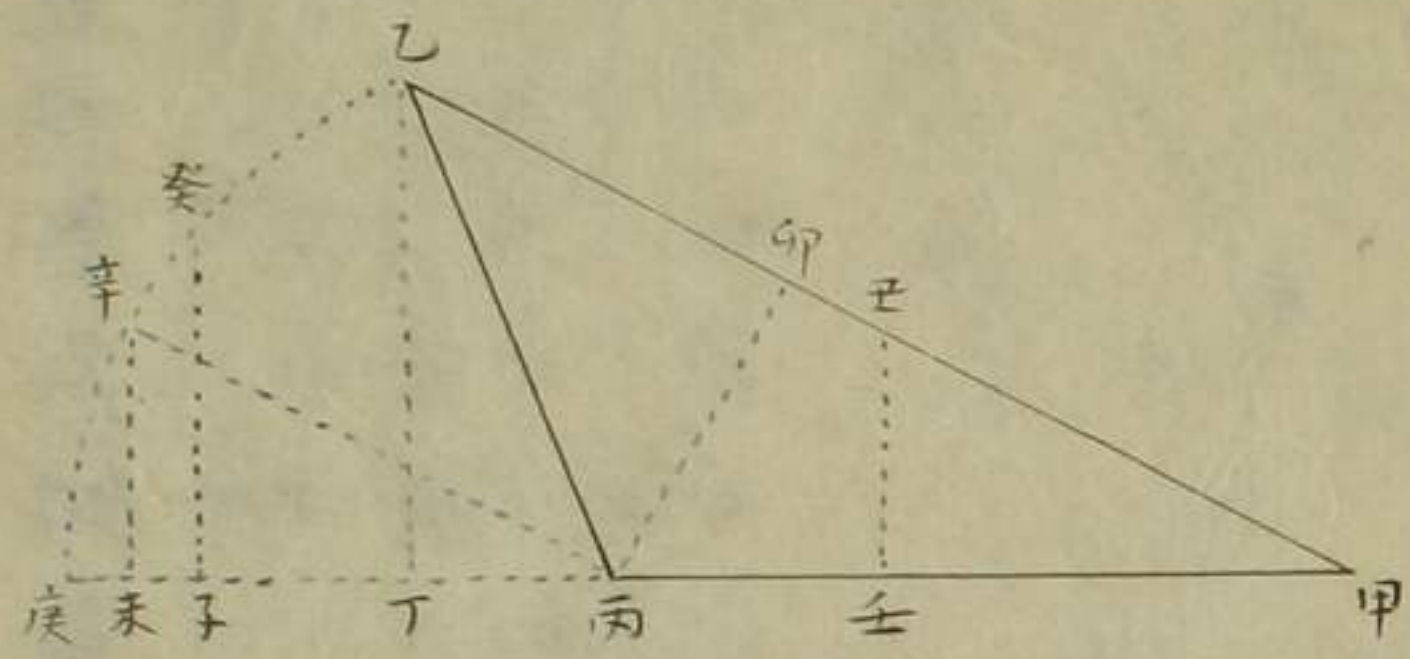


問庚辛何以為丁角正弦。曰。凡鈍角以外角之正弦為正弦。試作乙癸線。為丁角正弦。乙丁癸角。外角也。故其必與庚辛等。何也。庚丙辛角。股形。與乙丙癸形等。用丙角。辛與癸。又同為古角。故其形必等。則庚辛必等乙癸。而乙癸既丁角正弦矣。等乙癸之庚辛。又安得不為丁角正弦乎。凡取正弦。必齊其半徑。此乙丁為半徑也。而取丙角正弦。必引戊丙。如乙丁。其丁角正弦庚辛。又即外角之正弦乙癸。是三半徑皆乙丁也。試取壬丙。如丁丙。作庚壬線。即同乙丁半徑。則壬角同丁角。壬外角即丁外角。而庚辛正弦之半徑。仍為乙丁。庚壬同。此以庚壬當乙丁。易乙丁丙形為庚壬丙。則庚辛正弦。亦歸本位。與前圖互明。

則丁庚即丁丙。而為丙角餘弦。又壬庚即甲
 壬為甲角餘弦。卯庚即卯乙為乙角餘弦。
 解曰。角無大小。以弧而知其大小。今乙丁正弦。其弧乙己。是
 丙角最大也。壬壬正弦。其弧壬己。是甲角次大也。丙卯正
 其弧丙己。是乙角最小也。而對邊之大小亦如之。故皆以正
 弦為比例也。

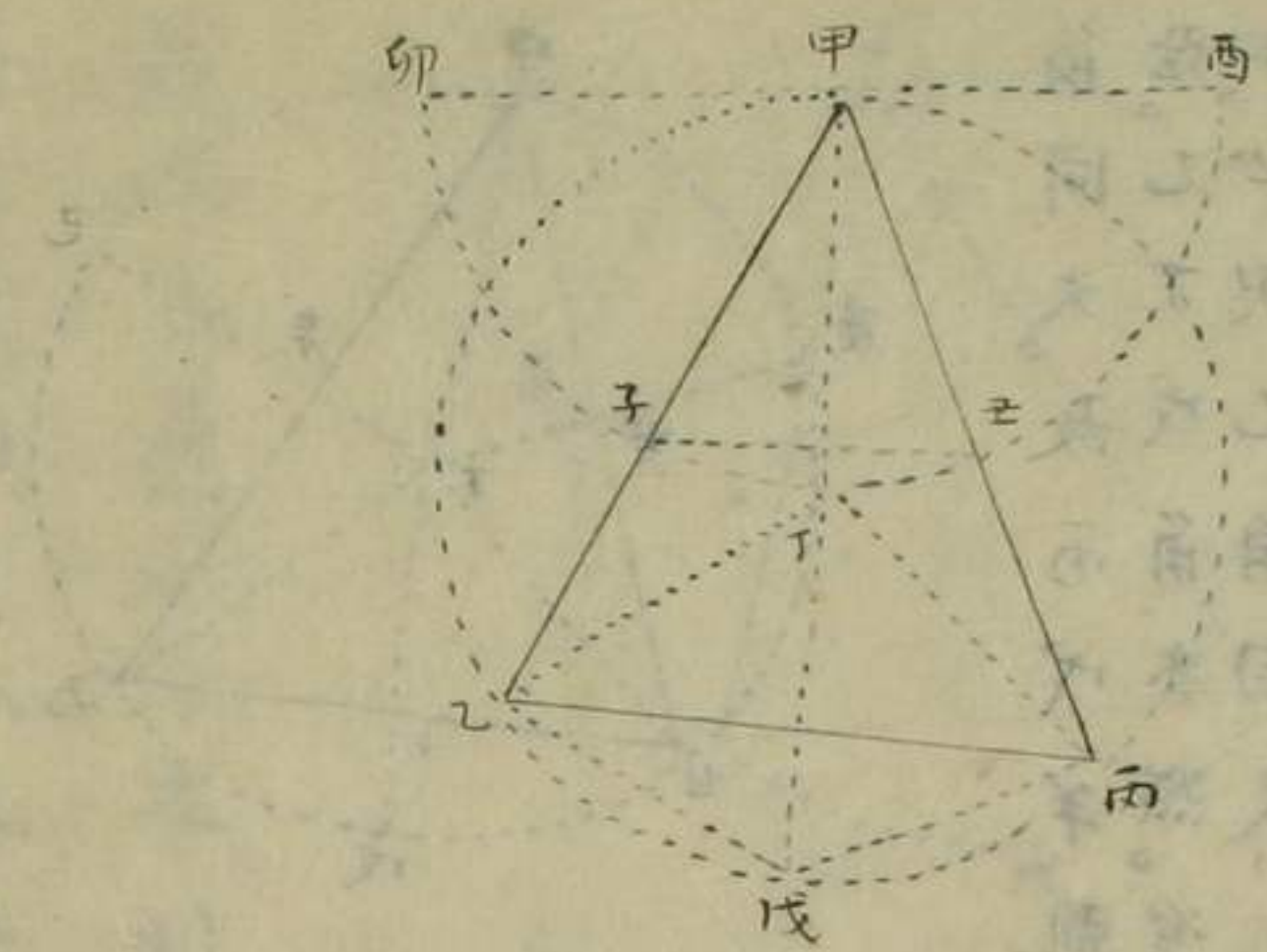
或疑鈍角之度益大。其正弦反漸小。而其所對之邊則漸大。何
 以能相為比例乎。曰。此易知也。凡鈍角正弦。即外角之正
 而外角。原兼有餘兩角之度。故鈍角之正。必大於餘兩
 角。而得為大邊之比例也。
 如乙丙甲鈍角形。丙鈍角最大。其正弦乙丁亦最大。而所對
 乙甲邊亦最大。乙角次大。其正弦丙卯亦次大。而所對甲丙

邊亦次大。甲角最小。其正弦壬壬亦小。而所對乙丙邊亦最
 小。截甲壬如乙丙。從壬
 作壬壬。即甲角正弦



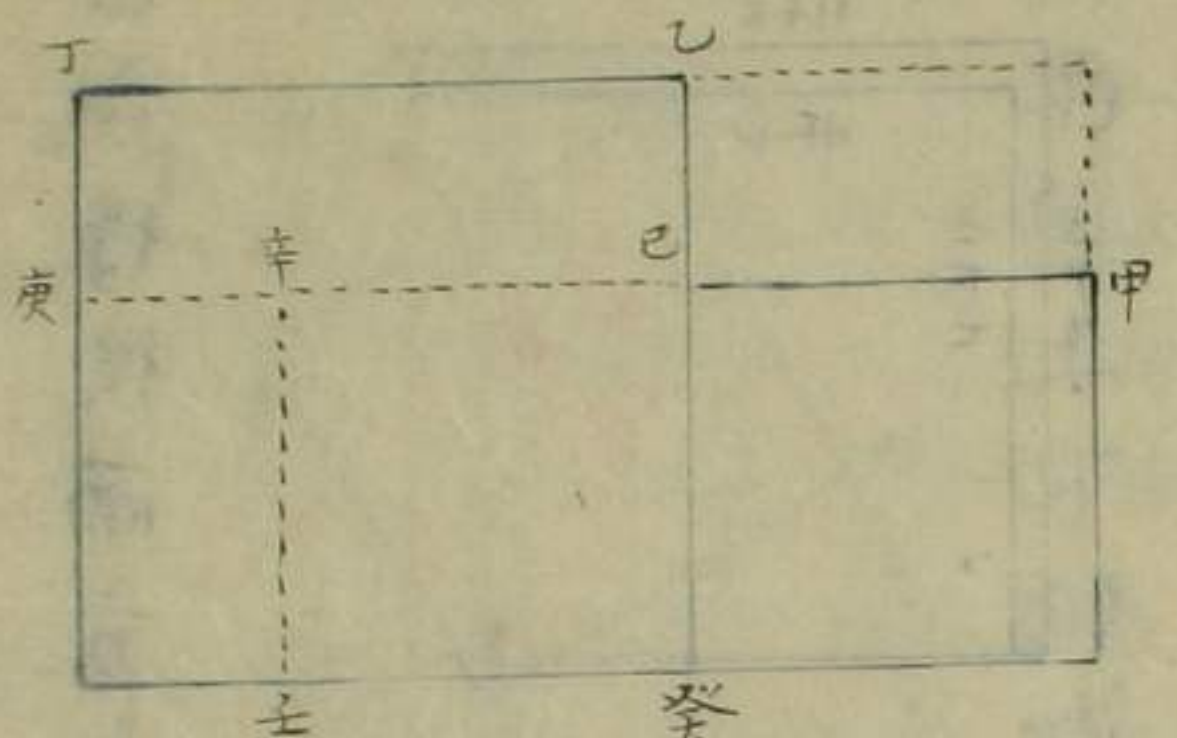
乃從乙作乙庚弧。以丙為心。乙
 之度。又作辛丙半徑。與甲乙平行。分乙庚
 弧度為兩。則辛庚即甲角之弧度。其餘辛
 乙亦即乙角之弧度。從辛作辛未正。與
 壬壬等。又自庚截癸庚度如辛乙。則癸庚
 亦乙角之弧。作癸子正。與丙卯等。此顯
 丙外角之度。兼有乙甲兩角之度。其正
 必大於兩角正。雖丙鈍角加大。而外
 角加小。則乙甲兩角必又小於外角。又何

問三角之本度皆用半弧何也。曰。量角度。必以角為員心。真度乃見。今三角皆切員邊。則所作通弦之弧。皆倍度也。故半之乃為角之本度。



如圖。以甲角為心。甲丁為半徑。作員。則其弧丑丁子。乃甲角之本度也。而平分之丙戌及戌乙兩弧。並與丑丁子弧等。試作戌丙及乙戌兩弦。必相等。又並與丑丁子弦等。凡弦等者。弧亦等。故乙戌丙弧。必為甲角之倍度。類推。

問三邊求角。何以用和較相乘也。曰。欲明和較之用。當先知和較之根。凡大小兩方。以其邊相併。謂之和。相減。謂之較。和較相乘者。兩方相減之餘積也。



如圖。甲癸小方。丁癸大方。於大方內。依小方邊作己庚橫線。又取己辛如小方邊。作辛壬線。成己壬小方與甲癸等。大方內減己壬小方。則所餘者為乙庚及庚壬兩長方形。夫乙己及丁庚及庚辛並兩邊之較也。甲己庚則和也。若移庚壬長方為乙甲長方。即成丁甲大長方。而為較乘和之積。故凡兩方相減之餘積為實。以和除之得較。以較除之亦得和矣。

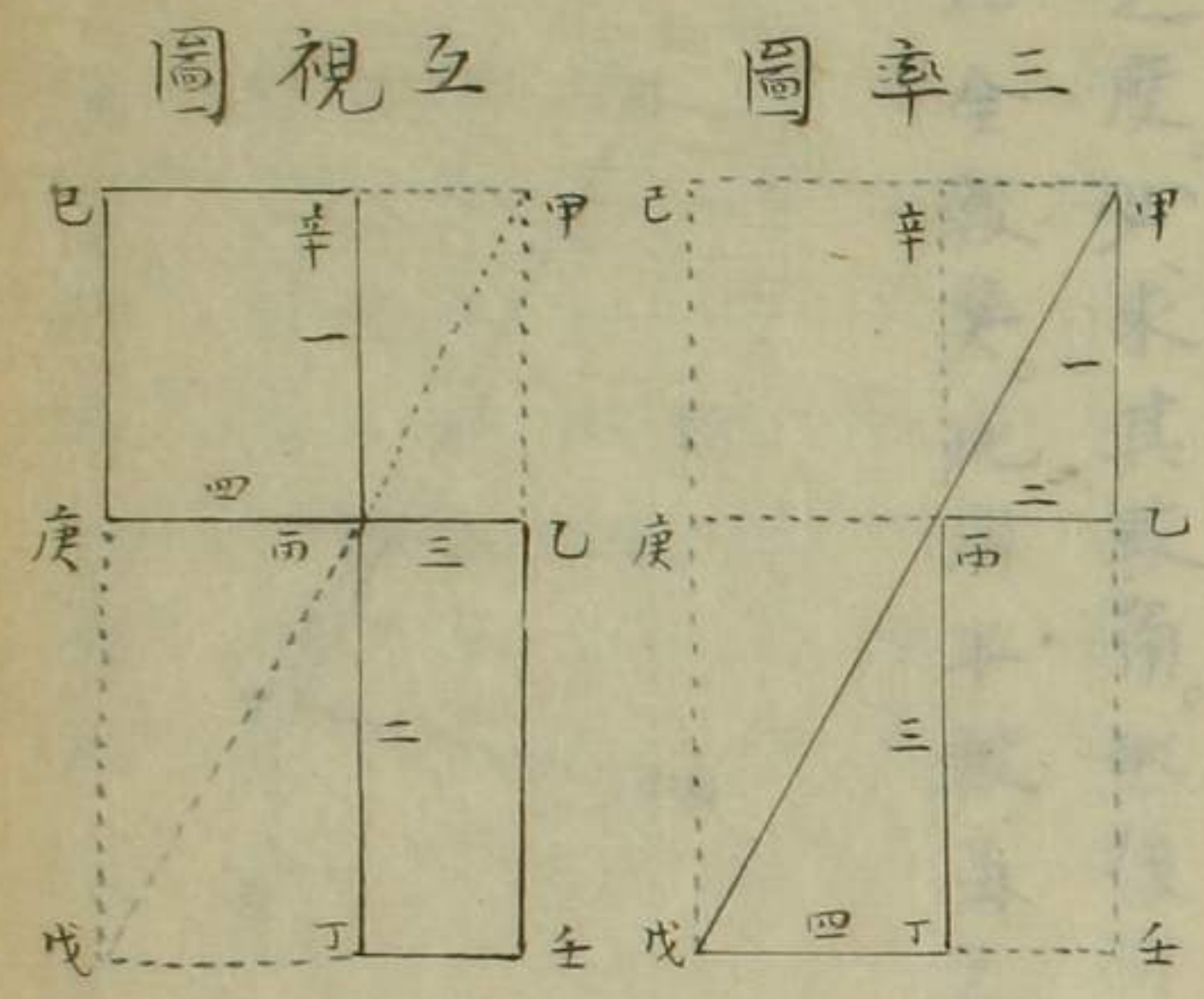
癸壬長方。為兩弦之較乘和也。此兩長方必等積。
問兩弦上方。大於兩句上方。何以知其等積。曰。依句股法。弦上
方幕。必兼有句股上方幕。是故甲丙弦幕內。即癸甲必兼有甲
丁股丙丁句兩幕。乙甲弦幕內。即辛乙亦兼有甲丁股乙丁句
兩幕。則是甲丁股幕者。兩弦幕所同也。其不同者句幕耳。既同。
則弦幕相減時。股幕俱對減。而然則兩弦幕相減之餘積。于癸
盡。使非句幕不同。已無餘積。豈不即為兩句幕相減之餘。甲大
方內。減已辛相同之中。甲小方。所豈不即為兩句幕相減之餘。
餘者。癸辛申丙兩長方。成。成。折。折。形。由是言之。兩和較
積子。于丁子方內。及戊未兩長方。成。成。折。折。形。
相乘之等積信矣。于弦幕相減之餘。較相乘之。癸壬長方。又于句
幕相減之。未卯長方。兩盤折形。既等積。則兩長方亦等積。

問和較之列四率與諸例不同。何也。曰。此互視法也。同文算指
謂之變測。古九章謂之同乘異除。乃三率之別調也。何則。凡異
乘同除。皆以原有兩率之比例。為今兩率之比例。其首率為法。
必在原有兩率之中。互視之術。則反以原有之兩率。為二為三。
以自相乘為實。其首率為法者。反係今有之率。與異乘同除之
序相反。故曰別調也。
然則又何以仍列四率。曰。以相乘同實也。三率之術。二三相乘。
與一四相乘同實。故可以三率求一率。二三相乘。以一除之得。
若一四相乘。以二除之。亦可互視之術。以原有之兩率自相乘。
得三。以三除之。亦仍得二。與今有之兩率自相乘。
與今有之兩率自相乘同實。故亦以三率求一率。原兩率自相
率除之。得今有之。餘一率。若今兩率自相乘。但三率之術。以比
以原有之率除之。亦即得原有之餘一率。

除之故。成兩長方。二率乘三率。成乙丁長方。以首率除之。必變為辛庚長方。故曰以此例成其同實也。

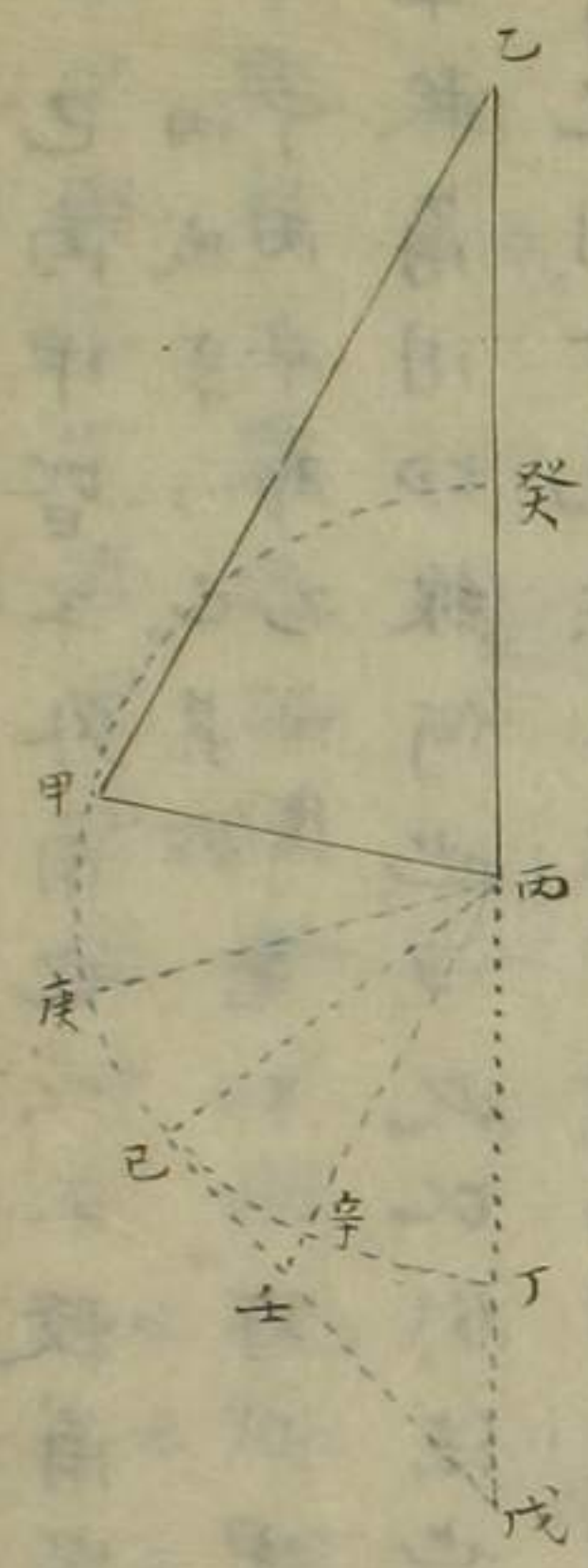
互視之術。則乙丙與丙丁為原有之數。甲乙為今有之數。丁戊為今求之數。術為以乙丙較乘丙丁和之積。若丙庚較。即丁乘丙辛和。即甲之積。故以原有之乙丙較。丙丁和。自相乘為實。以今有之甲乙和。丙即辛為法除之。即得今所求之丁戊較。即丙是。先知兩長方同積。而以四率取之。故曰以同實成其比例也。然則又何以謂之互視。曰。三率之用。以原有兩件自相比之例。為今有兩件自相比之例。是視此之差等。為彼之差等。如相慕效。故大句比大股。若小句比小股。大句小句。大股小股。幾倍。又大句大句。小句小句。幾倍。亦互視之用。以原有一件與今一件相比之例。

為今又一件與原又一件相比之例。是此視彼之所來以往。彼亦視此之所往以來。如互相酬報。故弦之較。比句之較。反若句之和。比弦之和。弦之和。大于句。故句之較。反大于弦。若知之數。是以別之為互視也。



如圖。以甲乙為一率。丙乙為二率。丙丁為三率。丁戊為四率。作甲戊弦。成兩句股。次引甲乙及丁戊會于壬。成乙丙長方。為二三相乘之積。亦引乙丙至庚。引丁丙至辛。作甲辛及戊庚線。並引長之會于己。先有乙丙長方。為一四相乘之積。是如圖。乙丙乘丙丁為乙丁長方。辛丙乘丙庚為辛庚長方。兩長方以角相連。于丙。次引己辛及乙壬會于甲。引己庚及丁壬會于戊。是先知同實而成其比例也。

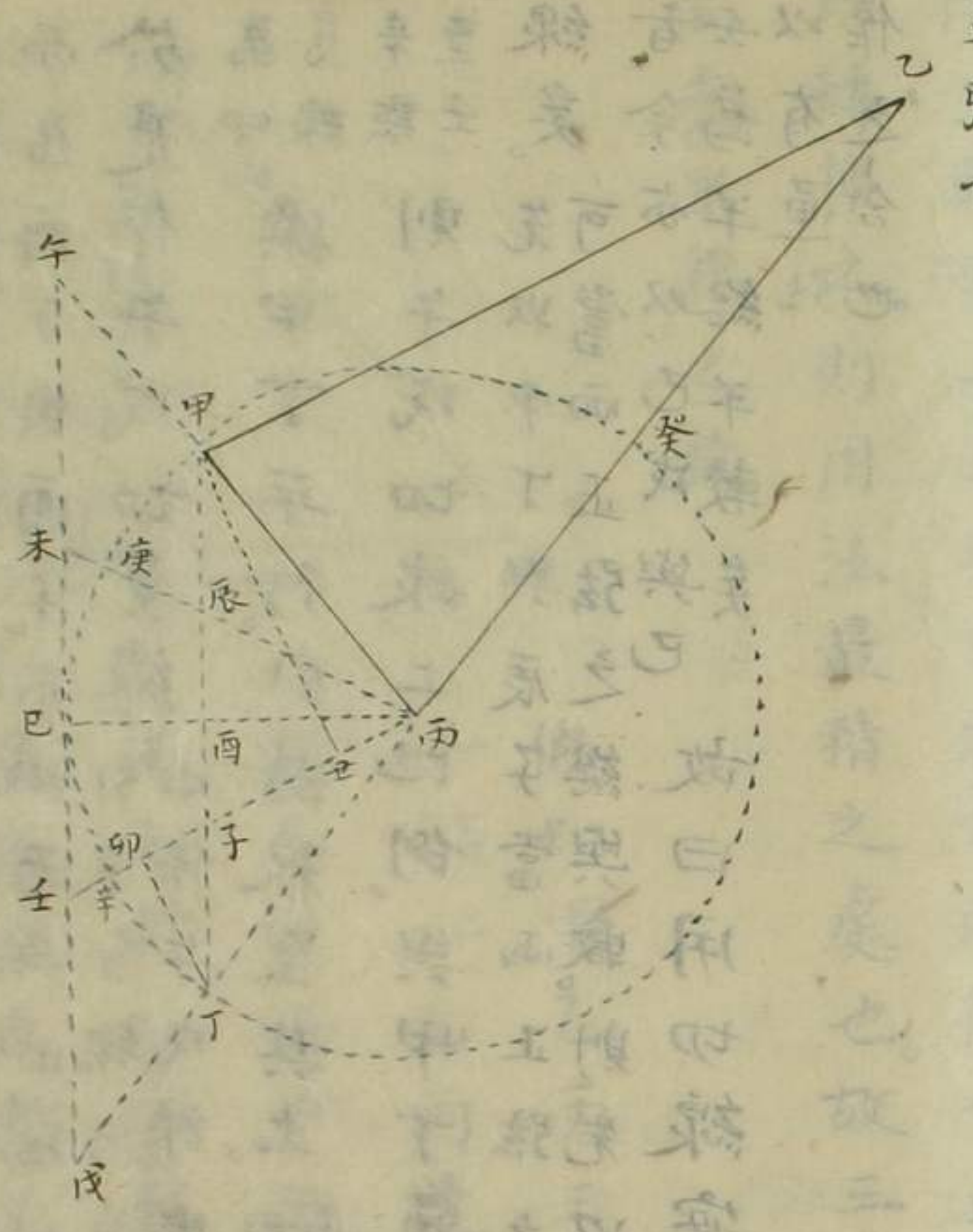
問三三角形兩又術用外角切線何也曰此盼角法也一角在兩
 邊之中則角無所對之邊邊無所對之角不可以正弦為比例
 今欲求未知之兩角故借外角分之也然則何以用半較角曰
 較角者本形中未知兩角之較也此兩角之度合之即為外角
 之度必求其較角然後可分而較角不可求故求其半知半較
 知全較矣此用半較角之理也



如圖甲丙乙形先有丙角
 則甲丙丁為外角外角內
 作丙辛線與乙甲平行則
 辛丙丁角與乙角等辛丙
 甲角與甲角等

其辛丙庚角為兩角之較。而辛丙己角其半較也。己丙丁及
 己丙甲皆半外角也。以半較角與半外角相減。成乙角。丙己
 丙減辛丙己其餘。若相加。亦成甲角。丁丙甲即甲角。丙己
 丁丙辛即乙角。若相加。亦成甲角。成辛丙甲即甲角。丙己
 半較角用切線何也。曰。此比例法也。角與所對之邊。並以正
 為比例。今既無正弦。可論。而有其所對之邊。故即以邊為比
 角之正弦。可以例邊。則邊之大小。亦可以例角。是故乙丁者
 兩邊之總也。乙癸者兩邊之較也。而戊己者半外角之切線也。
 壬己者半較角之切線也。以乙丁比乙癸。若戊己與壬己。故以
 切線為比例也。然則何以不徑用正弦。曰。凡一角分為兩角。則
 正弦因度離立。不同在一線。不可以求其比例。其在一線者。惟
 切線耳。而邊之比例。與切線相應。切線比例。又原與正弦相
 應。故用切線。實用

正弦也

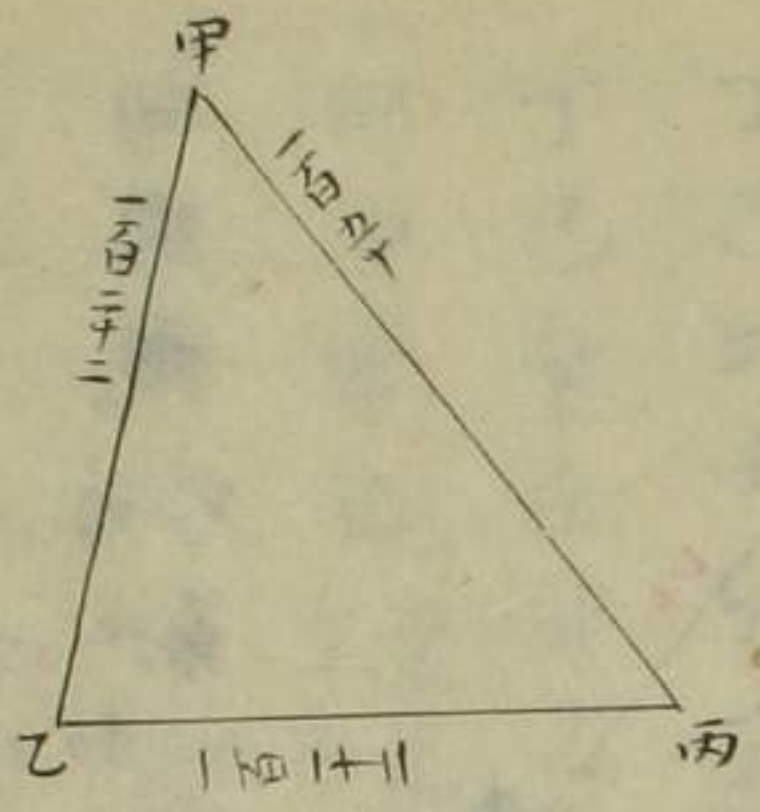


如圖。甲丙丁外角。其弧甲
 己丁。於辛作辛丙線。分其
 角為兩。則小角之弧丁辛。
 其正弦卯丁。大角之弧辛
 甲。其正弦甲丑。小角正
 對邊甲丙。大角正對邊
 當甲角之對邊乙丙。

今欲移正弦之比例於一線。先作甲丁通弦。割分角線於子。則
 子甲與子丁。若甲丑與卯丁。交角等。子卯皆正角。即丙形相似
 而比例等。然則子甲者大形之弦。與弦若股與股。故子甲比子
 大形之股。卯丁者小形之股也。弦與弦。若股與股。故子甲比子

丁。若丑甲而甲丁即丙正。弦之總。甲丁為子甲子丁之總。辰子
 與卯丁。而甲丁即丙正。弦之總。甲丁為子甲子丁之總。辰子
 即丙正。弦之較。甲子丁之較。亦即為甲丑卯丁之較。子平分甲
 丁半之於酉。則酉丁為半總。酉子為半較。其比例同也。若半與全
 半。故甲丁與辰子為丙正。弦之總與較。則半之
 而為酉丁與酉子。亦必若丙正。弦之總與較。則半之
 於是作午戊切員線。已引平分線丙酉至巳。甲巳丁弧。于己自
 為切。與甲丁平行。引諸線至其上。丙辰割庚點。至末。引丙卯割
 員線。則午戊切線上。比例。與甲丁通弦等。而正。弦之比例。在切
 至士。則午戊切線上。比例。與甲丁通弦等。而正。弦之比例。在切
 線矣。先以甲丁與辰子當丙正。弦之總與較。則先以酉丁與酉子為半總半較。亦
 者。今亦以己戊與己。故曰用切線實用正。弦也。以能同。比例者
 士為半總。半較矣。故曰用切線實用正。弦也。以能同。比例者
 以有通。弦。作之。合也。

問三較連乘之理。曰。亦句股術也。以句股為比例。而以三率之
 理轉換之。則用法最精之處也。故三較連乘。即得容員半徑上
 方乘半總之積。



假如甲乙丙三角形。甲丙邊。一百一十三。甲乙邊。一百一十二。乙丙邊。一百一十一。術以半總。一百一十二。較各邊。得甲丙之較。二十四。甲乙之較。十七。乙丙之較。十八。三較連乘得數。五千二百三十三萬。即容員半徑自乘。又乘半總之積也。

置三較連乘數。以半總除之。得數。二千二百三十三萬。平方開之。得容員半徑。五十三。倍之。得容員徑。一百一十二。置三較連乘數。以半總乘之。得數。五千四百一十。平方開之。

己乘卯壬。若甲巳與甲卯。今以三率之理通之。為以丁巳自乘。比已丙乘丙卯。亦若甲巳與甲卯。

一 丁巳自乘方 即容員半徑自乘

二 已丙乘丙卯長方 即甲乙之較乘甲丙之數

三 甲巳 即乙丙之較

四 甲卯 即半總

復以三率之理轉換用之。則三較連乘之積。以已丙較乘戊。以甲巳較為三率乘之。是即容員半徑自乘方乘半總之積也。以三較乘。即三較連乘。是即容員半徑自乘方乘半總之積也。是以丁巳半徑自乘為首率。以甲卯半總為四率乘之。是即一四相乘也。凡一四相乘。必與二三相乘之積等。以數明之。丁巳五三十一卯壬四八十一相乘。得二千九百四十。已丙十七丙卯二十四相乘。亦二千九百四十。故可通用。

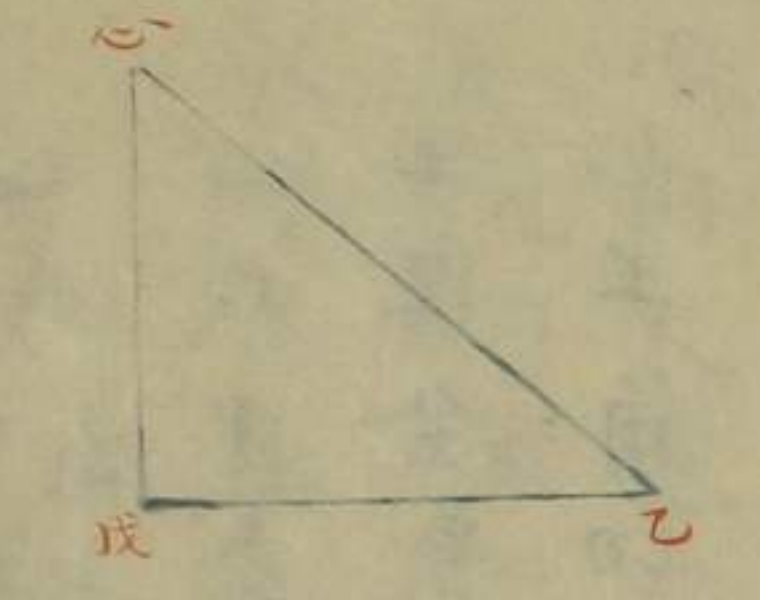
己丙乘丙卯。二百四十九。又以甲巳八乘之。得二十三萬五千二百。丁巳自乘。二千二十五。又以甲卯十二乘之。亦二十三萬五千二百。故可通用。

之。今以兩除法一併一對邊相乘。然後除之。變兩次除為一
次除也。古謂之異除同除

用兩次除亦有說乎。曰。前條三較連乘。必以半總除之。而得容
員半徑之方幕。今欲以方幕為用。故亦以半總除也。然則又何
以對邊之較除。曰。非但以較除也。乃以較之幕除也。何以言之
曰。原法三較連乘為實。今只以兩較乘。是省一乘也。既省一對
邊之較乘。又以對邊之較除之。是以較除兩次也。即如以較自
乘之幕除之矣。

餘兩較相乘。先又各乘半徑。何也。曰。此三率之精理也。凡線與
線相乘除。所得者線也。幕與幕相乘除。所得者幕也。先既定乙
戊句為首率。心戊股即容員半徑為次率。半徑為三率。乙角切線為

四率。而今無心戊之數。惟三較連乘中。有心戊即容員半徑自乘之
幕。即三較連乘。故變四率並為幕。以乙戊句幕為首率。即對
較除心戊股幕為次率。即半總除半徑之幕為三率。即半徑得
而次心戊股幕為四率。即分形



- 一 乙戊 今用乙戊自乘
- 二 心戊 心戊自乘
- 三 半徑 半徑自乘
- 四 乙角切線 切線自乘

故得數開方。即成切線

又術

以三較連乘。半總除之。開方為中垂線。即容員以半徑全數乘之為實。各以所求角對邊之較除之。即得半角切線。

一 乙戊 乙角對 丙戊 丙角對 甲己 甲角對

二 心戊中垂線 心戊中垂線 心己中垂線 亦即

三 半徑全數 半徑全數 半徑全數

四 乙半角切線 丙半角切線 甲半角切線

此即用前圖可解。乃本法也。

論曰。常法三邊求角。倘遇鈍角。必于得角之後。又加審焉。以鈍角與外角同一八線也。今所得者既為半角。則無此疑。實為求角之捷法。

四卷補遺

問以邊求角。二術因和較乘除而知正角。乃定其為句股形。

何也。曰。古法句弦較乘句弦和。開方得股。今大邊丁與小邊丁

以和較相乘為實。癸壬邊為法除之。而仍得癸壬。是適合開方

之積也。則大邊小邊之和較。即句弦之和較。而癸為正角。成句

股形矣。凡句股形。弦為大邊。而對正角。今丁壬

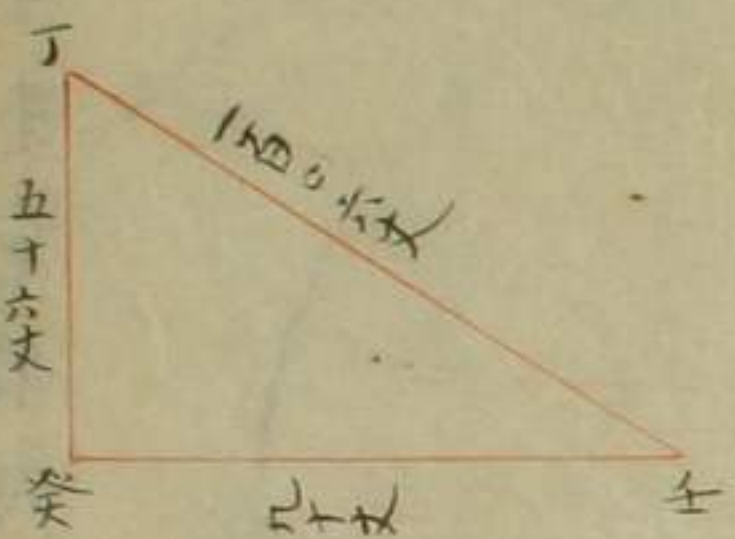
試再以丁壬與壬癸之和較求之。

如法。用丁壬壬癸相加得和。一百九十九相減得較。

一十較乘和。三千一百為實。丁癸六十五為法除

之。亦仍得五十六丈。何則股弦較乘和。亦開方

得句故也。

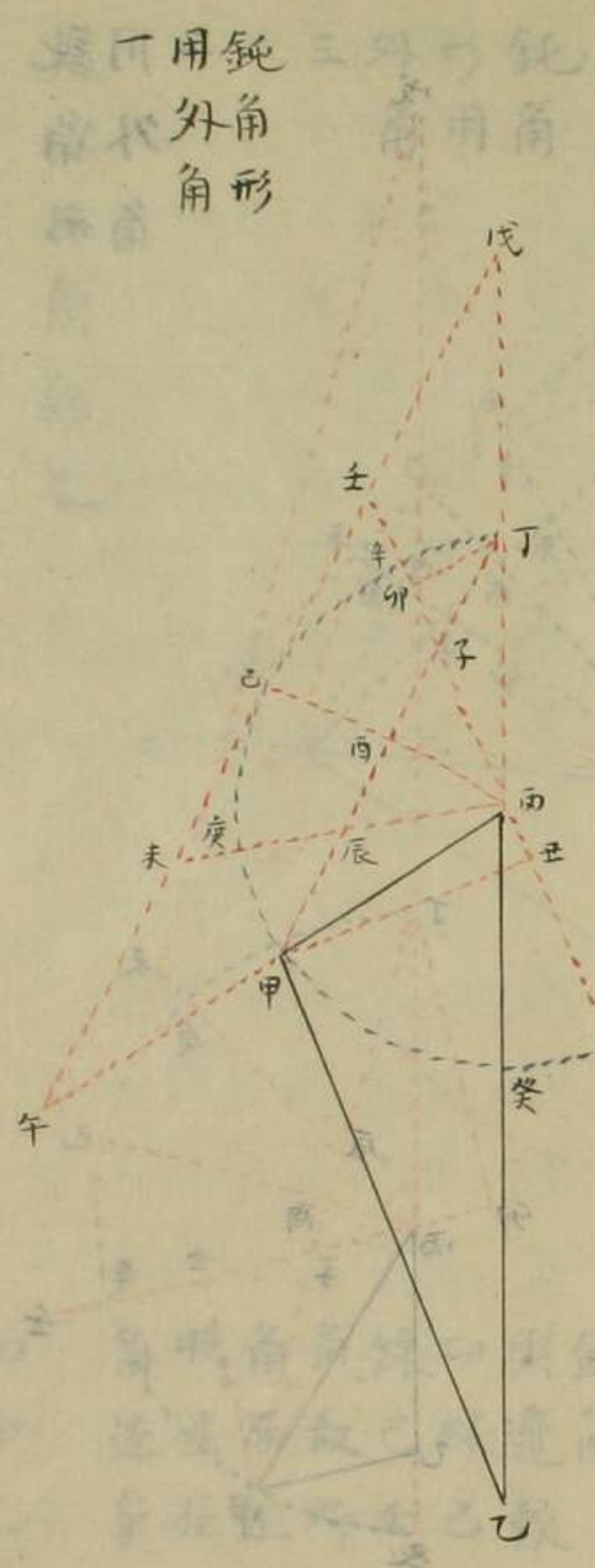


弦既為小形之股。又為大形之句。其比例為丙丁小形與乙丁。
 小形若乙丁大形與丁庚大形也。故正矢丙丁乘大矢庚與正矢乙丁。
 乙自乘等積丙庚全徑為正矢所分其一丁丙正矢為小形之
 股而乙丁正弦為其股。其一丁庚大矢為大形之
 弦為其句

一 丁丙正矢 小形句 凡二率三率相乘與一四相乘
 二 乙丁正矢 小形股 等積故乙丁自乘即與丁丙丁
 三 乙丁正矢 大形句 庚相乘等積也
 四 丁庚大矢 大形股

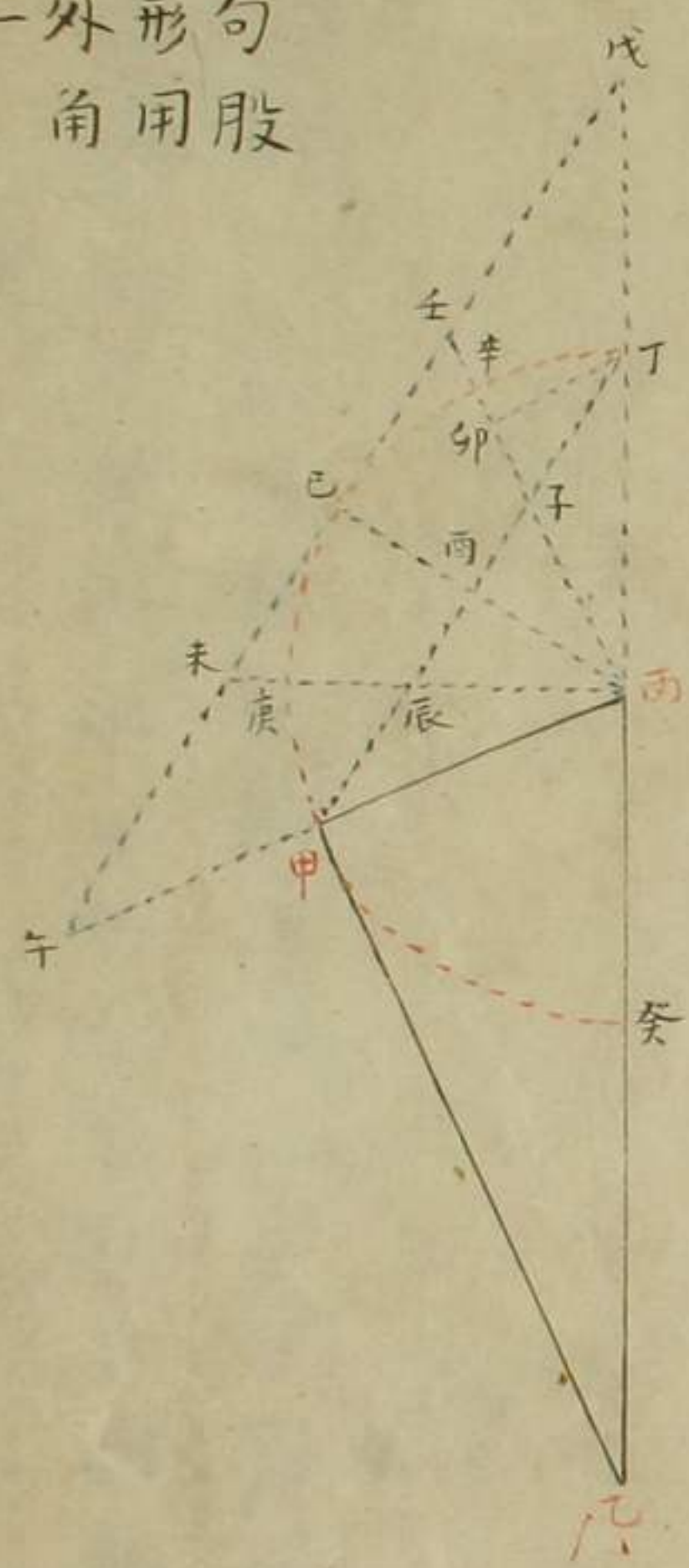
論曰。凡割圓算法。專恃句股。吾法西法所同也。故論句股者必
 以割圖。而論割圖者仍以句股。如根株華實之相須。乃本法非
 旁證也

或疑切線分外角。以正弦為比例。恐不可施於鈍角。作此明之



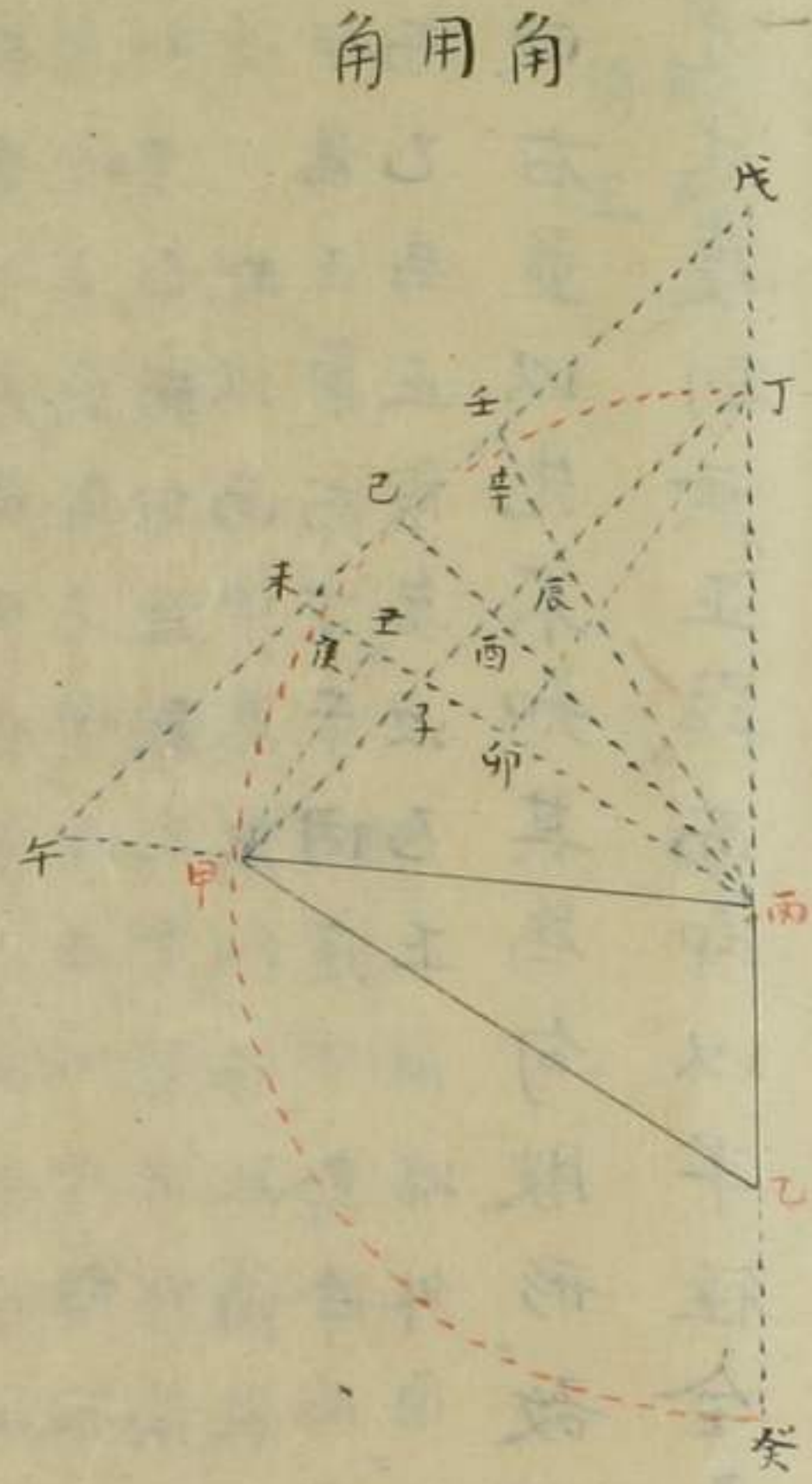
甲丙乙鈍角形。先有丙角。及丙甲丙乙二邊。求餘角
 一率丁乙總邊二率癸乙較邊三率己戊切線四率壬己半較角
 論曰。試作壬丙線與乙甲平行。分外角為兩。則壬丙丁即乙角。
 其正弦卯丁。又甲丙壬即甲角。其正弦甲丑。以丙句股卯丁與甲丙
 相似之故。能令兩正弦卯丁與甲丙之比例。移於直弦。以成和較卯丁與甲丙

一外形句
角用股



又以正角觀之

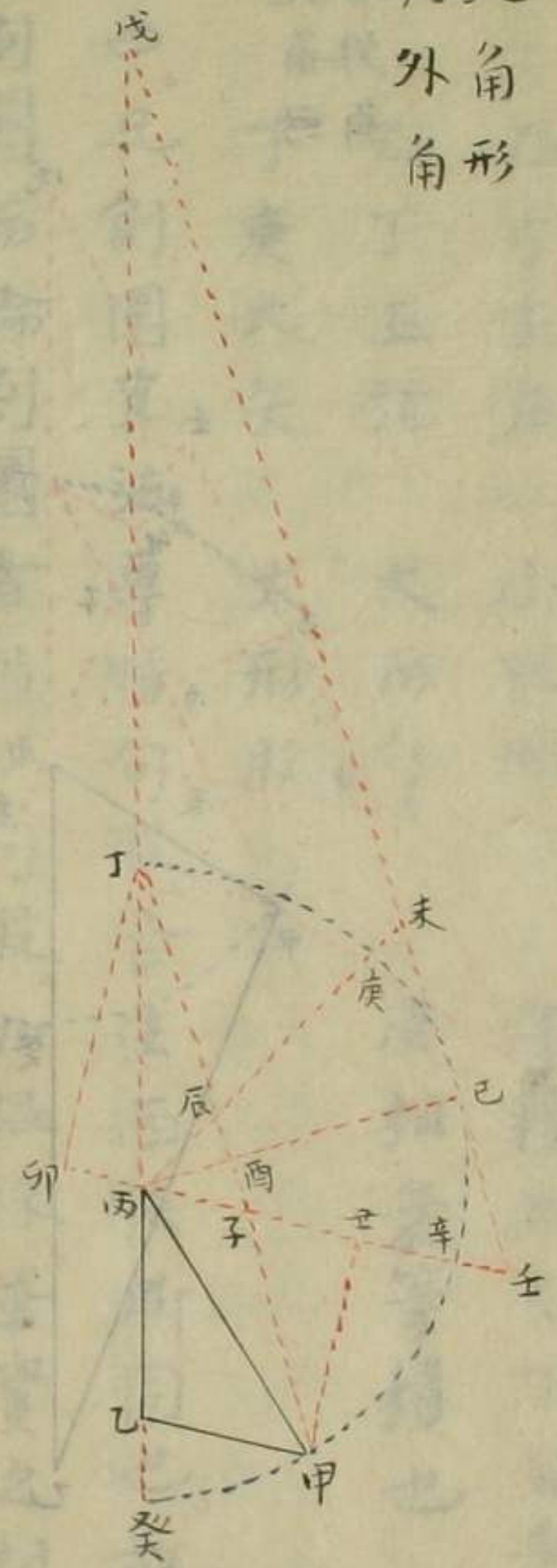
三外形鈍
角用角



所得而兩較半丁分丙丙丙
為即用甲角外乙外壬甲甲
正兩為切角與角線句乙形
角甲徑己線切句為兩乙丙先
為作壬己較則甲股如丙得
正外戊癸句股平法角及
弦角此與乙弦行作
和弧以半若和行

角股角角線切與餘丙
法並而故己線邊角甲
矣在正所壬己較乙法形
外弦分戊乙為先有丙
角所作內因半較半總丙
之內反先較角外丁角求
同小無得角外丁角求
銳句鈍鈍切角乙求

二用鈍
外角形



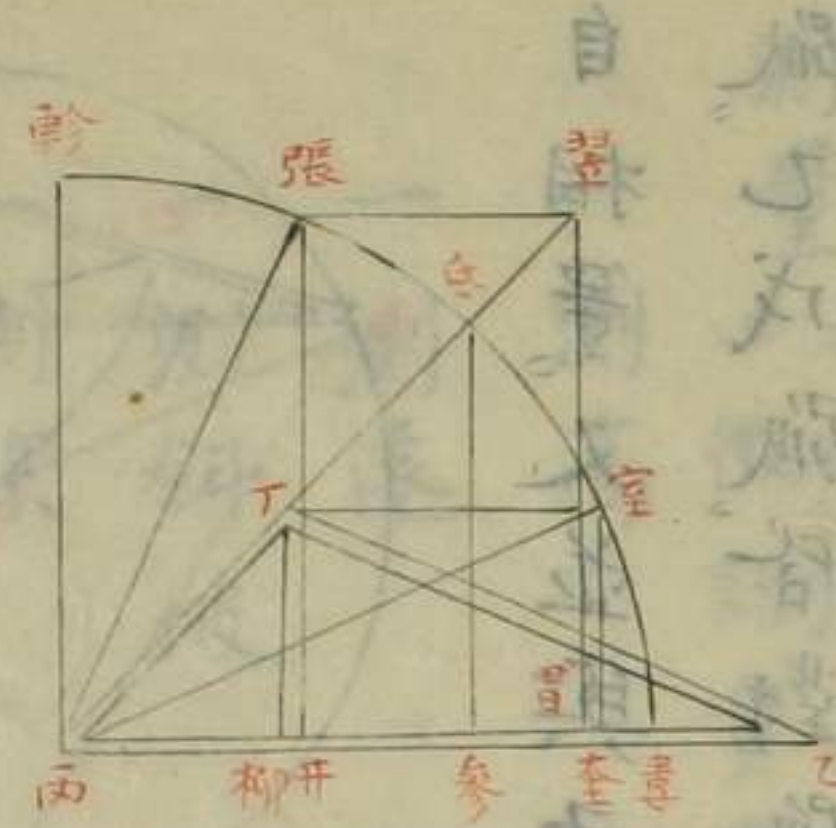
為此亦因所分為較亦在形外丁而正弦在形外和餘並同前

未半切癸乙弦角有丙乙
已較線若與為兩角甲形
角戊半邊邊角求角形先
切己外較總餘
線與角乙丁

丁既若子甲與子丁則丁甲即兩而半外角半較角之算以生。
正弦之和辰子即兩正弦之較與兩正弦之並如銳角
半外角為和半較角為較並與兩正弦之並如銳角
和較同比例即與兩邊之和較同比例並如銳角
又論曰此所分大角為鈍角故甲丑正弦作於形外然雖在形
外而引分角線至丑適與之會即能成丑子甲句股形與卯子
丁相似而生比例

四	三	二	一
正丁角張井即	大邊乙丙即	正丙角氏參	次邊乙丁即
丁乙	丙即	乙即	丁即

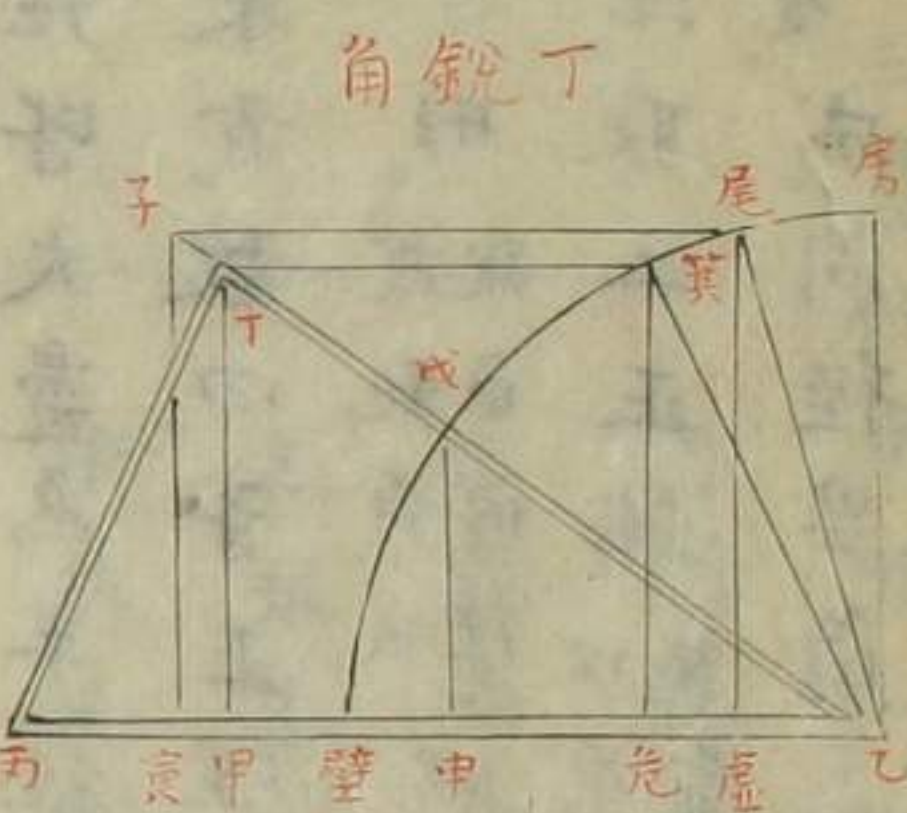
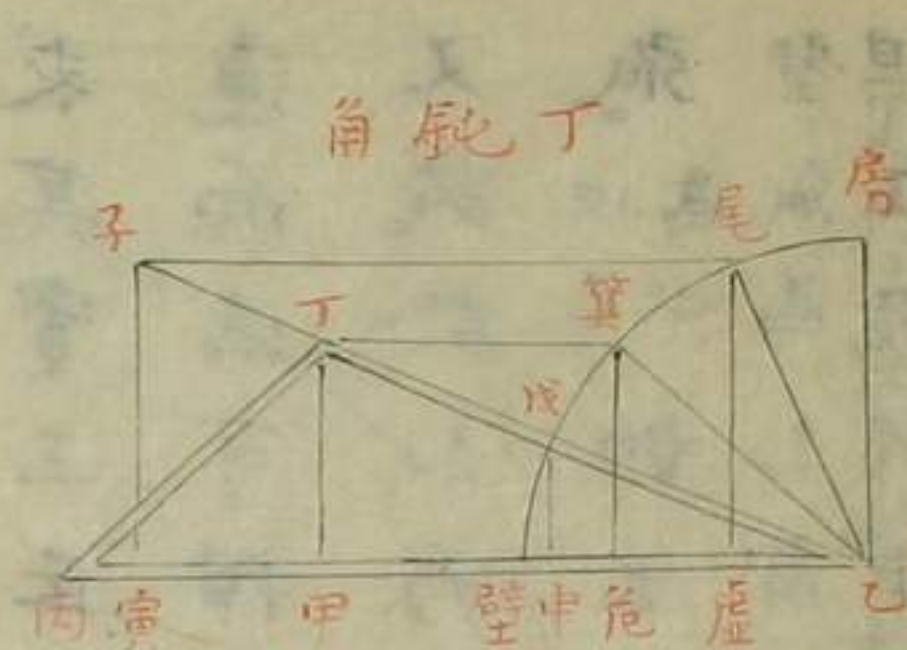
此如先得次邊及所對兩角故以氏參兩句股為法求大小



又試以乙丁次邊為半徑作象限如前取三正弦張參為其度張井其正弦為乙角弧度室奎其正弦成同徑異角之比例又仍用三邊為弦三正弦為股別丁丙至盡與大邊乙丙等成三正弦又丁次邊成氏參原為兩角正而等乙角即復成相似之句股形而比例等

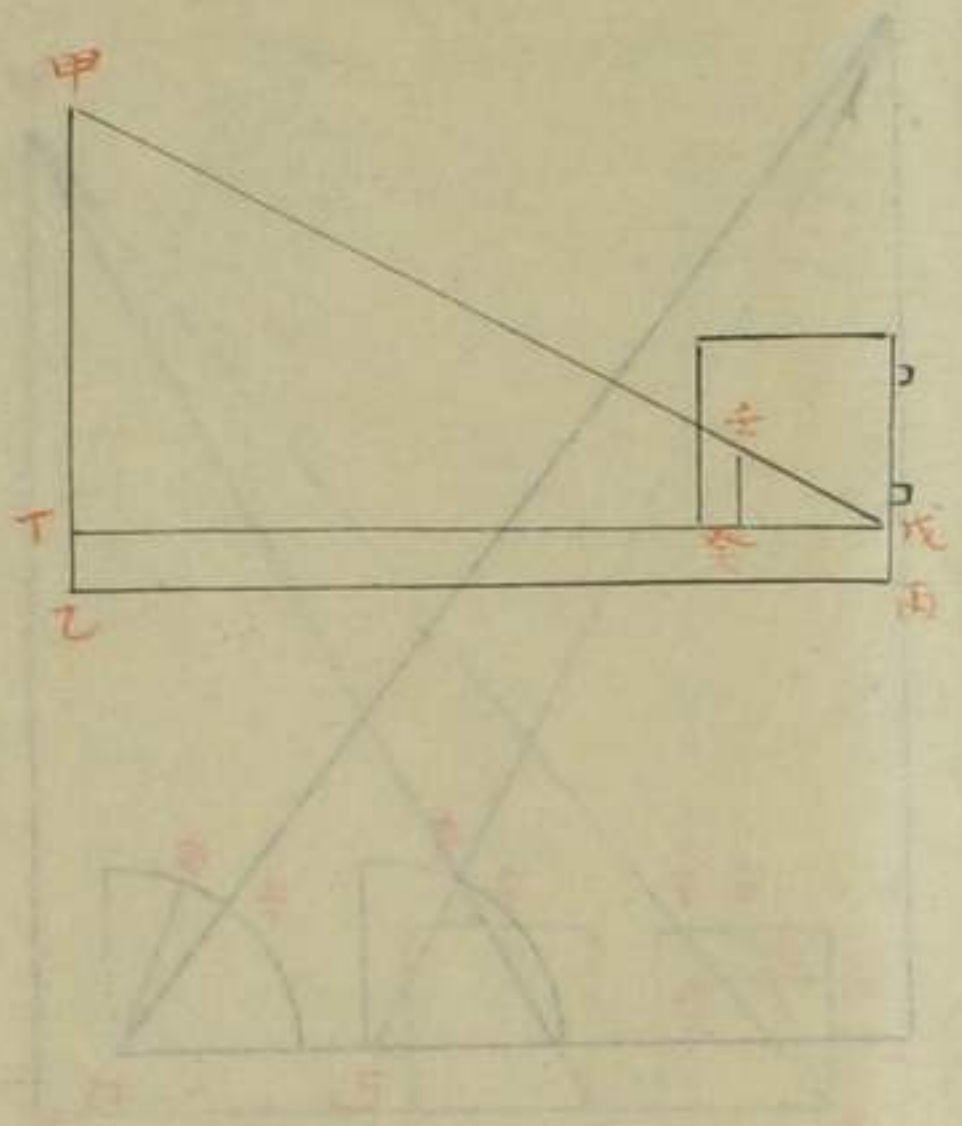
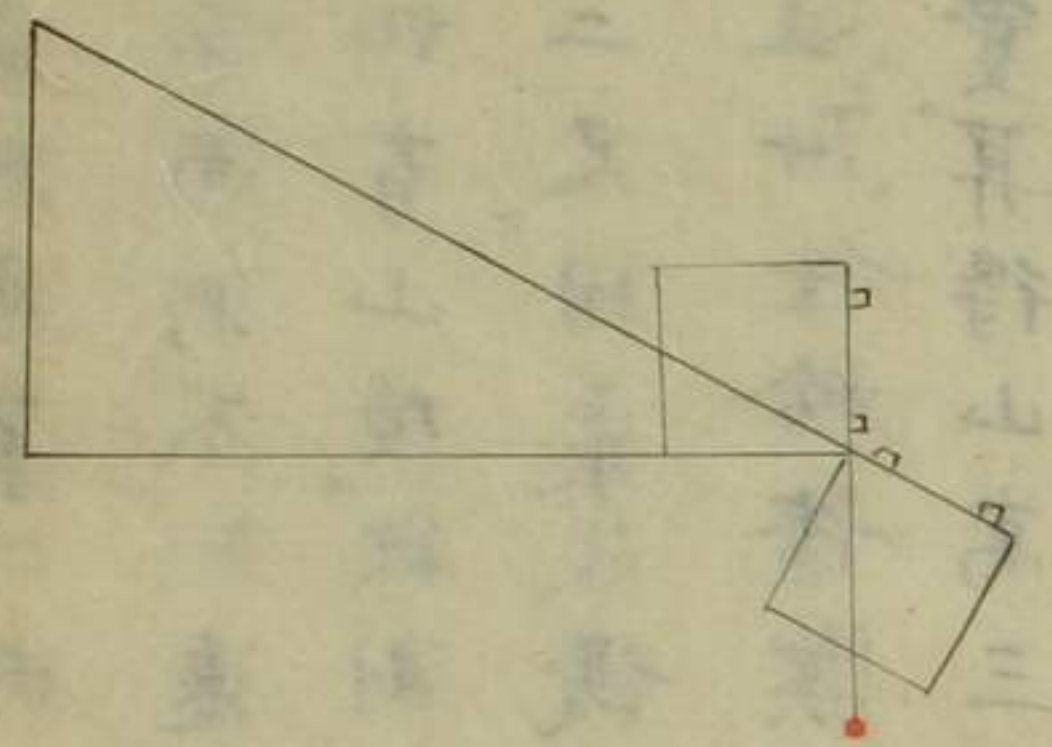
四	三	二	一
正丁角子寅虛即尾	大邊乙丙子即乙	正乙角戊申	小邊丁丙乙即戊
丁甲乙	丙即	乙即	丙即

求兩大句股也子寅乙皆同用乙角而形相似



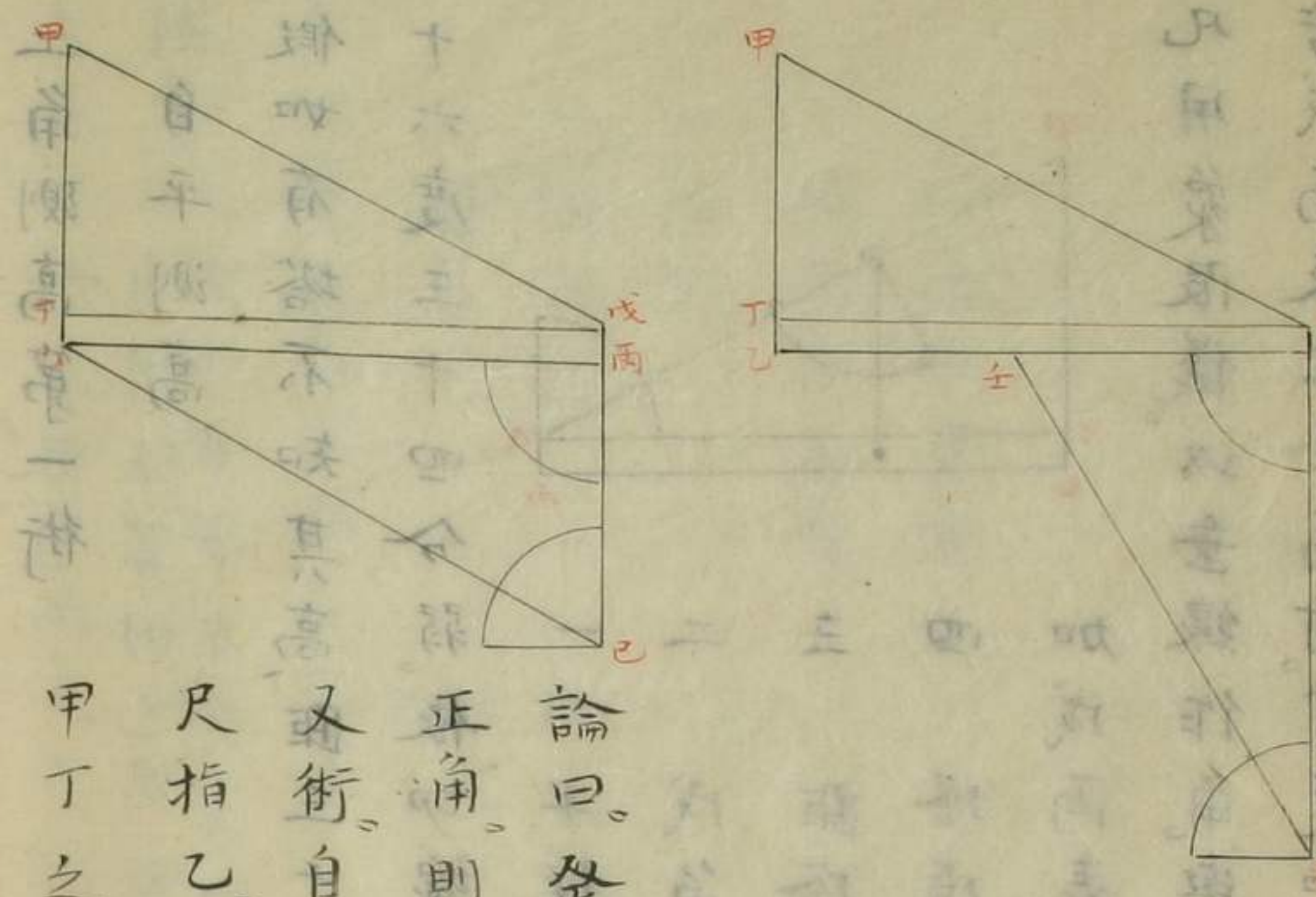
之句股形而比例等

角求邊者則反用其率



用矩度以垂線作角。其用亦同。

又省算法。用有細分矩度。自戊數至
 癸。令其分如丙乙之距。或兩倍
 數。壬癸直線之分。即甲丁之距也。先
 二分為大。或三分
 為大。今亦同之。



甲丁之高

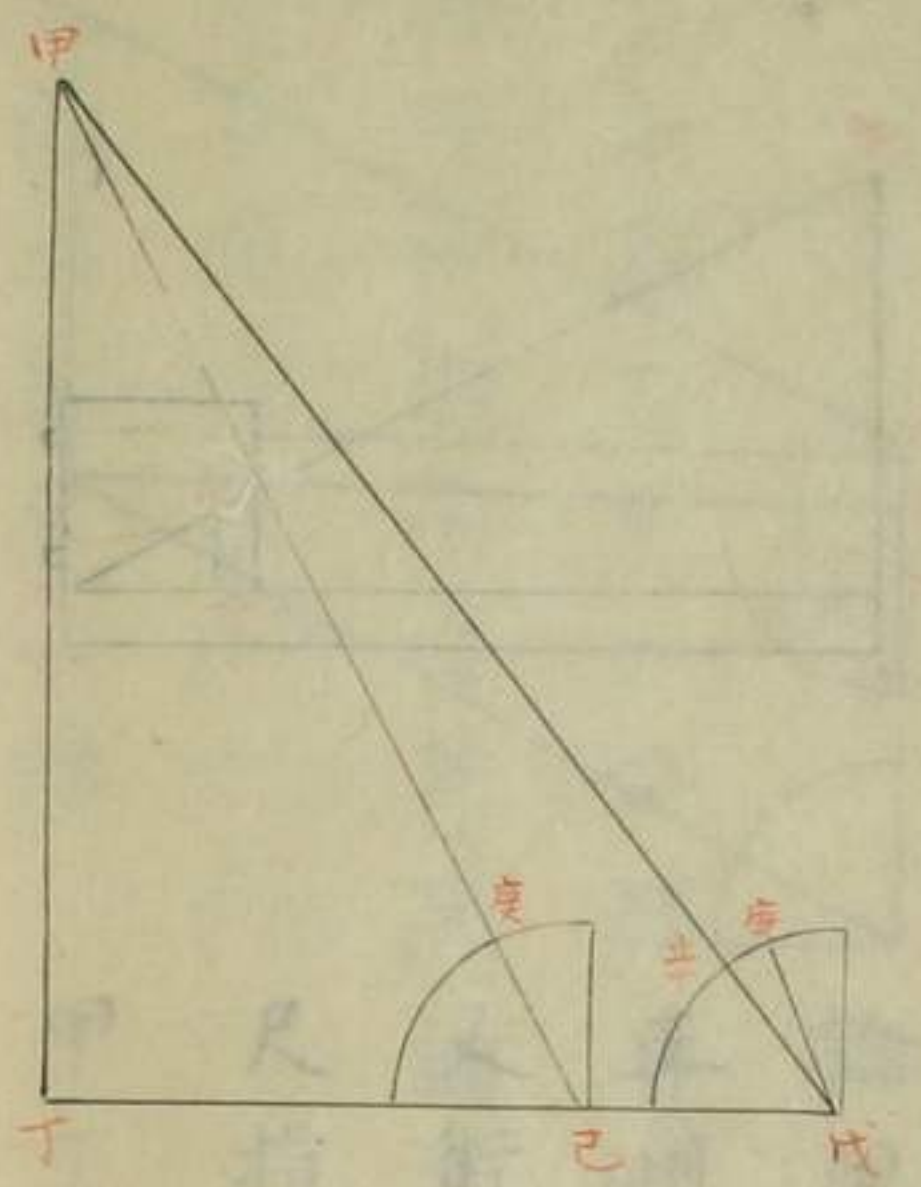
論曰。癸角同戊角。丙癸同丙乙。丙與乙並
 正角。則兩句股形等。立面與平面一也。
 又術。自丙向癸却行。以象限平安。邊指丙。
 尺指乙。求作戊之餘角。得已丙之距。即同
 甲丁之高。

省算法。從表根丙平安象限。以一
 邊指塔根乙。一邊指癸。順丙癸
 直線行至癸。得三十丈。與丙乙等。
 復於癸平安象限。作癸角與戊角
 等。邊指丙。尺指壬。則壬丙遠。即甲
 丁之高。亦加丁乙
 為塔高。

三角測高第二術

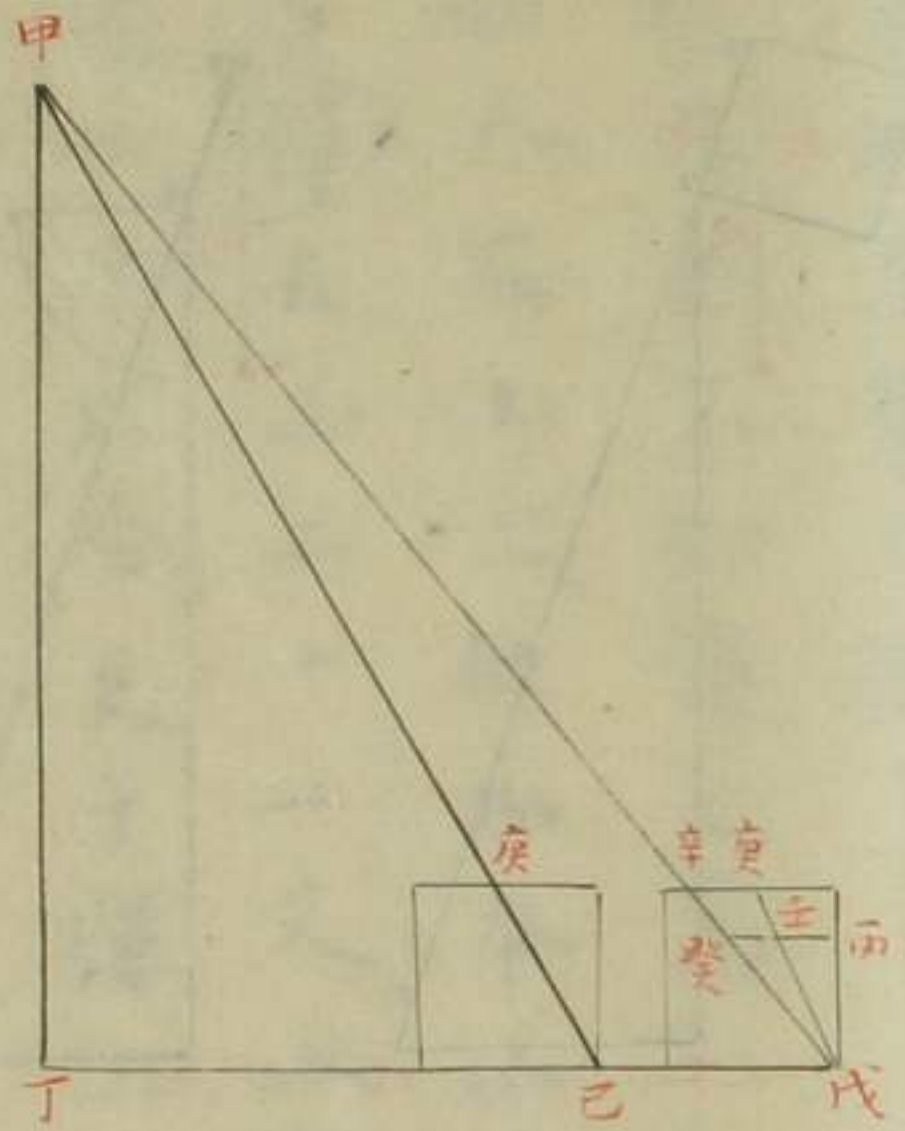
平面測不知遠之高法用重測

假如有山頂欲測其高而不知所距之遠依術立二表相距一丈二尺用象限儀測得高六十度十九分退測後表得五十八度三十七分查其兩餘切線以相減得較數為法表距乘半徑為實算得山高三十一丈



一 餘切線較 〇〇四〇〇
 二 半徑 一〇〇〇〇
 三 表距戊己 一丈二尺
 四 山高甲丁 三十一丈
 加表一丈共三十一丈

量山或於城外測城內之山並同

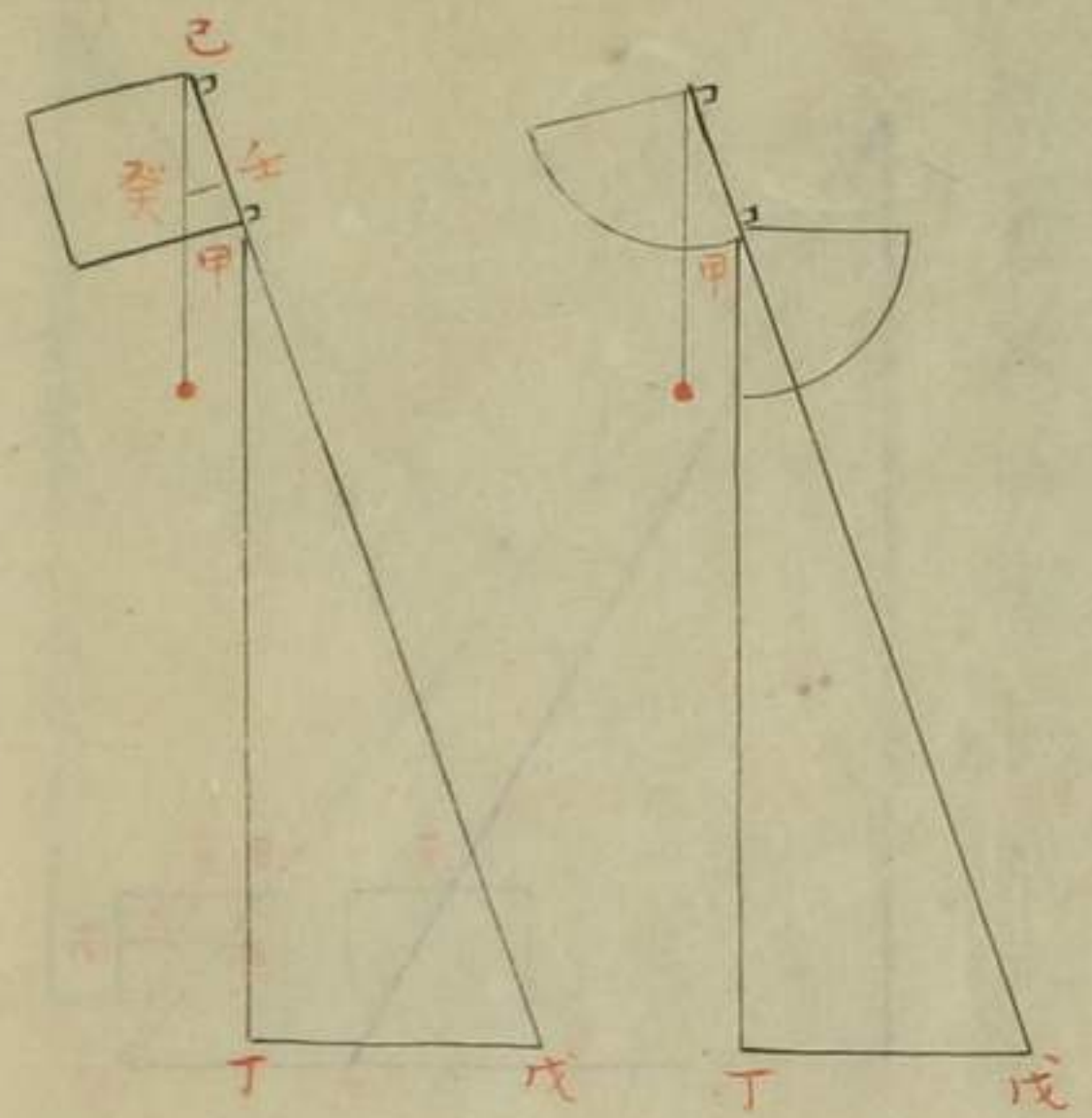


省算法用矩度假令先測指線交於辛後測指線交于庚成辛庚戊三角形法于丙指線中間以兩測表距己即戊變為分如壬癸小線引長之至丙即丙戊所當測高論曰此即吾人重表法也或隔水

三角測高第三術

從高測高 又謂之因遠測高

假如人在山顛欲知此山之高度。但知山左有橋。離山半里。用象限測橋得遠度一十八度一十六分強。依切線法求得山高一里半。

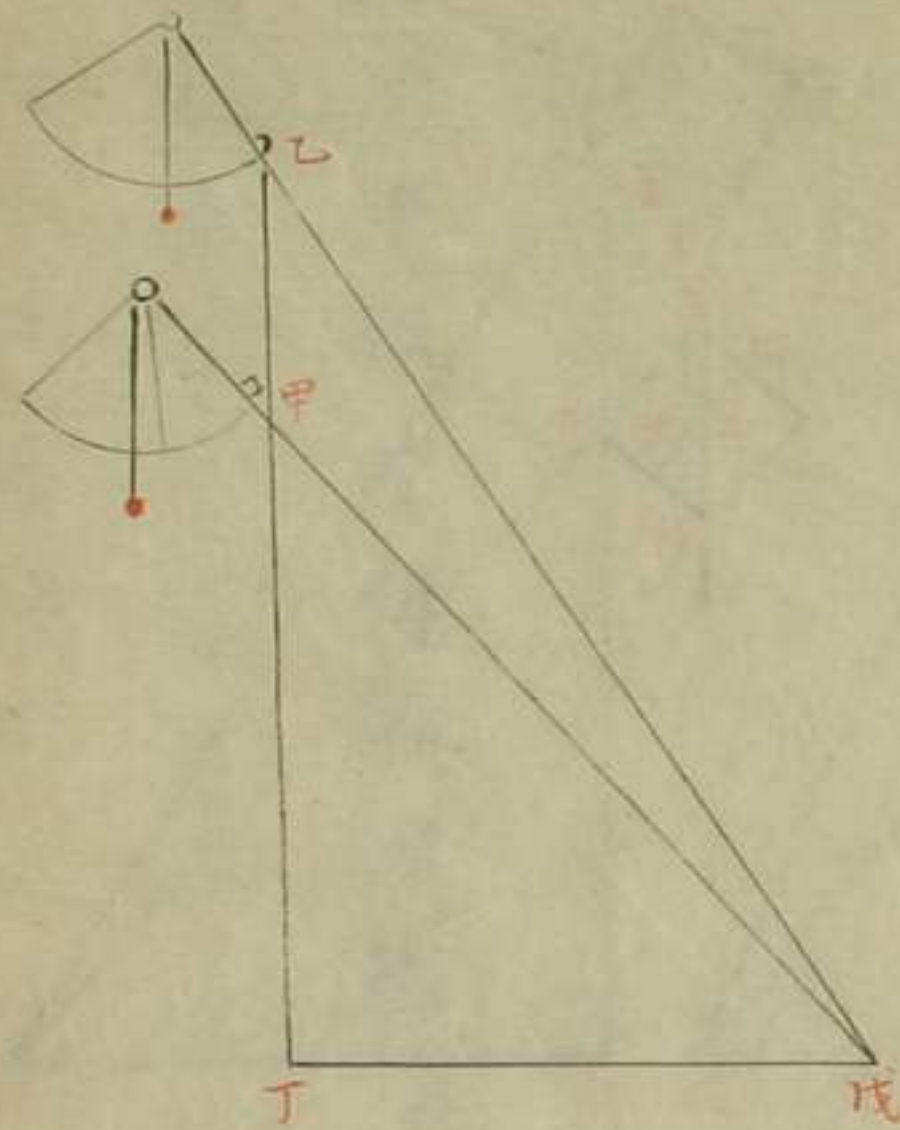


一 甲角切線 半徑 一〇〇〇
 二 半徑 甲角餘切 三〇〇
 三 橋遠 戊丁 一百八十步
 山高 甲丁 五百四十步
 省算法。用矩度作壬癸線以當戊丁。則已壬當甲丁。

三角測高第四術

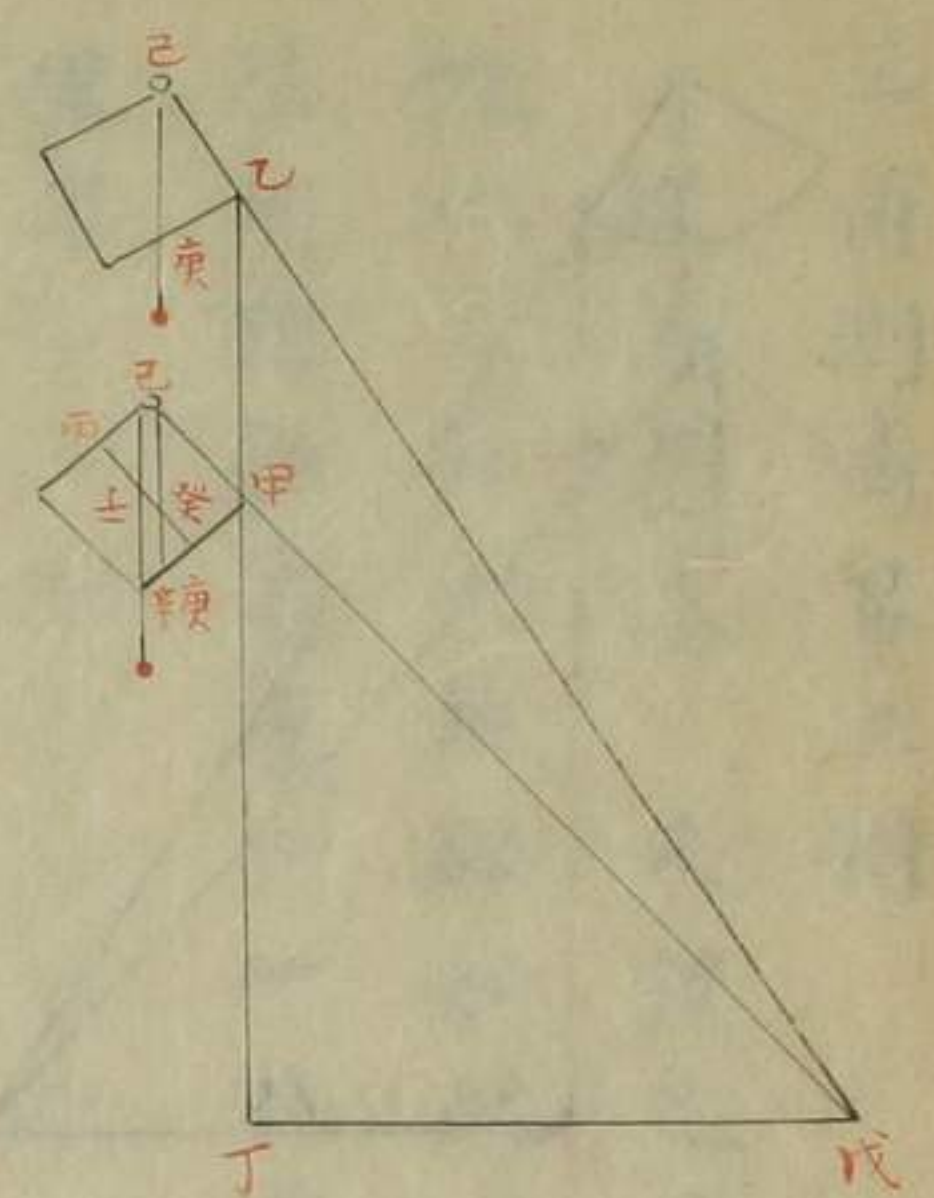
從高測不知遠之高 法用重測

假如人在山上欲知本山之高度。然又無可據之遠。但山有樓或塔。量得去山二十一丈。以象限儀指定一處。于樓下測得五十五度二十六分。又于樓上測得五十三度五十分。用餘切線求得山高三百四十四丈五尺。



一 兩餘切較 〇四二
 二 下一測餘切 六八九
 三 樓高之兩測 二十一丈
 四 山高 三百四十四丈五尺

三角測高第五術
 若山上無兩高可測。則先測其弦。並見此物。即可測矣。
 甲乙為山上兩所。但取直線任指一處如戊。於甲於乙用器兩測之。成甲乙戊形。此形有甲乙兩角。又有甲乙之距。為兩角一邊。可求甲戊邊。法為戊角之正弦與甲乙邊。若乙角之正弦與甲戊。弦與甲戊。

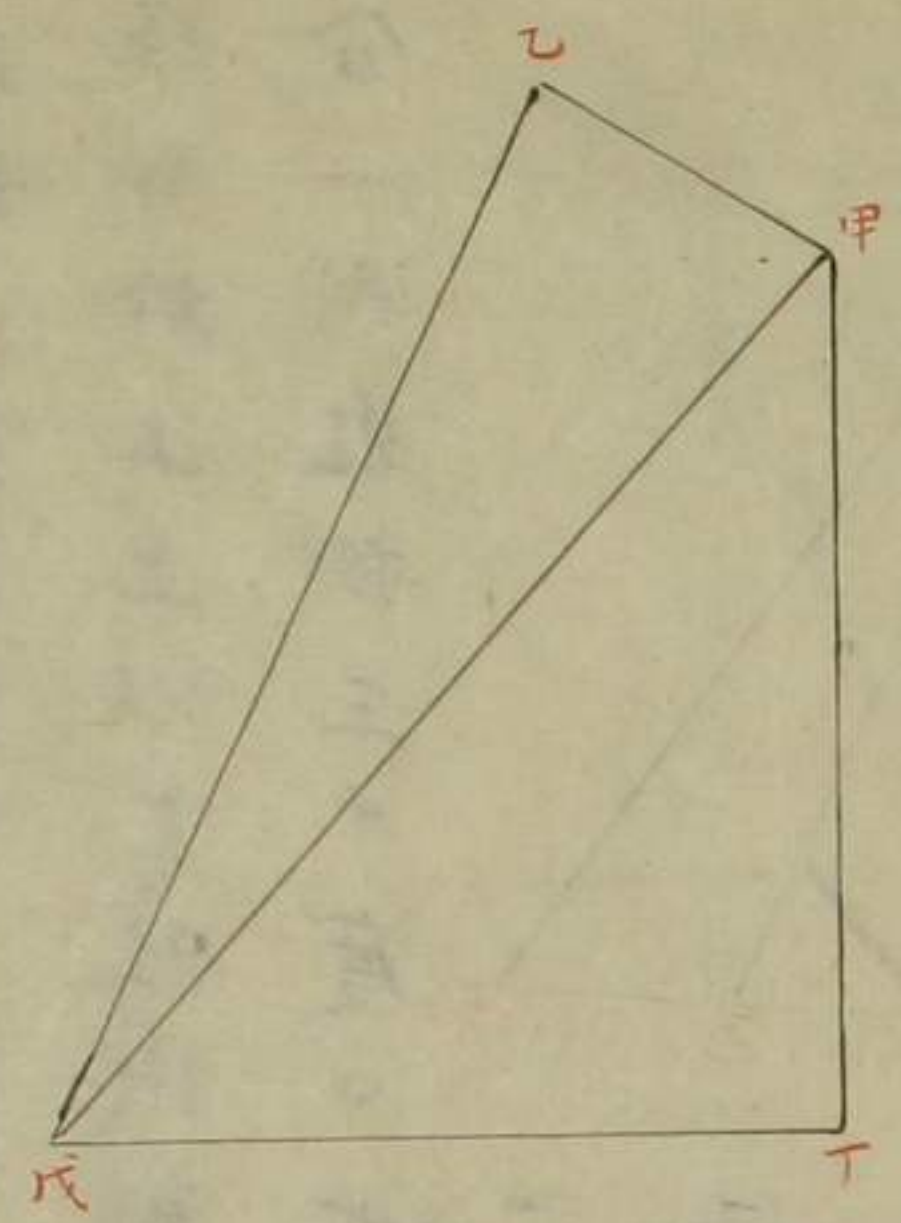


省算法用矩度。上測交庚。下測交辛。成辛已庚三角形。法于兩指線中間。以上下兩測之距變為分。如壬癸小線引長之至丙。即壬丙當所測本山之高。

三角測高第五術

若山上無兩高可測。則先測其弦。

並見此物。即可測矣。



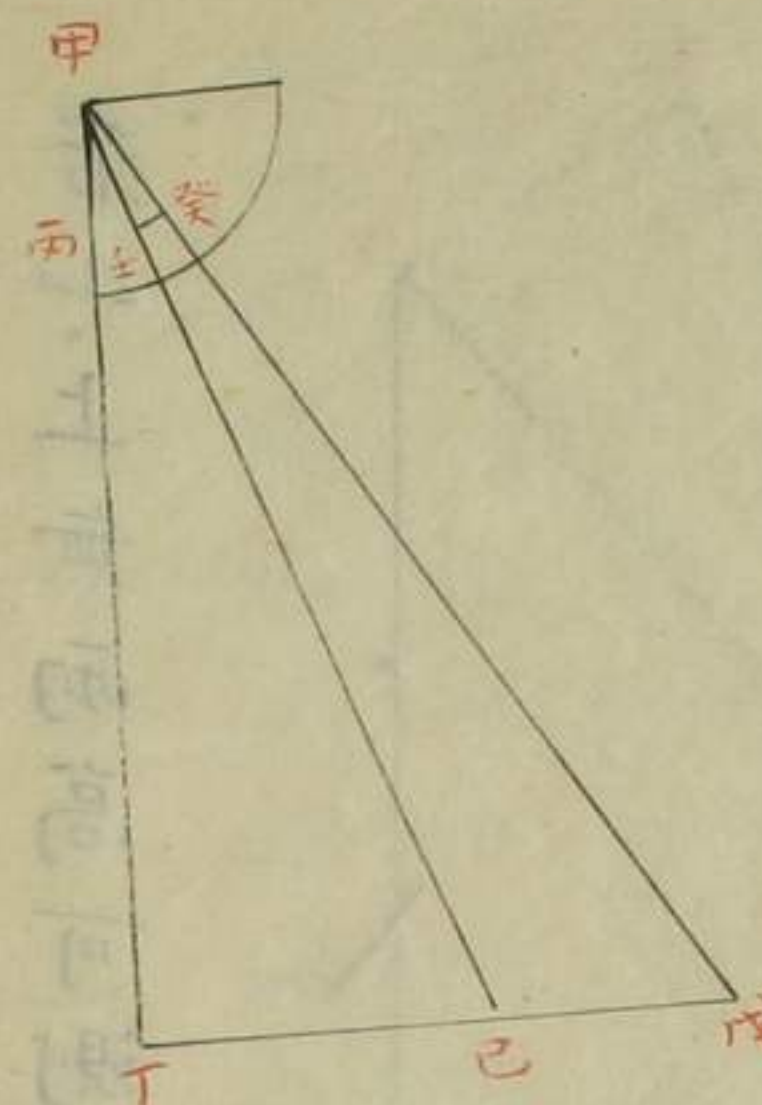
甲乙為山上兩所。但取直線任指一處如戊。於甲於乙用器兩測之。成甲乙戊形。此形有甲乙兩角。又有甲乙之距。為兩角一邊。可求甲戊邊。法為戊角之正弦與甲乙邊。若乙角之正弦與甲戊。弦與甲戊。

再用甲戊丁句股形。為半徑與甲戊。若甲角餘弦與甲丁。即山之高也。

三角測高第六術

借兩遠測本山之高

有山不知其高亦無距山之遠。但山前有大樹。從此樹向山而行。相去一百八十五丈。又有一樹。人在山上。可見兩樹如一直線。即於山上以象限儀測此二樹。一測遠樹四十三度三十二分。一測近樹三十度。七分用切線較得本山高五百丈。

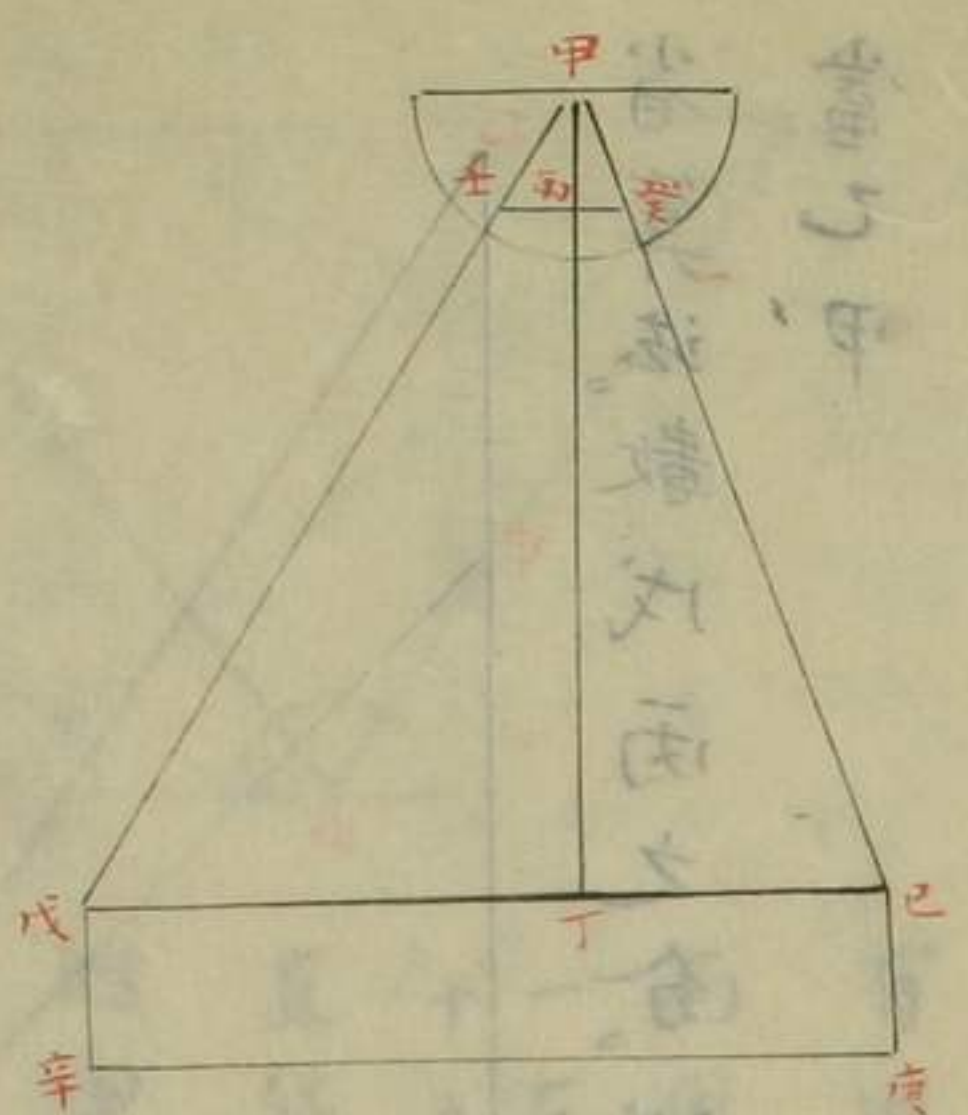


省算作壬癸小線當兩遠之距。戊己而丙甲當本山高。丁甲

- 一 切線較 〇三七〇〇
- 二 半徑 一〇〇〇〇
- 三 兩遠之較 一百八十五丈
- 四 本山高 五百丈

三角測高第七術

用山之前後兩遠測高

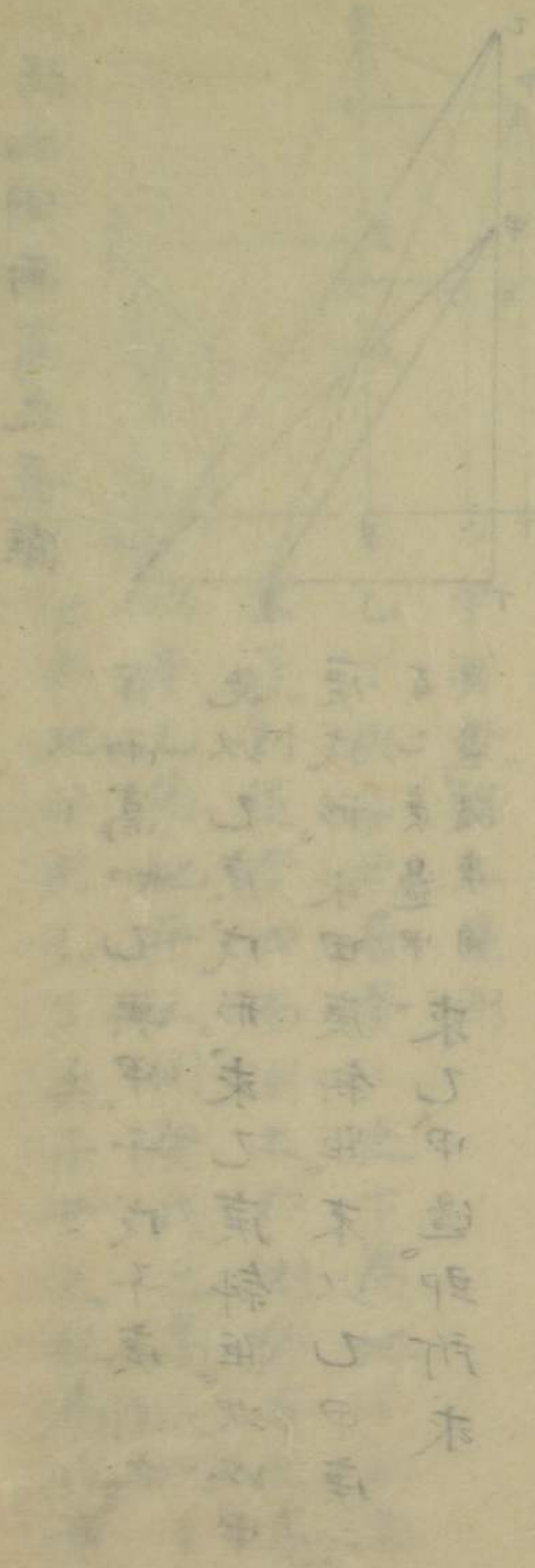


甲為山顛。可見戊己兩樹。其樹與山參相直。如山南樹直正。而不知其距。但山外有路。與此樹平行。為庚辛。其長三里。如兩樹正南北。此路即借庚辛之距。為亦自南向正北行。兩樹之距。以兩切線并為法求之。

先從甲測已。得甲角一十七度。四分。又從甲測戊。得甲角三十四度三十四分。法為兩切線并與已戊。若半徑與甲丁也。一率兩切線并。六〇九九。二率半徑。一〇〇〇。三率已戊。即庚辛。三求得四率甲丁。三里。四步。里三。求得一強。

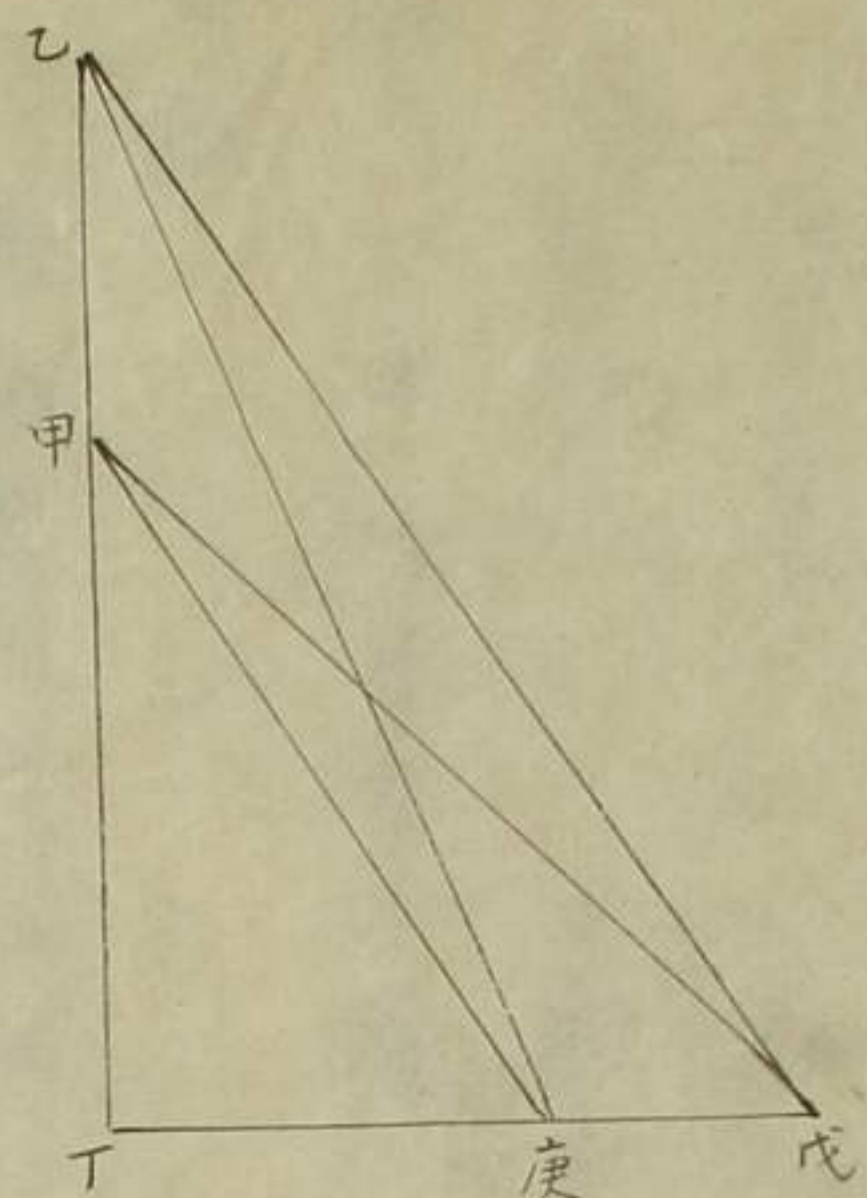
五度 正弦。一八一九 求得四率甲丁邊 二百九十七步
 次 乙丁丙形。有丁丙邊。丙丁二角。求乙丁邊 一百步
 一率 乙角 二度 正弦。六三七一 二率 丁丙邊 一百步 三率 丙角 十五度 正弦。二六六六 求得四率乙丁邊 四百步。
 末 乙丁甲形。有甲丁邊 二百九十七步。乙丁邊 四百步。丁角 九度 先求
 甲角
 一率 兩邊之總。五百步。二率 兩邊之較。九步 三率 半外角 十五度 切線。一四一五 求得四率半較角切線。二七九。查表得一十五度。七分弱以減半外角。得甲角四十度二十二分強
 次 求甲乙邊
 一率 甲角 正弦。六四七 二率 乙丁邊 四百步。三率 丁角 正弦。四二四 四步。三率 丁角 正弦。四二四 四步。三率 丁角 正弦。四二四 四步。

九三三 求得四率甲乙邊 二百九十四步弱
 論曰。此所測甲丁及乙丁。皆斜距也。或甲乙兩高。並在一山之
 上。於山麓測之。或甲乙分居兩峯。於兩峯間平地測之。或甲在
 水之東。乙在水之西。於一岸測之。並同
 若用有度數之指尺。並可用省算之法



三角測高第十術

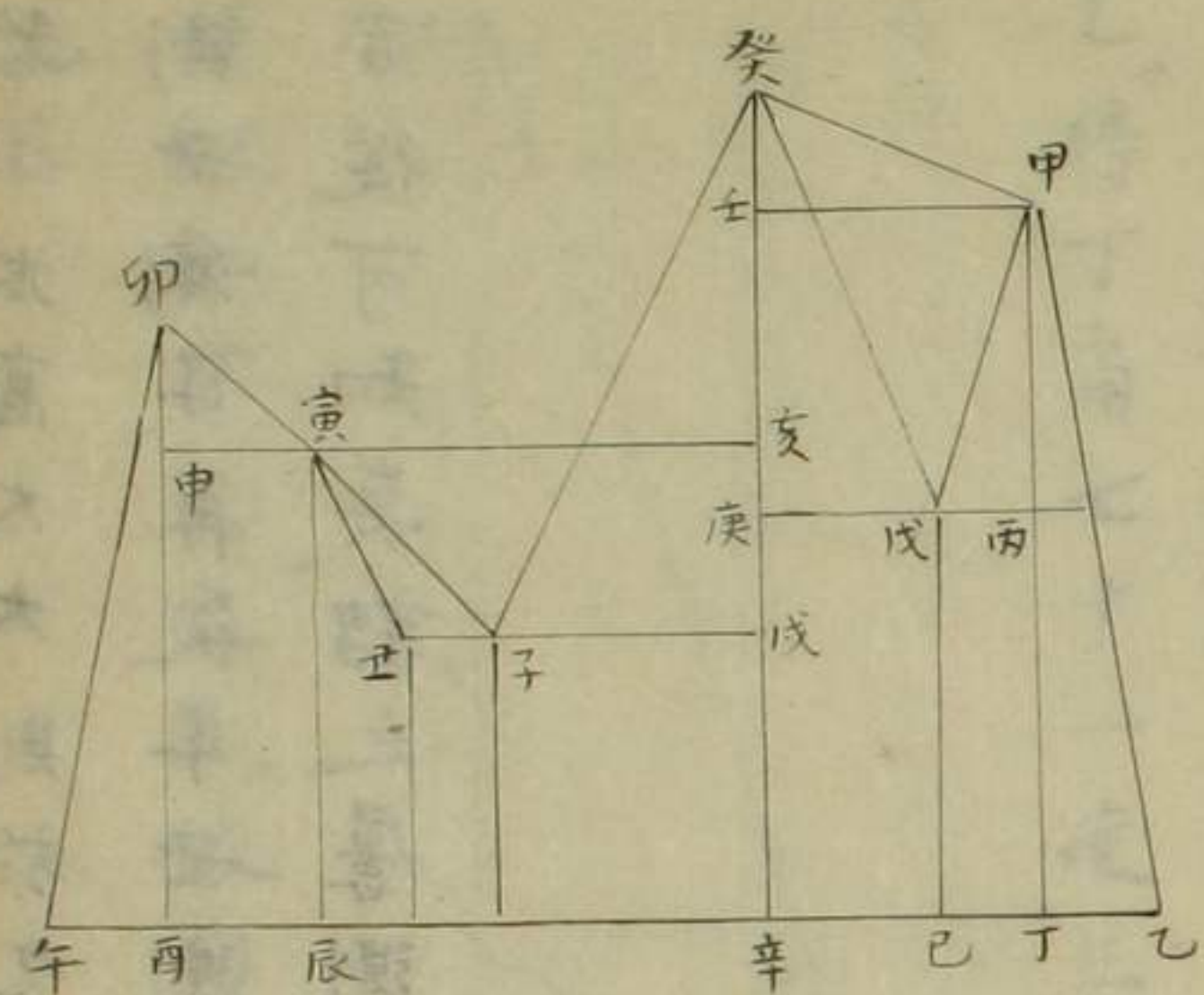
隔水測兩高之直距



有兩高如乙與甲。于戊子庚測之。
先以乙庚戊形。求乙庚斜距。次以甲
庚戊形。求甲庚斜距。末以乙甲庚形。
有乙庚邊。及庚角。求乙甲邊。即所求

三角測高第十一術

若山之最高顛。為次高所掩。則用遠測。
山前後左右。地勢不同。則用環測。環測者。從高測下。與測深同。
太高之山。則用屢測。



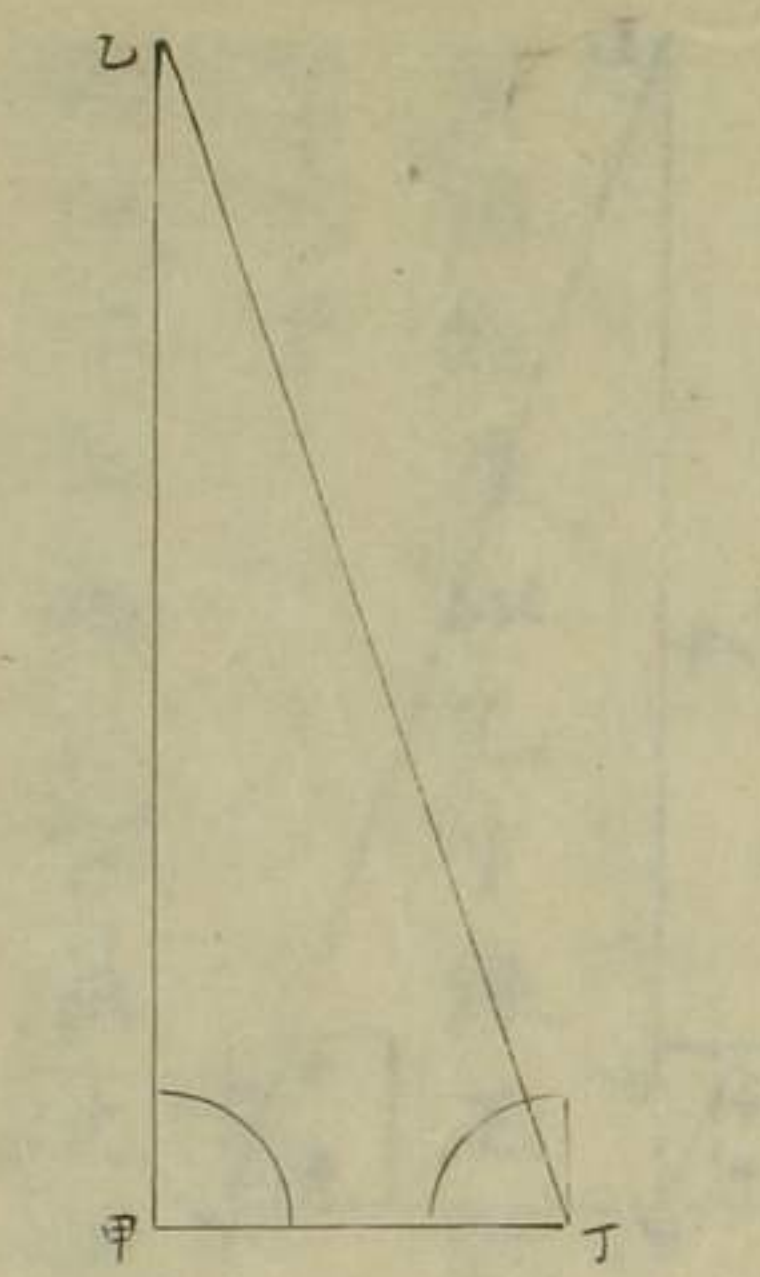
癸極高。為甲次高所掩。則先測甲。復從
甲測癸。謂之遠測。
乙丁與子丑。居癸山之下。為地平。而各
不等。則從癸四面測之。如測癸辛之高。
以辛乙為地平。又測癸戊之高。以戊子
丑為地平。則乙丁與子丑之較。為戊辛。
謂之環測。

若山太高太大。則於乙測甲。又於甲測癸。或先測卯。又測寅。又測丑。測子。再從子丑測癸。細細測之。則真高自見。而地之高下。亦從可知矣。謂之屢測。

三角測遠第一術
 古平面測遠之法。其法不一。或於甲立表安象限。以邊指乙。餘一邊對丁。從甲乙直線上。任取九步如丁。於丁復安象限。以邊對甲。闕管指乙。得丁角七十一度三十四分。用切線。算得乙距甲二十七步。

三角測遠第一術

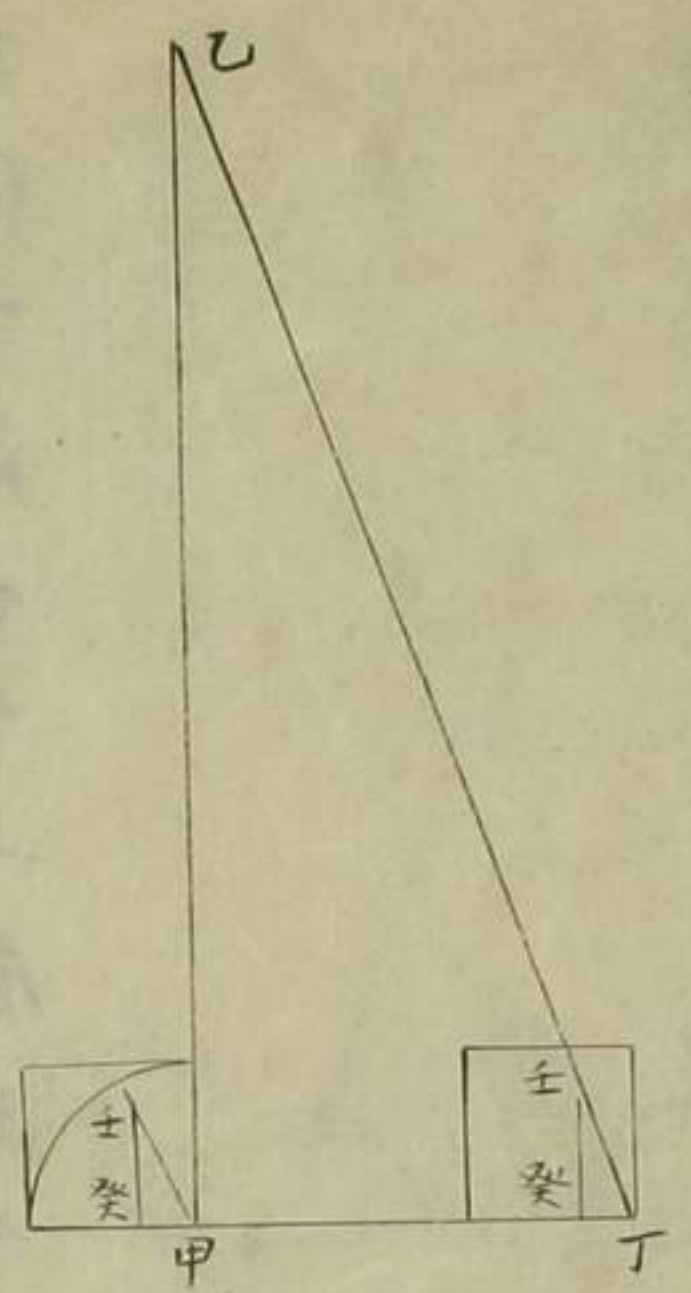
古平面測遠之法。其法不一。或於甲立表安象限。以邊指乙。餘一邊對丁。從甲乙直線上。任取九步如丁。於丁復安象限。以邊對甲。闕管指乙。得丁角七十一度三十四分。用切線。算得乙距甲二十七步。



- 一 半徑
- 二 丁角切線
- 三 丁甲
- 四 乙甲

若欲知丁乙之距。依勾股法。甲丁甲乙各自乘。并而開方。即得乙丁。

若徑求乙丁。則為以半徑比丁角之割線。若甲丁與丁乙也。是為以句求弦。



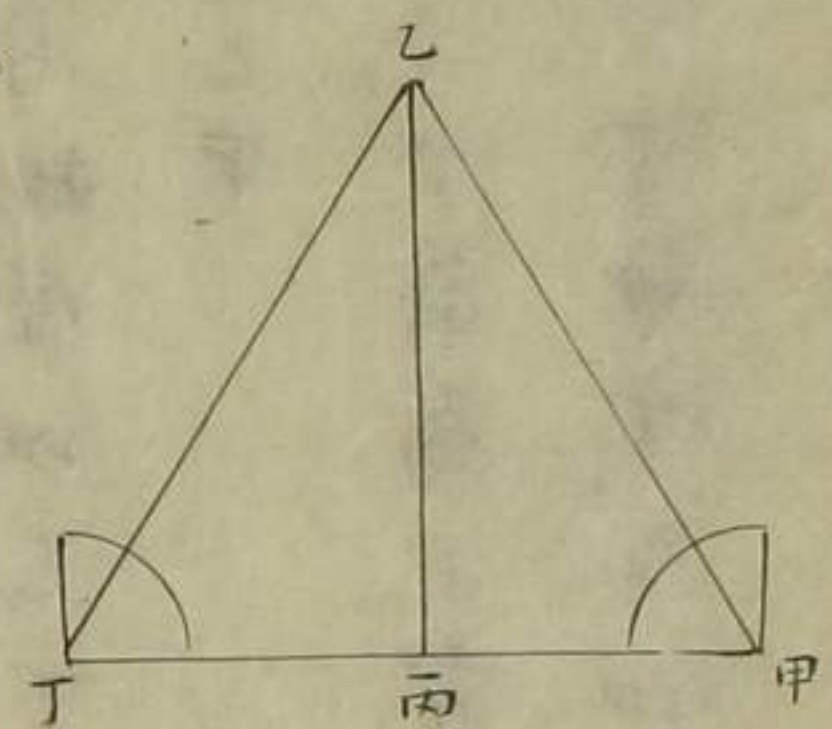
若先從丁測。則以測器向甲。指尺向乙。作丁角。次依丁甲直線行至甲。務令測器之一邊順丁甲直線。餘一邊指乙。則甲為正。方角如前算之。即得。或前或後移測。求為正。方角乃止。

三角測遠第二術
省算法



人在甲。欲測乙之遠。於甲置儀器。一邊向乙。一邊向丁。成正方角。乃依甲丁直線行至丁。以邊向甲。關管指乙。作四十五度角。即甲丁與甲乙等。若用矩度。以乙丁線正對方角。則丁角為正方角之半。而甲丁等乙甲。論曰。丁角為正方角之半。則乙角亦正方角之半。而句與股齊。故但量甲丁。即知甲乙。

又省算法



於甲置儀器以邊向丁。闕管指乙。作六十度角。順甲丁直線行至丁。復作六十度角。則甲丁等甲乙。

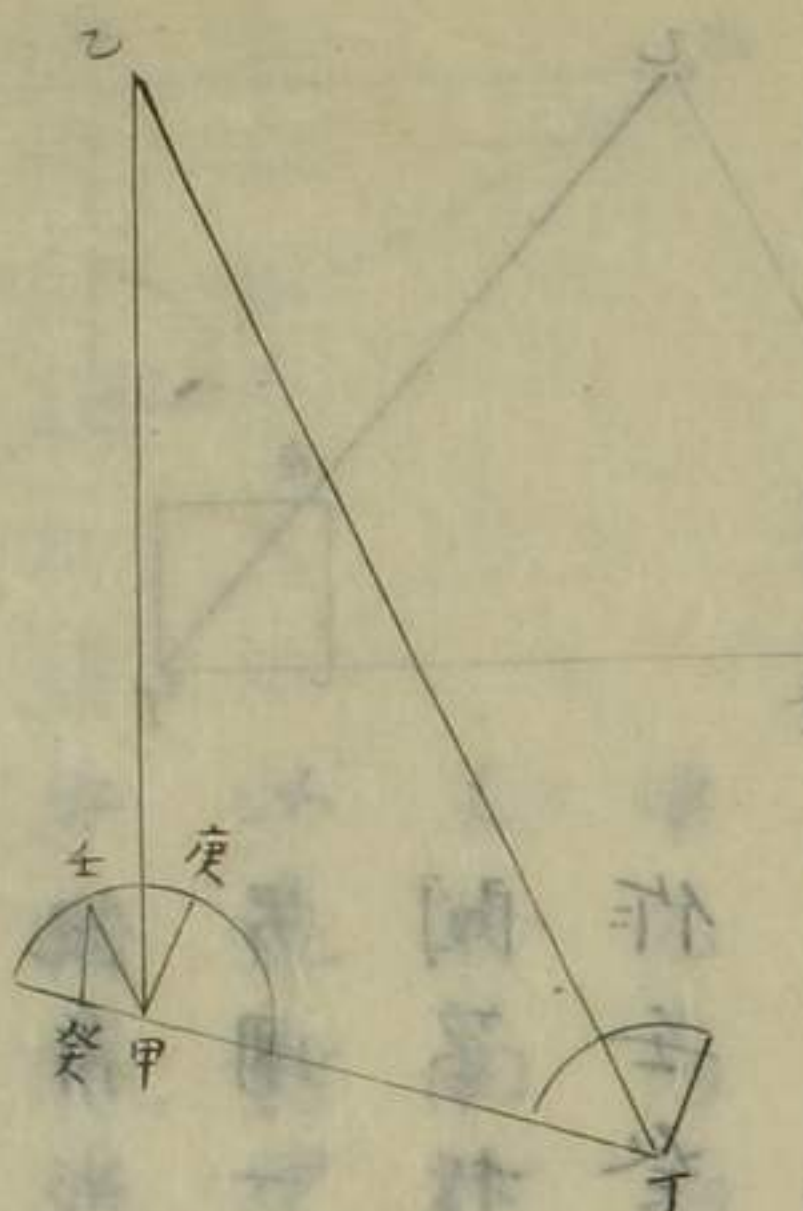
論曰。甲角丁角俱六十度。則乙角亦六十度矣。故三邊俱等。若丁不能到。則於甲丁線上取丙。以儀器二邊對甲對乙。成正方角。則甲丙為乙甲之半。

三角測量第二術



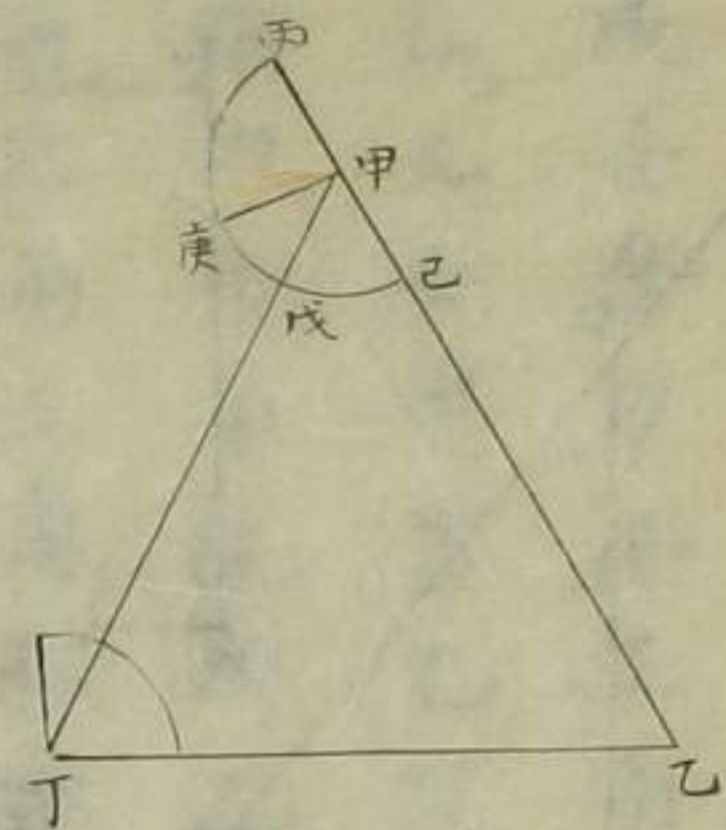
三角測量第三術

平面測遠用斜角



人在甲測乙。而兩旁無餘地。可作句股。則任指一可測之地。如丁。量得丁甲二十丈。於丁安儀器。以邊向甲。窺筭指乙。得丁角四十六度。又於甲安儀器。以邊指丁。窺筭指乙。得乙甲庚角。二十度。加象限。九十度。得甲鈍角。一百一十度。法為以乙角之正弦。二角減半周之餘。比丁甲。若丁角之正弦與乙甲算得乙甲三十六丈八尺二寸。若求乙丁。則為以乙角之正弦比丁甲。若甲角之正弦與乙丁算得乙丁四十七丈七尺八寸。甲為銳角。法同。

與丁角等。則丁戊即甲乙



又法。甲置儀器。指乙。指丁。作角。以減半周。成
外角。已戊為甲角之度。丙
指乙。使丁角如半外角之度。但量甲丁。即得

論曰。凡外角能兼內餘二角。乙之度。丁角既為外角之半。則乙
角亦外角之半矣。角等者。所對之邊亦等。故甲丁等甲乙

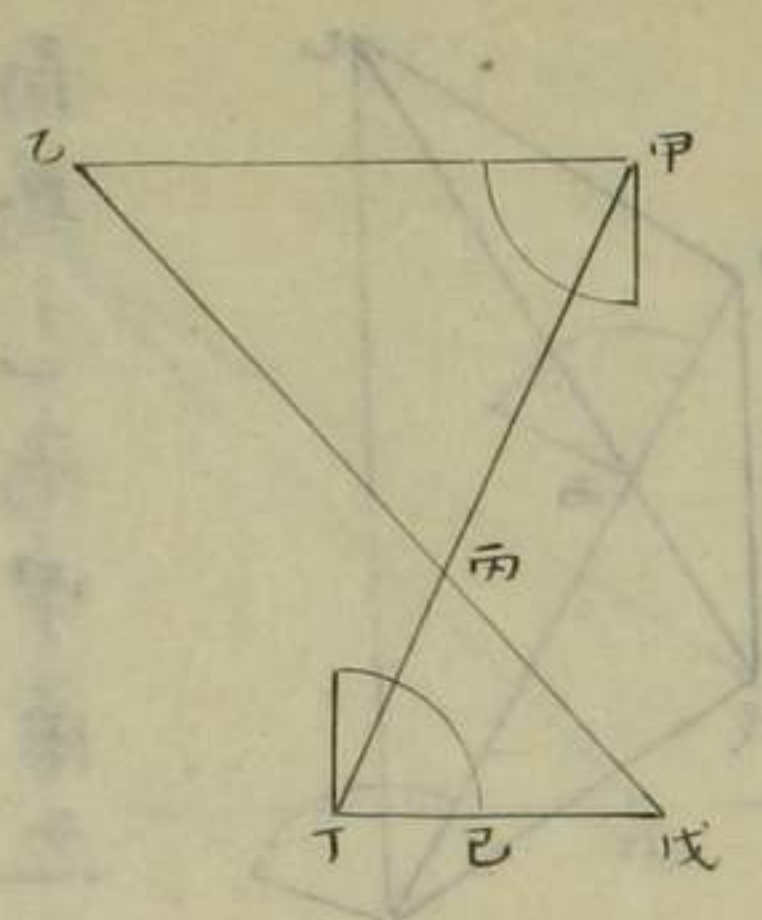


平面測遠部外經地師壬亥宮乙丁

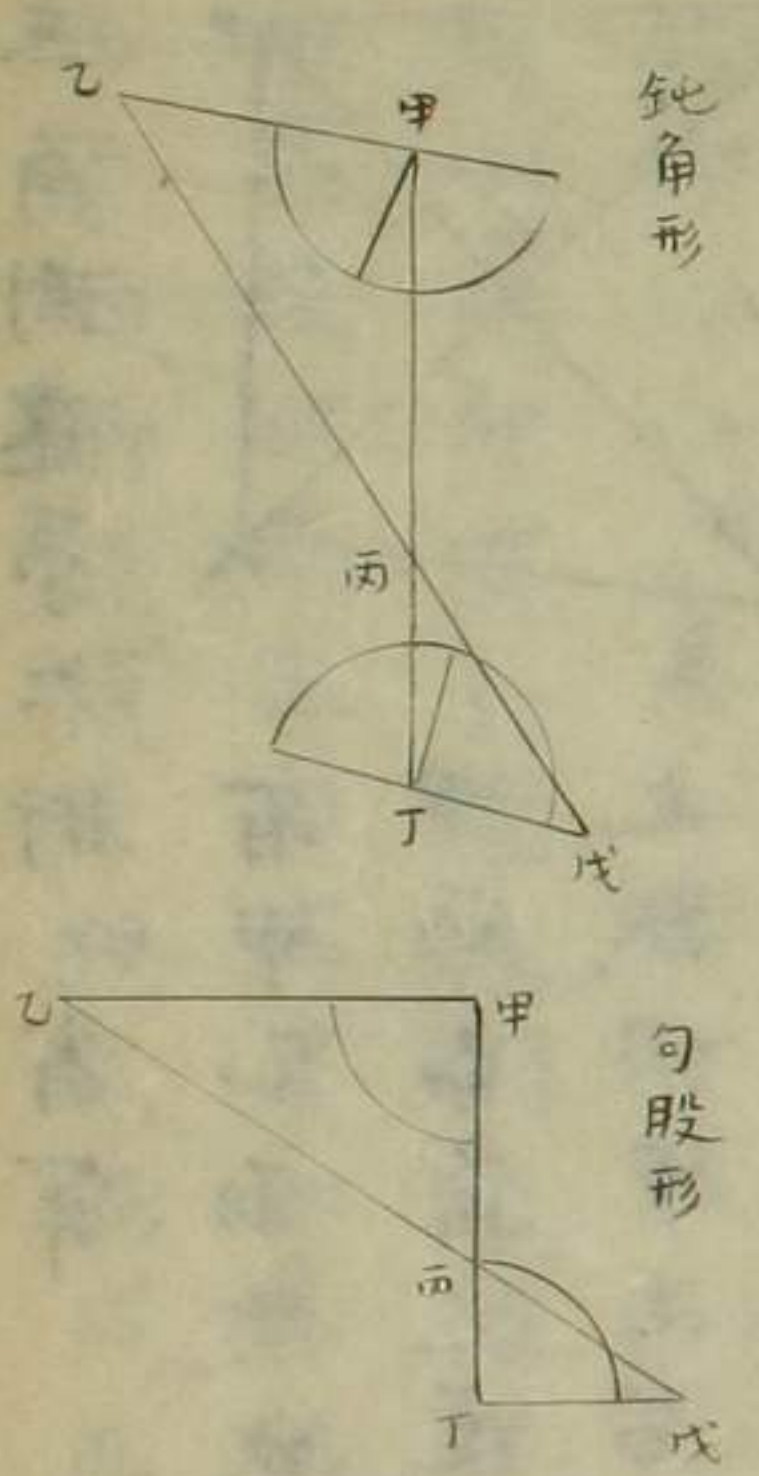
三角測遠第四

三角測遠第五術

平面測遠借他形為比例法

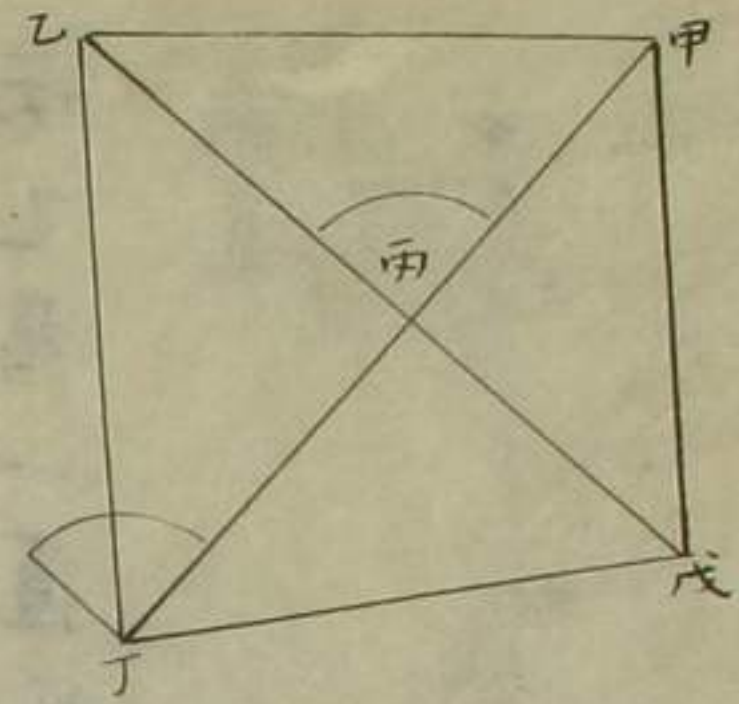


丙乙為一直線。則丁丙與丁戊。若丙甲與甲乙。形並同一理

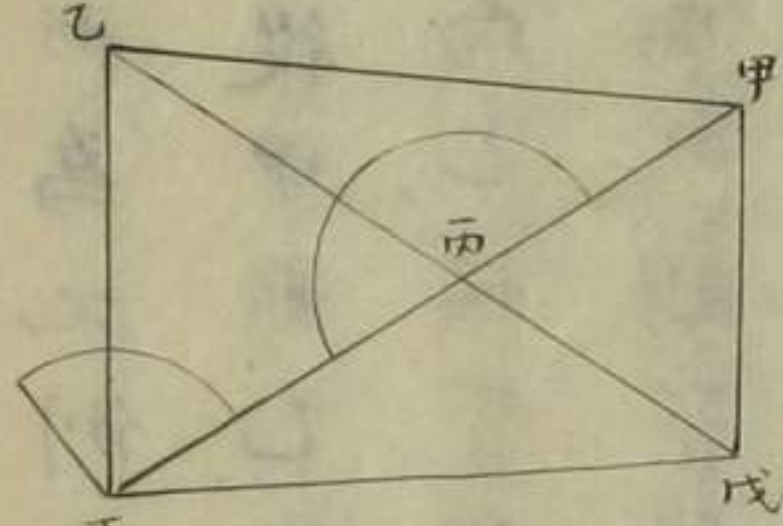
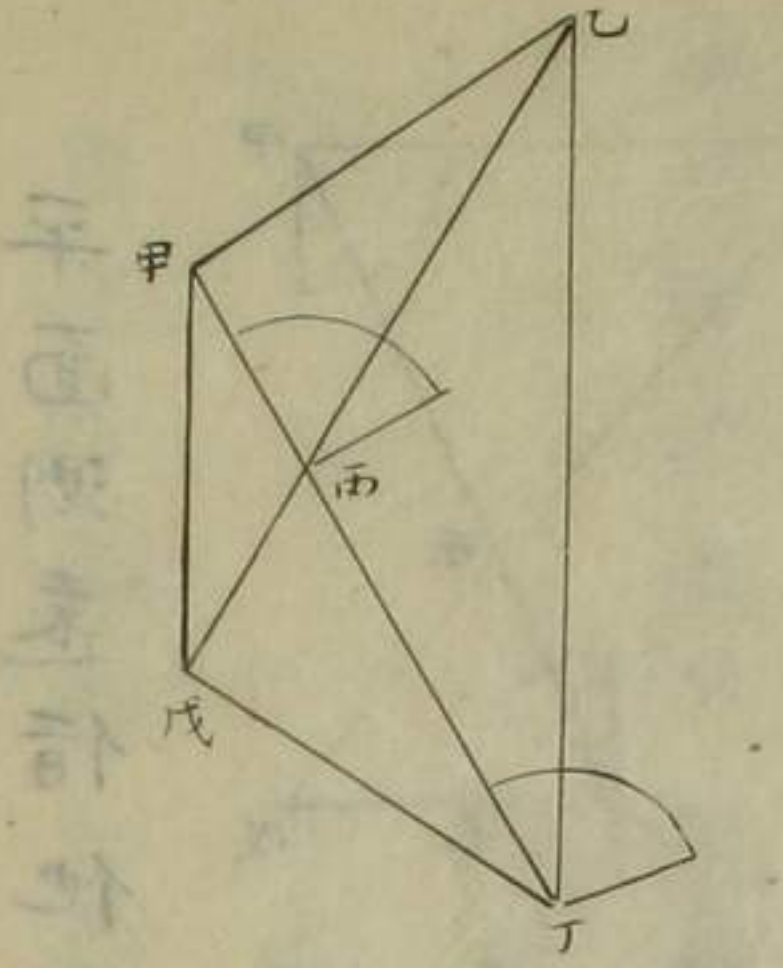


論曰。丙戊丁與丙甲乙。兩三角
形相似。以兩形之丙角為交角。
必相等。而丁角又等甲角。則戊
角亦等乙角矣。故其比例等

三角測遠第六術 省算

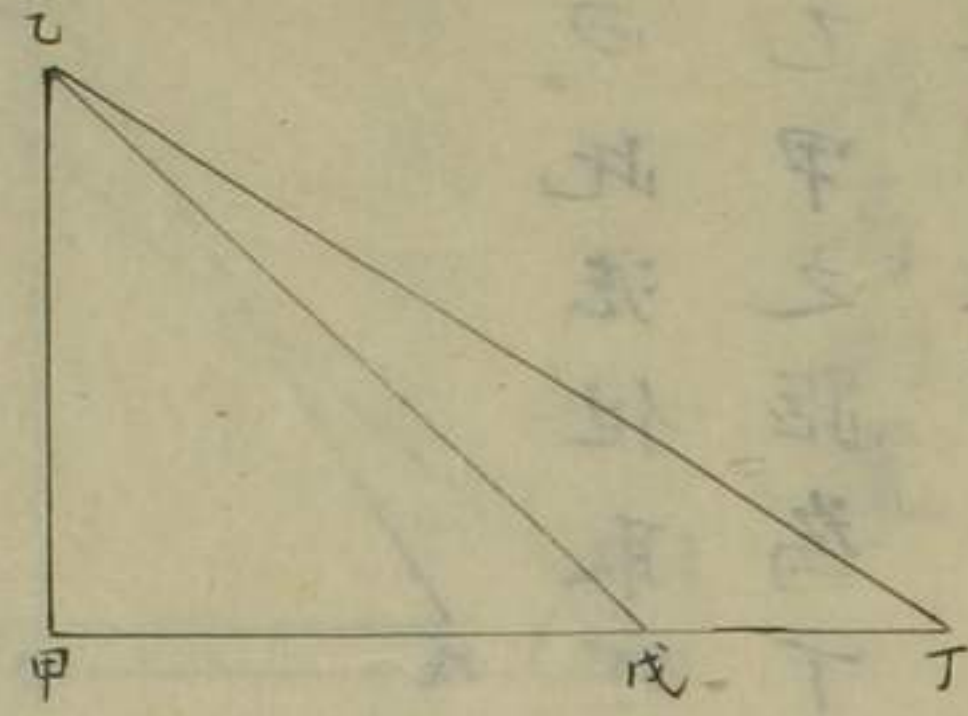


有甲乙兩所欲測其距。如前立丙表以器測得甲丙乙角之度。又順乙丙直線行至戊。今丙戊之距同甲丙而止。再從戊行至丁。從丁闕丙至甲。成一直線於此直線上。進退移測使乙丁丙角為乙丙甲角之半。則但量丁戊。即同乙甲為鈍角。或丙



甲丙乙三角形與戊丙丁形等角等邊也。故丁戊即乙甲。論曰。甲丙與丙戊既相等。乙丁丙角為乙丙甲外角之半。則丙乙丁角亦外角之半。是乙丙與丁丙亦等也。而丙文角又等。是

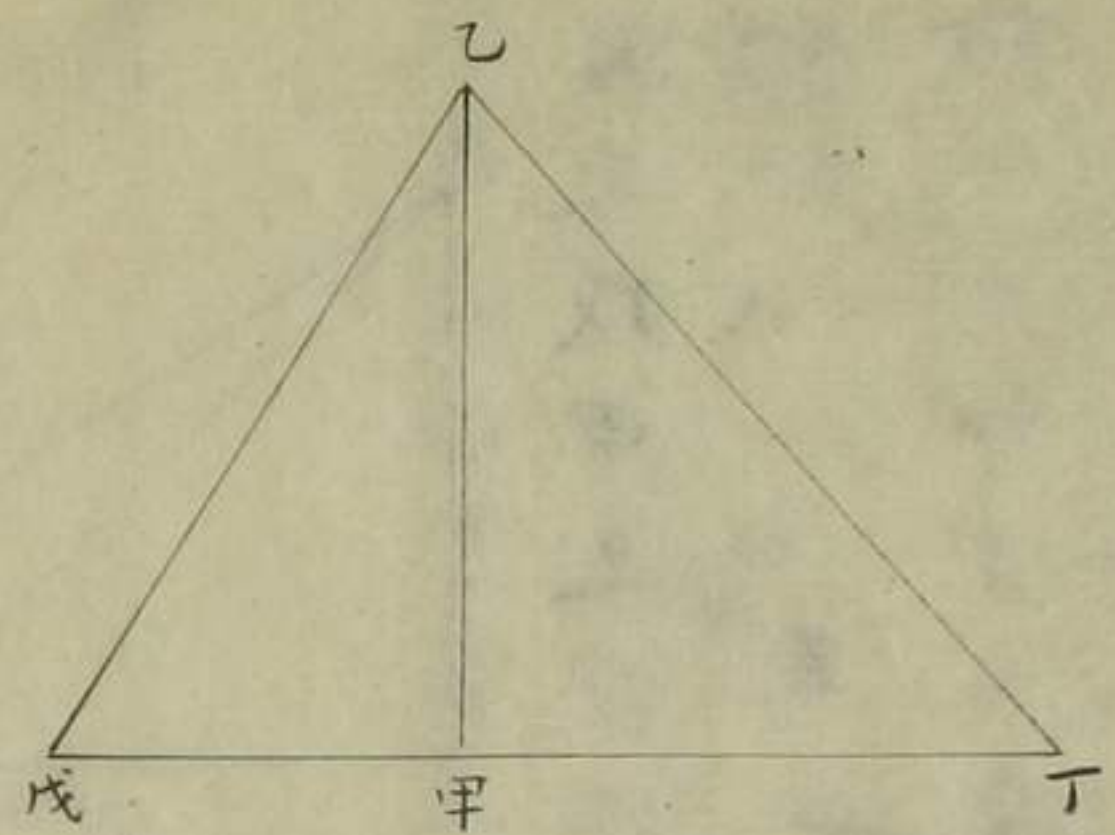
三角測遠第七術 重測



甲乙為兩所欲測其距。而俱不能到。則兩測之於戊於丁。量得戊丁之距。用器測得戊角五十五度。四丁角三十六度。兩角之餘切線較五五。為一率。半徑一。為二率。戊丁步十六。為三率。得四率為乙甲之距。步三十。若求戊甲之距。以兩測之餘切較五五。為一率。先測戊角之餘切。八一八。為二率。丁戊步十六。為三率。得四率戊甲步二十四。論曰。此即古人重表測遠法也。必丁戊甲直線與乙甲線橫直相遇。使甲為正角。其算如真。假如乙甲正南北距。則丁戊甲必正東西。斯能橫直相文。而成正角也。

三角測遠第八術

分兩處重測

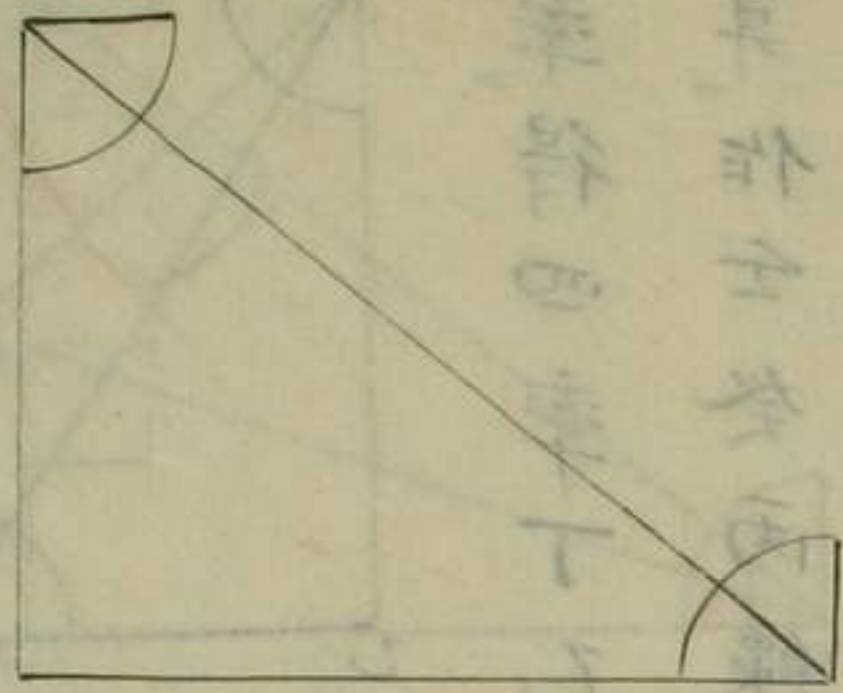


乙岸在河東。欲測其距西岸之遠。如甲。則任於甲之左右。取丁戊兩所。與甲參相直而距河適均。測得丁角五十分。戊角四十五分。甲用兩角度之餘切線并一五〇。為一率。半徑一〇〇。為二率。丁戊之距九十步。為三率。求得四率。乙甲之距。六十步。為兩岸闊。

論曰。此法但取丁戊直距。與河岸平行。則不必預求甲點。而自有乙甲之距。為丁戊之垂線。尤便於測河。視用切線較更簡捷而穩當矣。

三角測遠第九術

用高測遠

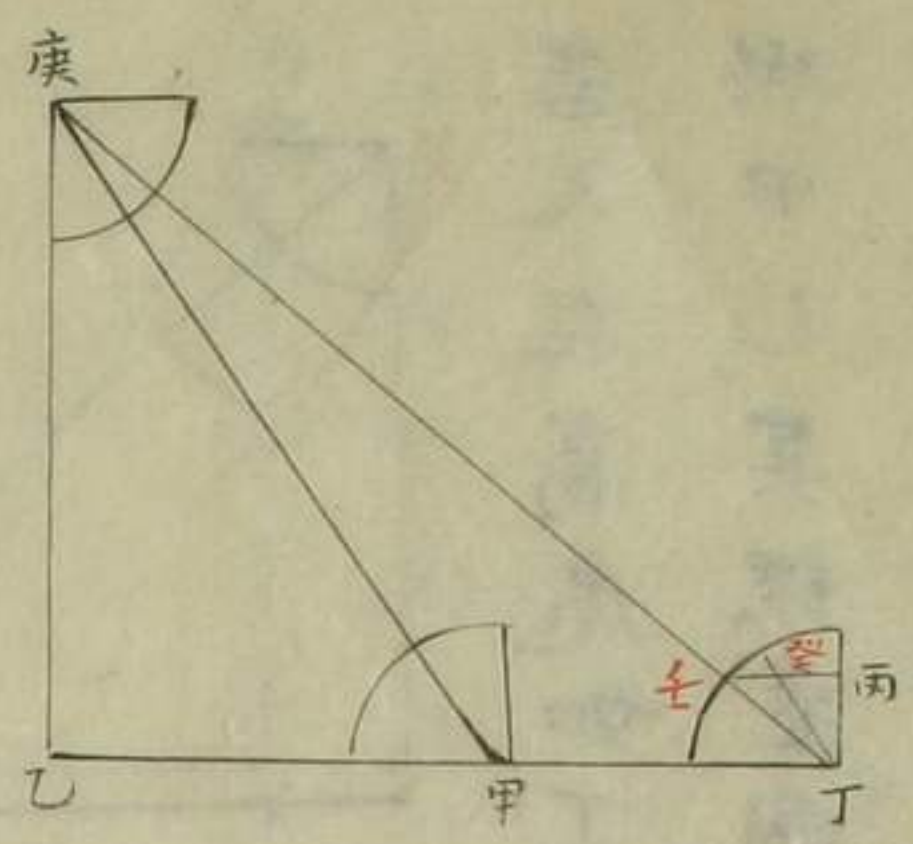


甲乙為兩所。不知其遠。而先知丁乙之高。於甲用儀器。測丁乙之高幾何度分。即知甲乙法為半徑比甲角之餘切。若丁乙高與甲乙之遠。

若人在高處如丁。用高測遠。則為半徑比丁角之切線。若丁乙與甲乙。其理並同。但於丁加儀器。而用正切。

三角測遠第十術

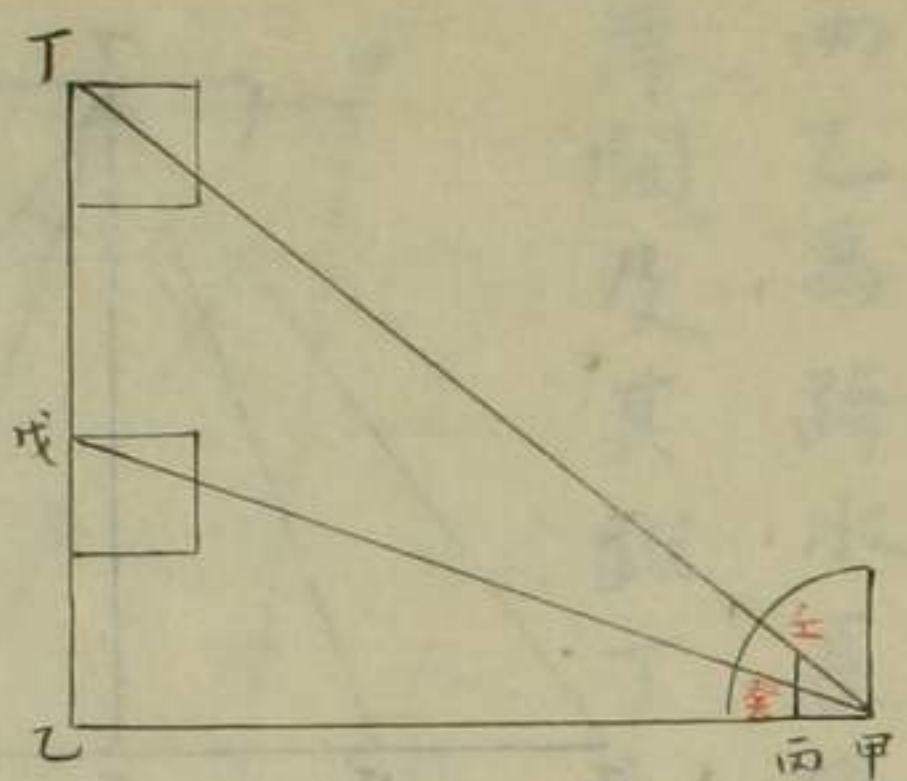
用不知之高測遠



欲知丁乙之遠而不能至乙乙之上有庚又不知庚乙之高法用重測先於丁測之得丁角一三十八度又依丁乙直線進至甲測之得甲角一五十三度五分兩餘切較〇〇五四為一率丁角餘切〇〇一七為二率丁甲之距步二十為步〇三或丁後有餘地退後測之亦同省算作壬癸丙線以壬癸分當丁甲之距壬丙當丁乙之遠若人在高處如庚於庚測丁測甲以求丁乙其法亦同但於庚施儀器而用正切庚乙之切線若丁甲與丁乙

三角測遠第十一術

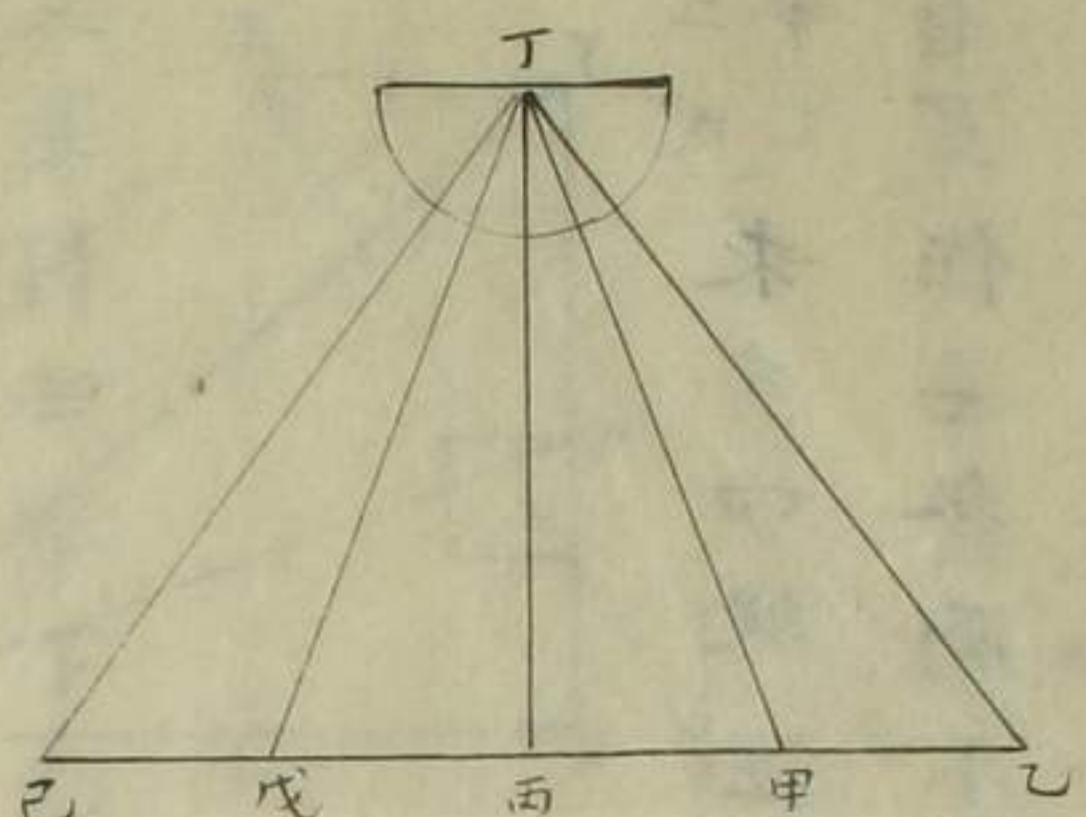
用高上之高測遠



甲乙為兩所而乙之根為物所掩如山麓有巖石林木蔽虧或島嶼盤紆荻葦深阻難得直距若用兩測甲外又無餘地但取其高處如戊為山顛山上有石臺臺上有塔如丁丁戊之高原有定距以此為用從甲測丁又測戊得兩角甲乙二戊求其切線法為以切線較比半徑若丁戊與乙甲省算作壬癸丙小線以壬癸當丁戊則甲丙當甲乙矩度同若從高測遠則於丁於戊兩用儀器測甲用丁戊兩角之餘切較以當丁戊而半徑當甲乙其理亦同

三角測遠第十二術

從高測兩遠

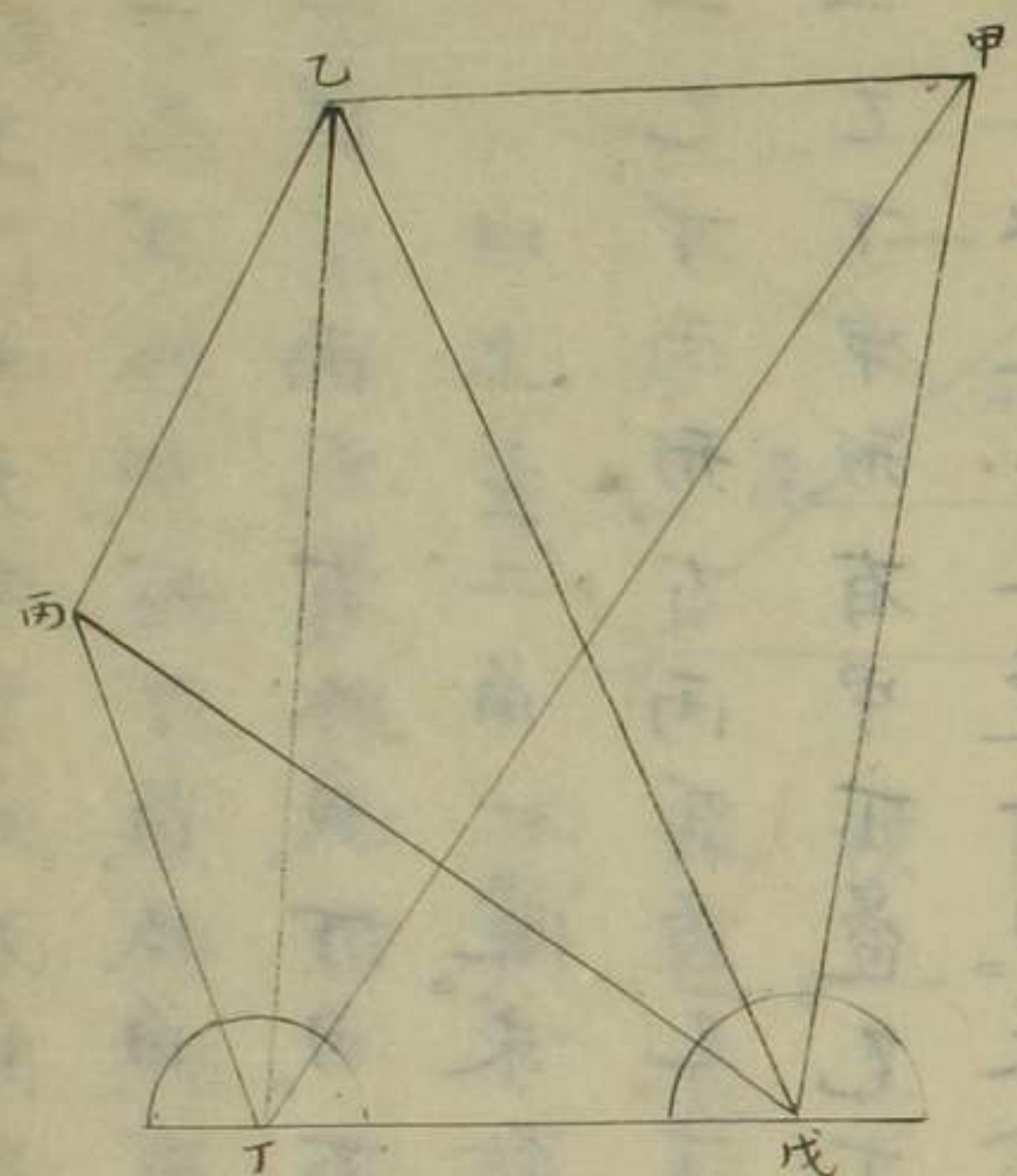


甲乙兩遠。人從高處測之。於丁用儀器測甲
 測乙。得兩丁角。一甲丁丙。法為以半徑比兩
 角之切線較。若丁丙高與乙甲也
 又法。既得兩角。則移儀器窺戊。作戊丁甲角。
 如甲丁丙之倍度。又移窺己。作己丁乙角。如
 乙丁丙之倍度。則但量己戊。即知乙甲

三角測遠第十三術

連測三遠

丙乙為跨水長橋。甲乙為橋端斜岸。今於丁測橋之長。并甲乙
 岸闊。及其距丁之遠近



法於丁安儀器。以邊指戊。衡指甲
 指乙。指丙。作丁角五。一甲丁戊。二
 丁甲丙。四戊丁丙。五乙丁
 丙。皆丁角。而有大小
 次順儀器邊。直行至戊。得丁戊之
 距。於戊復用儀器。以邊指丁。衡指
 丙。指乙。指甲。作戊角三。一丁戊丙
 三。甲戊丁。皆戊
 角。而有大小

一甲丁戊形。有丁角。戊角。有丁戊邊。可求甲丁邊
 一乙丁戊形。有丁角。戊角。有丁戊邊。可求乙丁邊
 一戊丁丙形。有戊角。丁角。有丁戊邊。可求丁丙邊

以上並二角一邊。求餘邊。得甲乙丙三處距丁之遠近

一乙丁丙形。有丙丁邊。乙丁邊。有丁角。可求乙丙邊

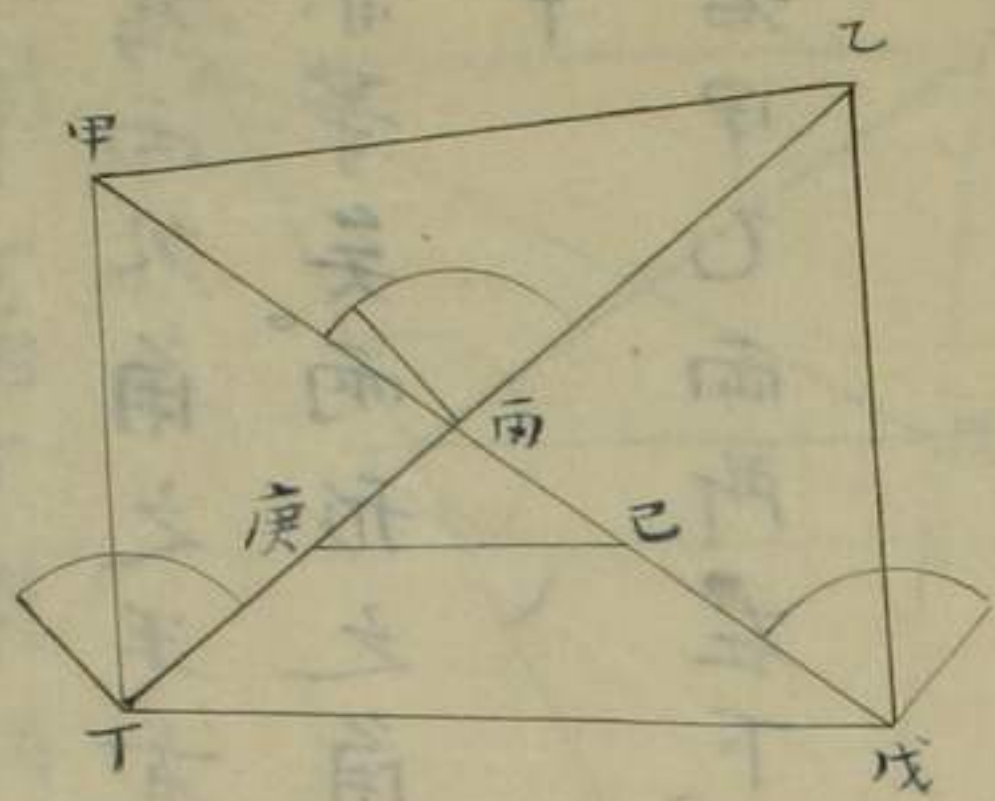
一乙丁甲形。有甲丁邊。乙丁邊。有丁角。可求乙甲邊

以上並二邊一角。求餘邊。得岸闊與橋長

三
 角
 測
 斜
 坡
 第
 一
 術
 三
 角
 測
 斜
 坡
 第
 一
 術
 三
 角
 測
 斜
 坡
 第
 一
 術

三角測斜坡第一術

斜坡上平面測兩所之距



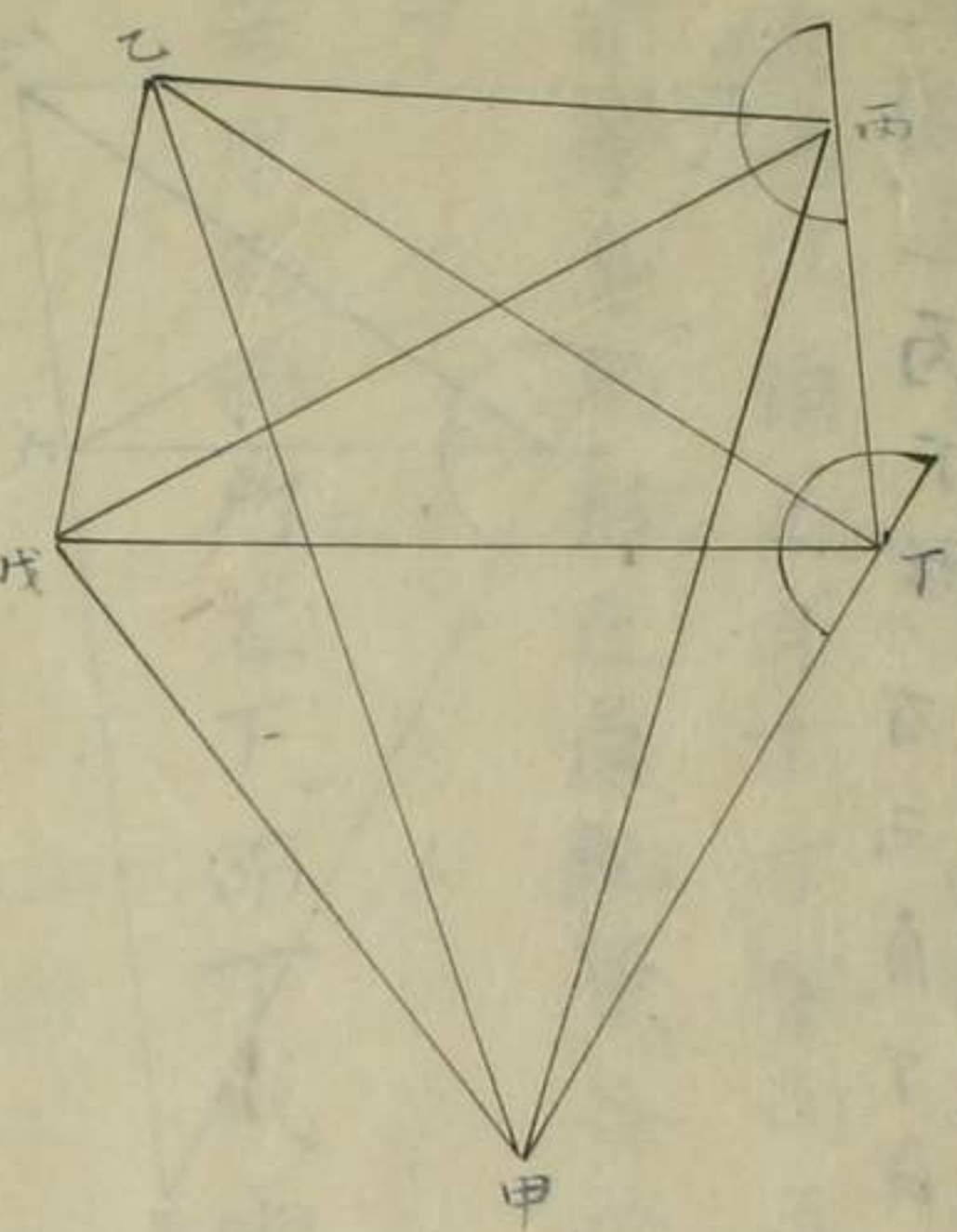
斜坡上有甲乙兩所。欲量其相距之數。任立
 丙表。測得乙丙甲角度。乃順甲丙直線進退
 闕乙。至戊得乙戊丙角。為乙丙甲角之半。又
 橫過至丁。從丁闕丙至乙成一直線。順此直
 線進退闕甲。至丁得甲丁丙角。亦為丙角之
 半。則丁戊即乙甲

又法。不必立表。但任指一點為丙。而於甲丙直線上。任取己點。
 乙丙直線上。任取庚點。作庚丙己三角形。有己角庚角。即知丙
 角。未乃如上作丁戊兩角為丙角之半。即所求

三角測斜坡第三術

測對坡之斜高及其巖洞

從丙。從丁。測對面之斜坡戊甲。及乙戊



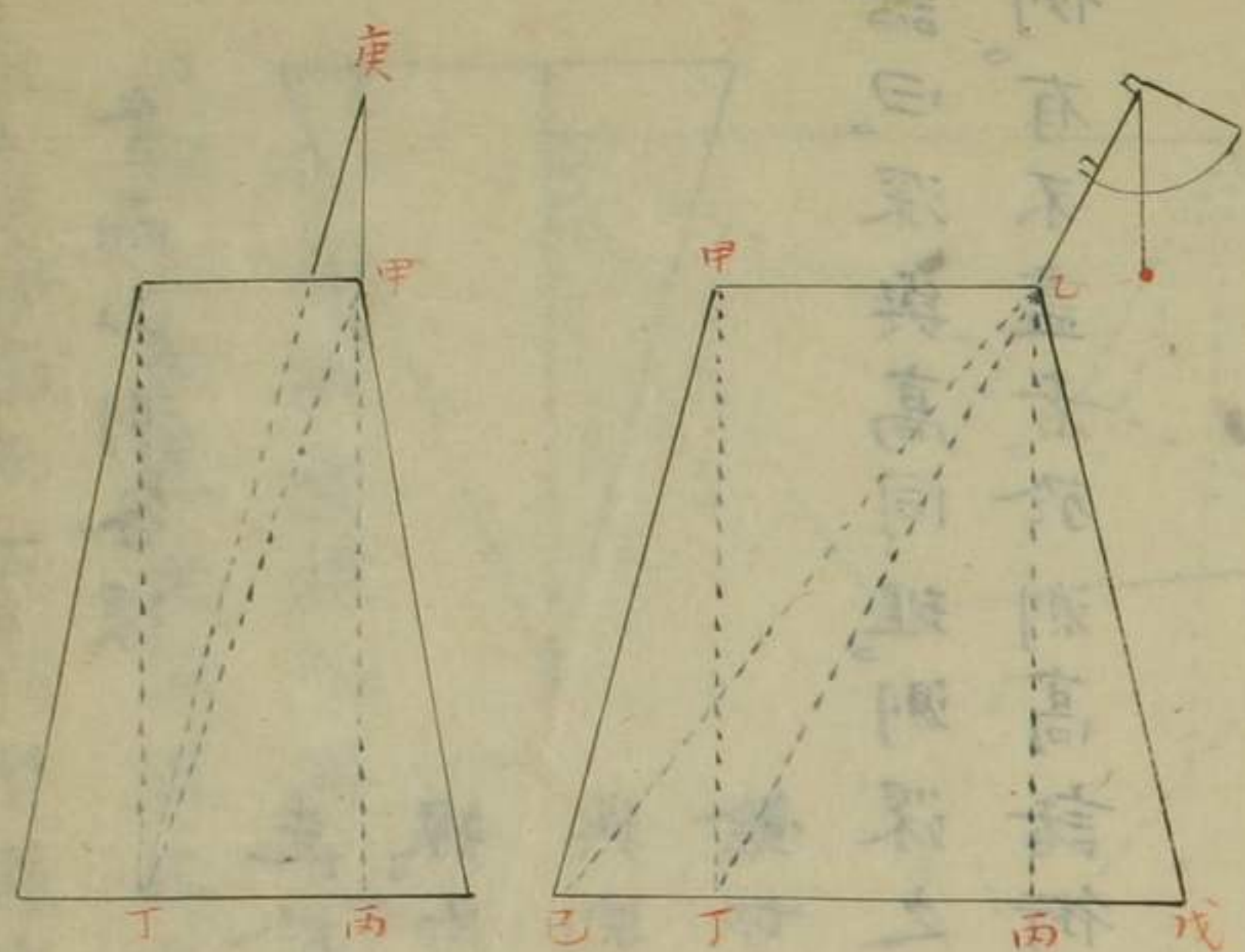
丙戊形。有丙戊邊。丙角。甲邊。丙角。或戊為高處基址。乙為房檐亦同。

可求戊甲邊為所測對坡斜高

一乙丙丁形。有丙丁兩測之。可求乙丁邊。二戊丙丁形。有丙丁兩邊。可求丁戊丙戊二邊。三乙丁戊形。有乙丁兩邊。可求乙戊邊。為所測對山上斜入之巖。四丙丁甲形。有丁角。丙角。可求丙甲邊。五甲

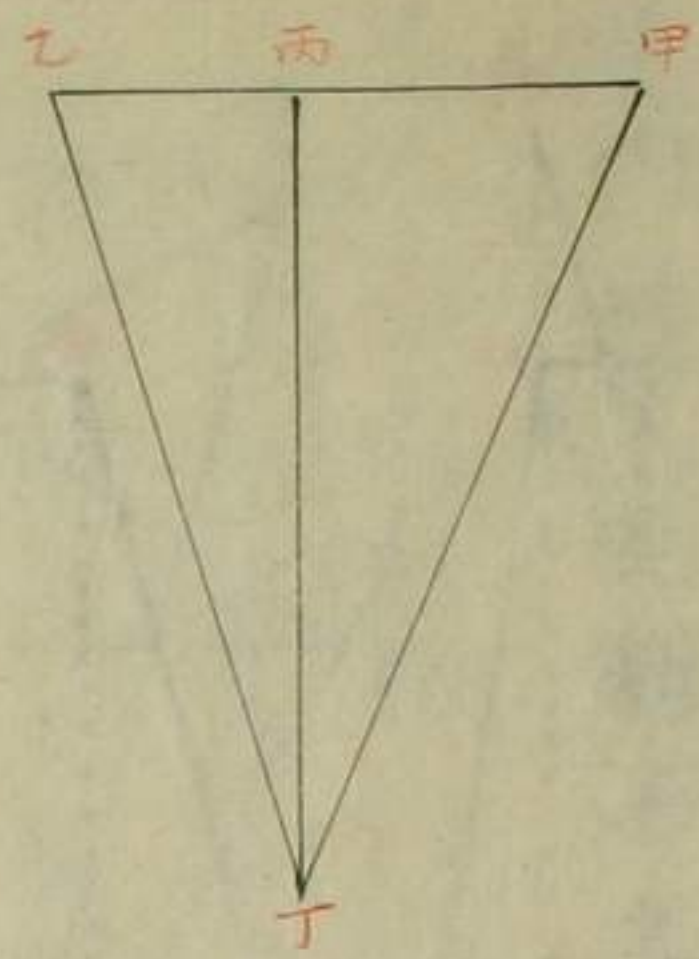
三角測深第一術

測井之深及闊



甲乙為井口之闊。於甲作垂線至丁。或用磚石投之。以識其處。從乙測之。得乙角。成甲乙丁句股形。即以甲乙井口為句。得甲丁股。為井之深。既得乙丙深。即丁即可用乙己戊形。得己戊為底闊。法以半徑當井深。丙以兩乙角。乙一戊。乙二己之切線。并當井底之闊。己戊。若不知井口。則立表於井口。如庚甲。求庚甲二角。成庚甲丁形。測之。

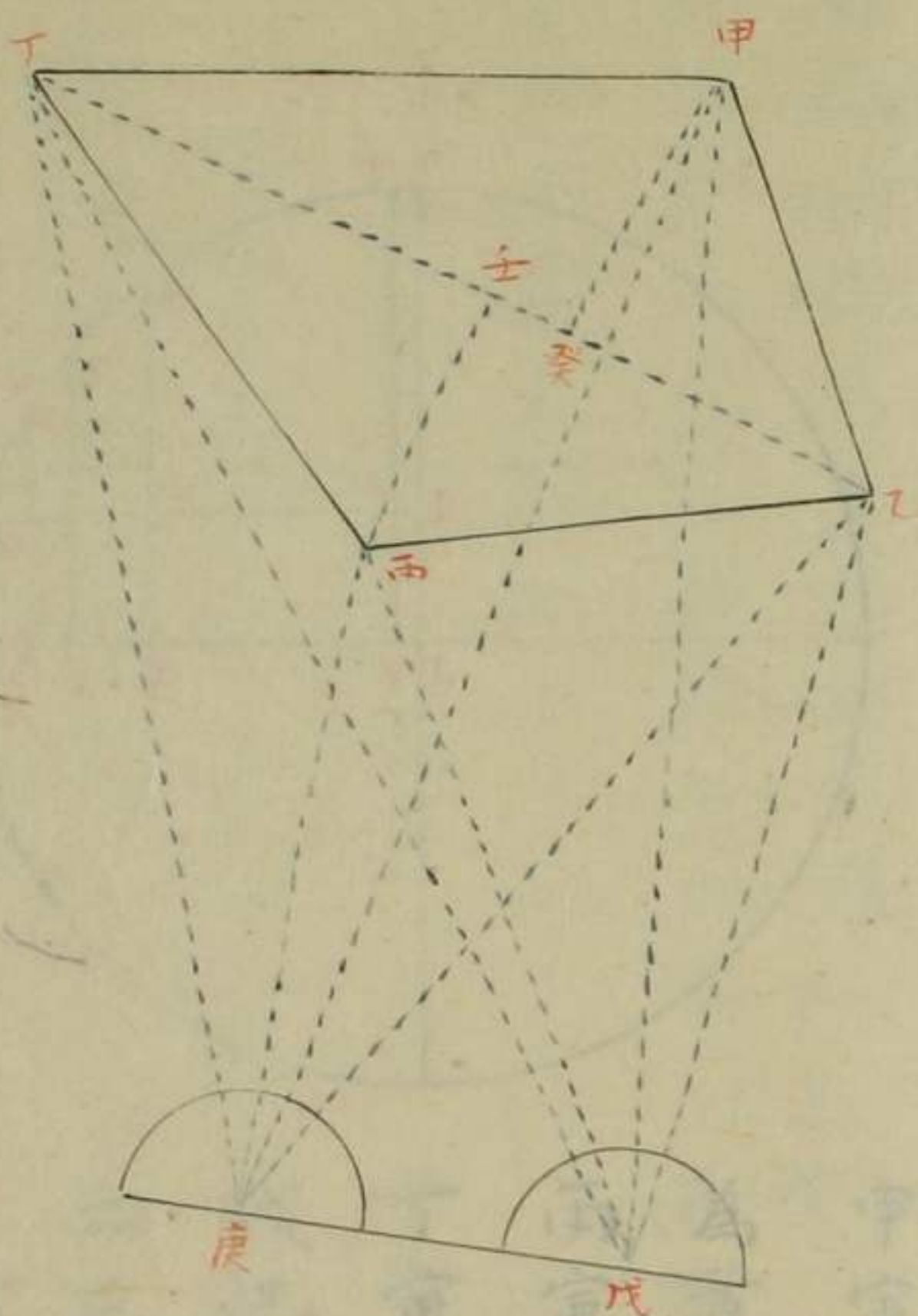
三角測深第二術
登兩山測谷深



論曰。深與高同理。測深之法。即測高之法也。在此數則以發其例。有不盡者。於測高諸術詳之。可也。

先於二山取甲乙之平。而得其距數為橫線。即可用三角形求丙丁垂線為谷之深。與測高同理。測高也。法為甲乙兩角之餘切線。并比半徑。若甲乙與丙丁。

附隔水量田法



甲乙丙丁田。在水中不可得量。于岸上戊庚兩處用儀器測之。得諸三角形。算得其邊。一甲乙。二乙丙。三丙丁。四丁甲。次求乙丁對角線。分為兩三角形。一甲乙丁。末用和較法求得分形之兩垂線。一甲

并兩垂線而半之。以乘乙丁。即得田積。或用三較連乘法。求三角形積并之。亦同。凡有平面形在峭壁懸崖之上。及屋上承塵。可以仰觀者。並可

以丙辛線為正弦。查其弧。得丙寅三十六度五十二分。亦以丁庚線為正弦。查其弧。得丁寅十四度二十九分。以丙寅弧與丁寅弧相加。得總弧辰寅五十一度二十一分。其餘弦。六二四五六如辰卯。即子癸又以丙寅弧與丁寅弧相減。得存弧丑寅二十二度二十三分。其餘弦。九二四六六如丑癸。因總弧小於象限。當以丙餘弦相減。其較。三。一。如子於丑癸內減乃平分子丑於壬。其數。一五。五為壬丑子癸得之或壬子。皆與戊己同。即為四率。此所得與三率所推。但有微差而不相遠。按此以加減代乘除。依其法宜如此。今刻本相減相并。訛為并

而相減。又於相并之弧。訛為五十度二十分。相減之存弧。訛為二十二度二十四分。故其正弦皆訛。而所得之四率。只一四三一。與三率所推不合矣。又按以加減代乘除之法。不過以明圖法之妙。其中又有此用耳。若以入算。終不如乘除之便。何也。設問每多整數。而正弦之數皆有畸零。不能恰合。一也。先用設數求弧度。必用中比例始得相合。則於弧度亦有畸零。二也。弧度既有畸零。則其查餘弦。又必用中比例。三也。兩餘弦有用加之時。有用減之時。易至於訛。四也。及其所得四率。以較三率法之所得。終有尾數之差。五也。蓋論數學。則宜造其微而施之於用。則貴其簡易。若可以簡易者。而故引之繁重。又何貴乎。故曰不如乘除之便也。

觀設例之時。便有訛錯如此。則其不便於用亦可見矣。又按此加減法。即測量全義第七卷所言加減也。其以總存兩餘弦相加減而半之者。即初得數也。然後以兩正弦相乘得之。此以加減得之。而省一乘矣。實弧三角中大法。而彼但舉例而隱其圖。姑示其端於此。而又不直言其即弧度之初得數。此皆譯書者祕惜之故耳。

向後二圖。發明所以然之故。

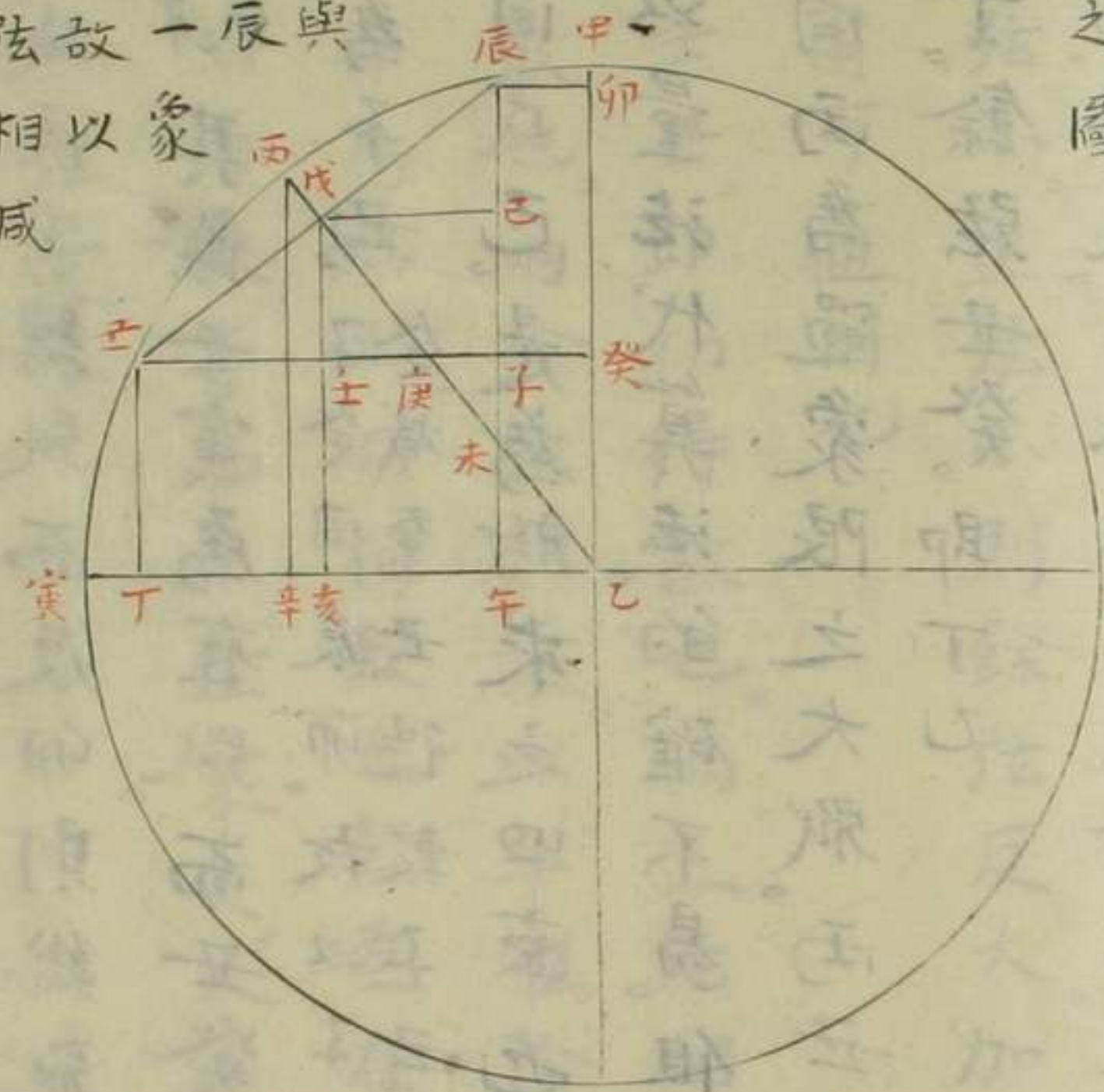
甲寅象限弧。乙丙半徑為首率。

丙寅弧之正弦丙辛為次率。

丙丑弧之正弦丙戊為三率。辰丙弧同丙丑。其正

得戊己為四率。子丑及壬子並同。

總存兩餘弦相減之圖。



論曰。戊己辰或丑壬句股

形與丙辛乙句股形相似。

故其比例等。法為乙丙與

丙辛。若丑戊與丑壬也。辰

戊與戊

己亦同。又論曰。凡兩十字垂線相

交作句股。則其形俱相似。

如辰丑線。即丙丑及丙辰

之正。辰午線。辰寅弧之

正。與丙乙半徑相交於戊點。一十字也。此兩十字相交。而成諸

句股形。則俱相似矣。故戊壬度與丑壬戊相似。而戊壬度原與

子癸線之餘弦相交於子點。一十字也。此兩十字相交。而成諸

句股形。則俱相似矣。故戊壬度與丑壬戊相似。而戊壬度原與

子癸線之餘弦相交於子點。一十字也。此兩十字相交。而成諸

句股形。則俱相似矣。故戊壬度與丑壬戊相似。而戊壬度原與

丙辛乙相似。則壬壬戊與丙辛乙。不得不為相似之形矣。
解曰。乙丙首率。半徑也。丙辛正弦為次率。其弧丙寅。壬戌正
為三率。其弧丙丑。丙丑既與丙辰同。則以丙丑三率之加丙寅。
次率成辰寅總弧。而辰卯則總弧之餘弦也。以丙丑三率減丙
寅次率其餘壬寅為存弧。而壬癸則存弧之餘弦。而餘弦相減
其較為壬丑。子癸同辰卯。故以子子丑折半於壬。而壬丑與壬
子。皆同戊己。是為所求之四率也。

如此以量法代算法。的確不易。但細數難分耳。
若以丙丙為過象限之大弧。丙丑為小弧。則丙丑為總弧。其正
弦壬丁。餘弦壬癸。即丁乙
丙辰為存弧。其正弦辰午。餘弦辰卯。即子癸。算法略同。但先所

用者。存弧之正。弦小於總弧。今則總弧正。弦小於存弧。正。弦大
則餘弦小。正。弦小則餘弦反大。加減之用。以小從大。其理無二。
故其圖可通用也。

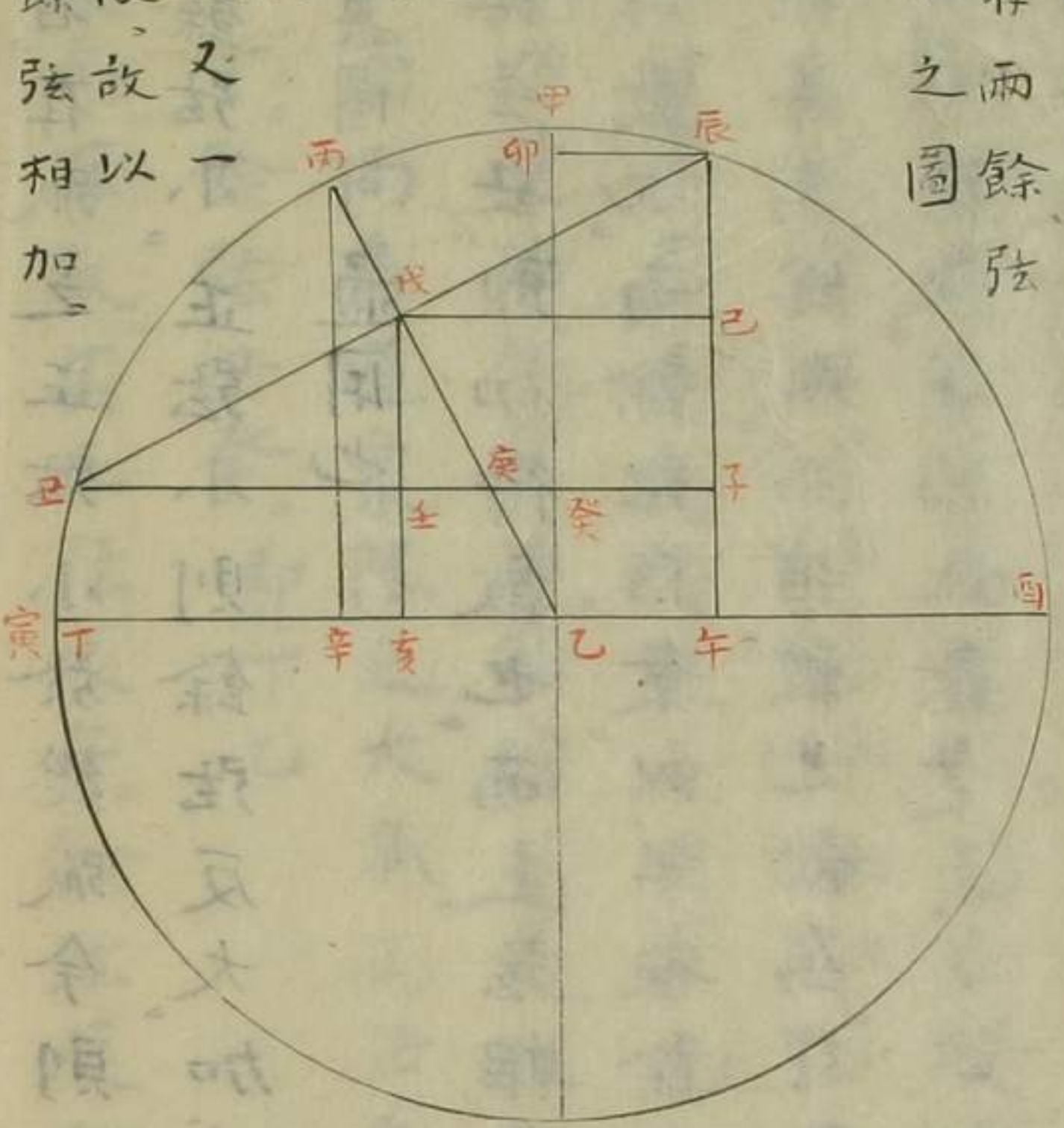
又按壬丑。即初得數也。兩正。弦相乘。以半徑除之者也。乙亥。即
次得數也。兩餘。弦相乘。以半徑除之者也。今改用加減。則以兩
弧相并為總弧。而相較之餘為存弧。存總兩餘。弦相加減。而半
之。成初得數。省丙正。弦乘矣。又以初得數去減餘弦。成次得數。
省兩餘。弦乘矣。

兩餘弦加減例

凡總存二弧。俱在象限內。或俱出象限外。則兩餘弦相減。若
存弧在象限內。總弧在象限外。則兩餘弦相加。

初得數減餘弧例
 凡存弧之正弦小於總弧。即用存弧之餘弦在位。以初得數減之。餘為次得數。若總弧之正弦小於存弧。即用總弧之餘弦在位。以初得數減之。餘為次得數。蓋弦小者餘弦大。其餘弦內。皆兼有初得次得兩數。詳見環中黍尺。甲寅象限弧。乙丙半徑。

在存一弧
 象限又
 總限故以
 兩餘弦相加



為首率
 丙寅弧之正弦
 丙為次率
 丙丑弧之正弦
 丙戌為三
 率。辰丙弧同丙丑其正
 弦辰戌亦同丙戌

求得戊己為四率。子丑壬子並同

以上皆與前圖同

論曰。準前論。丙辛乙句股形。與丑壬戌句股形相似。法為乙丙與丙辛若丑戌與壬子也。或辰戌與戊己亦同
 解曰。乙丙首率半徑全數也。丙辛正弦為次率。其弧丙寅丑戌。正弦為三率。其弧丙丑。而丙丑三率。即丙辰。以加丙寅之弧。成辰寅總弧。而辰卯亦總弧之餘弦也。以丙丑三率減丙寅之弧。成其餘丑寅為存弧。而丑癸則亦存弧之餘弦也。兩餘弦相加。成子丑。皆總弦餘弦。子丑折半於壬。而壬子同壬子。亦同戊己。則所求之四率也。

若野九已卷四第
三十一頁

和漢洋書類
高知縣立圖書館
支店



