陸軍士官學校教程

算學講本

本校編輯

第五編

陸軍士官學校編輯

算學講本 第五編

明治十三年一月刻成
内外兵事新聞局藏版

算學教程講本巻之五

三角學

第一第二教

總論

凡そ三角形を幾何學に於て論ずるが如く之を合成する所の六元中の三元を知り以て之を作る事を得るなり但し知る所の三元は能く其形を合成すべき者なるか或は一元は他の二元より成らざる者なり

故に三邊を知るとも其一邊他の二邊の和に等しきか或は之より大なる時は三角形を作る能はず又三角を知るとも三角形を決定する能はず其故は三角の關係に因れば三角を知るは惟二元を知るに等しければなり而して此の如き

問題は不定なる者なり

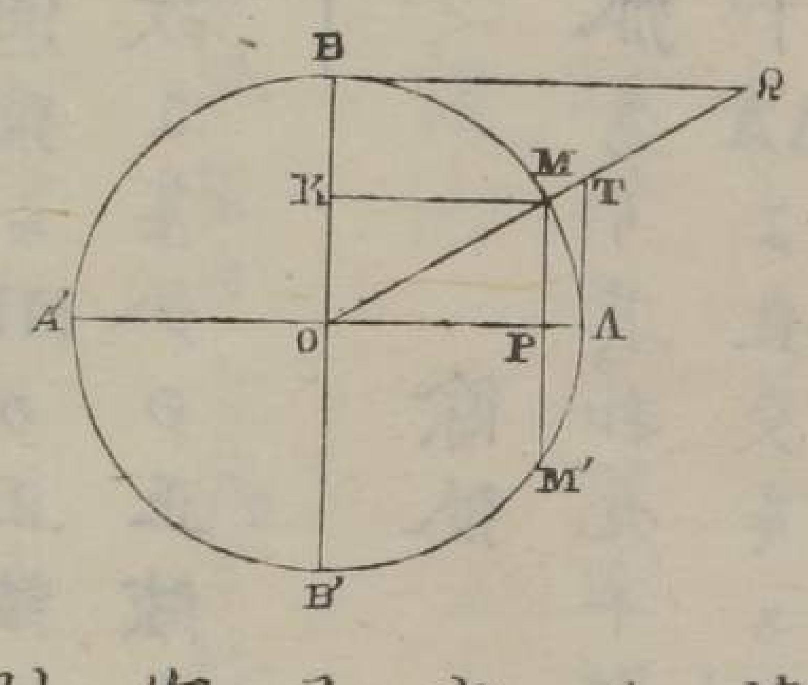
圖上に於て三角形を作るの法は概畧の者に非されは之を求むる能はすし而て之に代ふるに數上の計算を以てし此法は欲する所に從て精密の者を得るなり

三角學は知る所の者を以て三角形の諸分を計算するの法を論するを趣旨とし又之を三角形の解法といふ

三角學は八線と名くる所の線を以て角に代へて其目的を達する者なり但し其線は角と比例を為す者に非らし然れとも角に關係する所の計算に於ては簡便の方法を以て其角を顯す事に適當するなり

弧の八線の定説

第一圖任意の半径を以て作れる圓周あり其上にAMの弧を



設け此一端のMより他の一端のAを過くるOAの半径上にMPの垂線を作る時は之をAMの弧の正弦と謂ふ

又AMの弧の一端のAより無限の切線を作り他の一端のMを過くるOMの半径の引長線とAの點の間に在るATの一分をAMの弧の正切と謂ふ

又正切の一端と中心の間に在る半径の引長線のOTの一分をAMの弧の正割と謂ふ

AMの弧をaと為し正弦正切及ひ正割を sin. tang. sec. にて示す時は左の如し

又MPの正弦を引長して圓周とM'の點ニ遇ハしむる時ハMM'の通弦ハMPの正絃の二倍にしてMAM'の弧ハAMの弧の二倍なり故に某弧の正絃ハ其二倍の弧にて張る所の通弦の半に等し

$$MP = \sin a$$

$$AT = \tan a$$

$$OT = \sec a$$

餘弧

二弧あり其和九十度に等しき時ハ彼を此餘弧と謂ふ

若しAA'に直交するBB'の中径を作る時ハBMの弧ハAMの弧の餘弧なり

BMの餘弧の正弦正切及ひ正割をAMの弧の餘弦餘切及ひ餘割と謂ふ

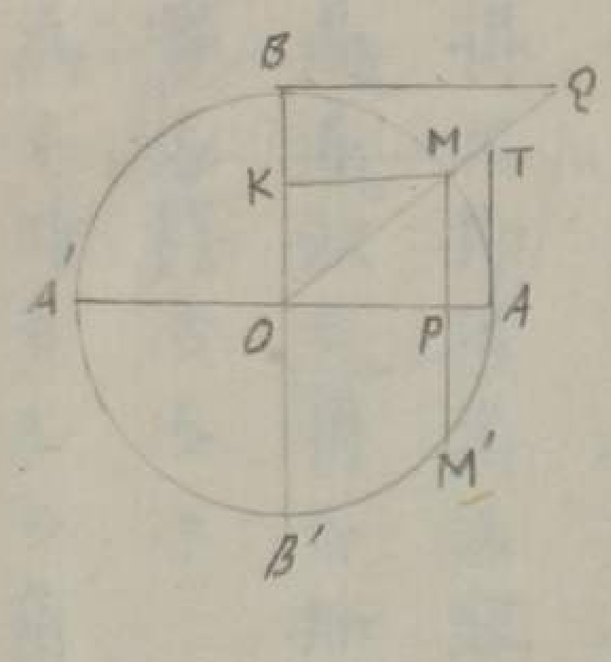
AMの弧をaと為し餘弦餘切及ひ餘割をcos. cot. cosec.にて示す時ハ左の如し

$$MK = \cos a$$

$$BQ = \cot a$$

$$OQ = \mathrm{cosec}\, a$$

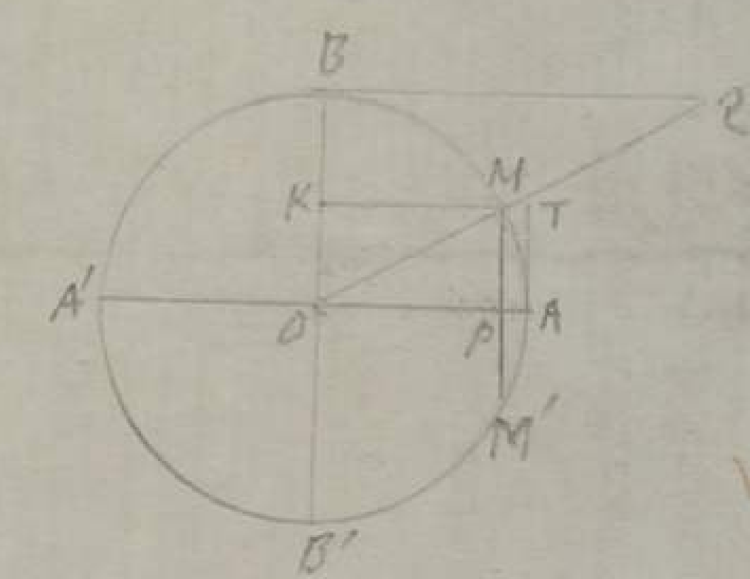
又一般に示す所の式ハ左の如し



$$\cos a = \sin(90° - a)$$

$$\cot a = \mathrm{tang}(90° - a)$$

$$\mathrm{coseo}\ a = \mathrm{seo}(90° - a)$$

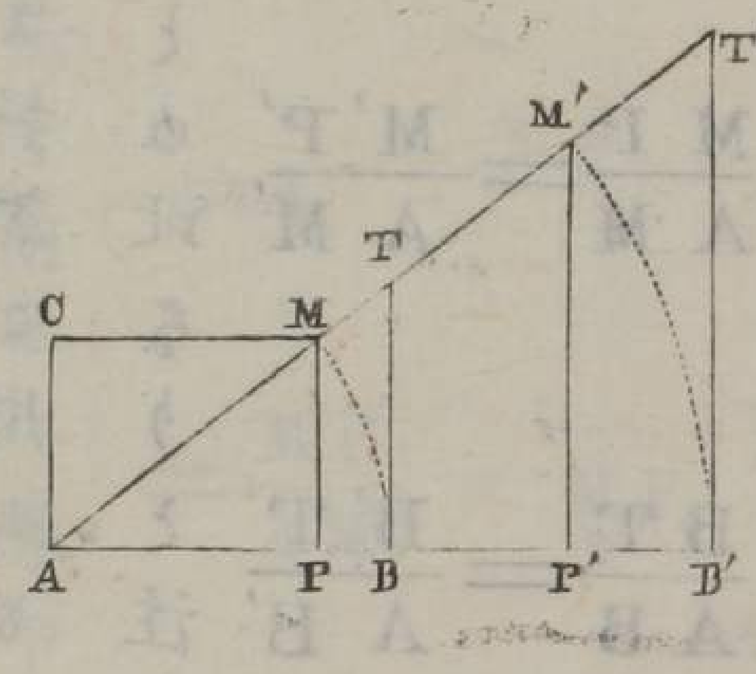


MKの餘弦はPOに等し故に餘弦は正弦の底と中心の間に在る半径の一分に等し

又弧の一端と正弦の底の間に在るAPの距離をAMの弧の正矢と謂ひ而してBKを餘矢と謂ふ但し其二線は此書中之を用ひす

八線は其線と半径の比なりと注意する事

角の八線



第二圖Aの一角あり其二邊の間にはBM B'M'等の無數の弧を作る事を得而して其正弦は各不等なる者なり故に角を知りて決定すへき者は弧の正弦に非らずして弧の正弦と半径の比なり其故は相似の三角形より $\frac{MP}{AM}=\frac{M'P'}{AM'}$ の式を得て即ち角に容る弧の正弦と半径の比は常數なれはなり是を以て角を知れは其比を求むる事を得又之を反言する事を得るなり

設使は其比を三分の二と為す時はAの角を作る事を得るなり其法はAB'の直線上にBMの弧を作り

Aの點よりABの工ニ半径の三分の二ニ等しくACの垂線を作りABニ平行してCMを作りBMの弧ニ交らしめ而してMABの角を作り以て求むる所の角を得るなり

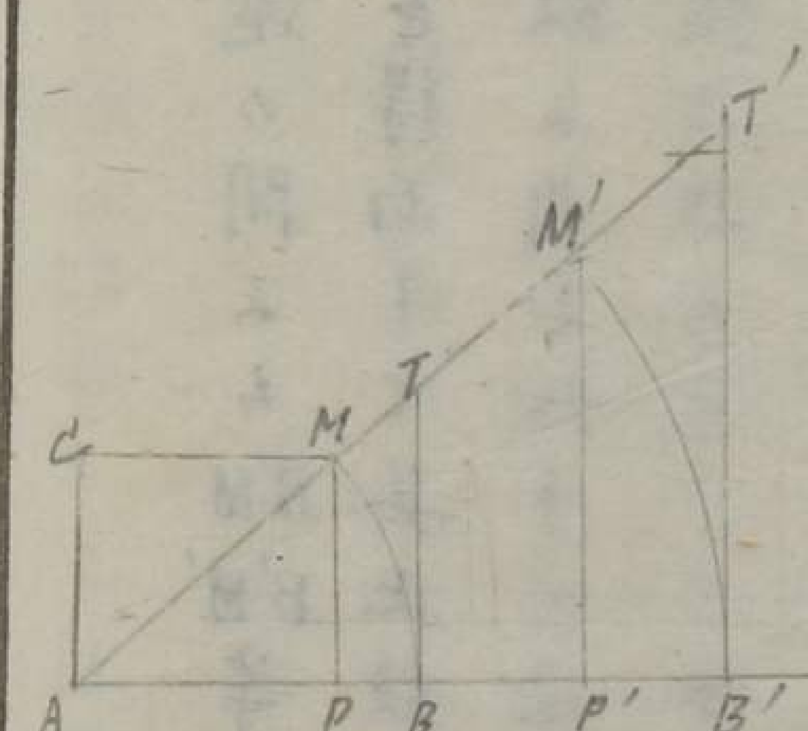
前法は餘弦正切等ニも亦之を施す事を得るなり

故ニ計算ニ用ふる所の八線は其不名値ニ非らして其半径との比なりと注意せるなり即ち左の如し

$$\sin A = \frac{MP}{AM} = \frac{M'P'}{AM'}$$

$$\tan A = \frac{BT}{AB} = \frac{B'T'}{AB'}$$

etc.



此比を計算ニ用ふるニは八線を定むる所の圓形の半径を一とせるを可とし其故は諸線の値は半径との比ニ同しくなれはなり即ちAMの半径を一と為す時は左の如し

$$\sin A = \frac{MP}{1} = \frac{M'P'}{AM'} = MP$$

$$\tan A = \frac{BT}{1} = \frac{B'T'}{AB'} = BT$$

etc.

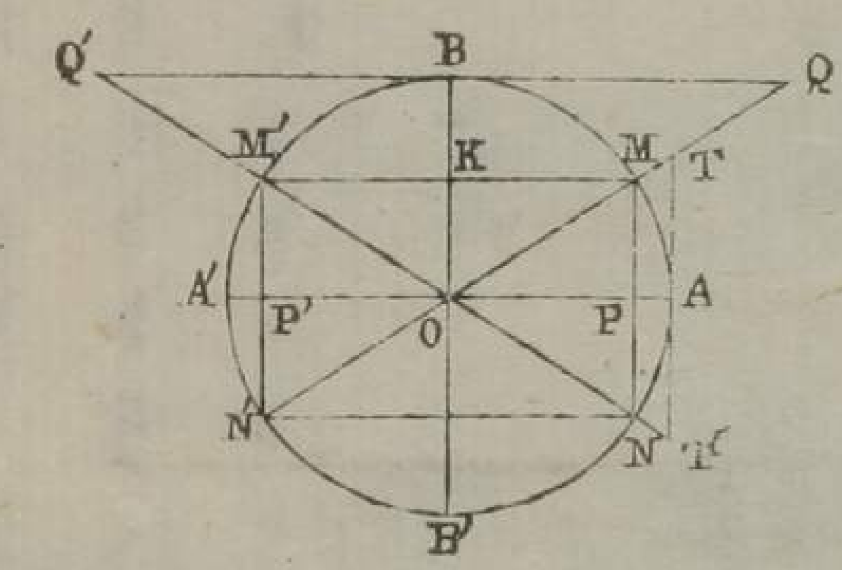
此法は角の八線即ち其角ニ容る諸弧の八線と半径の比ニ施す事を得るなり而して其比は同一ニ帰し即ち半径を一と為して測る所の諸線の數なり

是より以下は弧の諸線をして之ニ應せる角の諸線と為さしめんか為めニ半径を一と定め而して設使は某弧の正切を

以て之を論せる時は真線に非ずして二線の比なりと會得するなり

八線の變化

反對の方向を示せる正負の用法



第三圖半径を一と為せる所の圓形あり一遊點を設け原點と名くるAの一點より之を圓周上に運動せしむる時は變化せる所の弧を生じ而して遊點ABA'の方向に運動せる時は其弧を正と為し又之に反してAB'A'の方向に運動せる時は其弧を負と為す

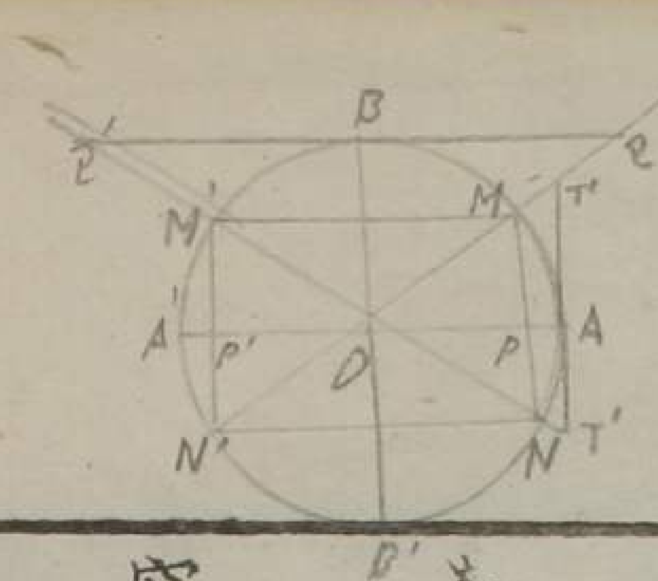
正弦

角の八線は其角に關係して倶に變化す故に之を圓函數と謂ふ

若し遊點Mに至る時はMPはAMの弧の正弦にして又AOMの角の正弦なり

弧0°より90°に至るまでは正弦は零より増大して其極大の1に至る迄變化し又弧90°を過ぎて180°に至るまでは正弦は前と同じ値を以て復歸し即ち1より減小して0に至るまて變化するなり

弧180°より小なる時は正弦はOBの上に於て之を測り之を正と為し又弧180°を過ぎて遊點N'に至りABN'の弧を為す時はN'P'の正弦は反對の方向即ちOB'の上に於て之を測り之を負と



為す而して弧270°に至る時は正弦は極小にして即ち−1なり故に正弦は中心より起りてBB′の中径上に於て之を測り而してOBに在りては正にしてOB′に在りては負なり

AMの弧30°に等しき時はMPの正弦は60°の弧のMNの弦の半にして即ち圓形に内容せる正六角形の一邊の半なり故に $\sin 30°=\frac{1}{2}$ を得又AMの弧四十五度に等しき時はMPの正弦は圓形に内容せる正方形の一邊の半なり故に $\sin 45°=\frac{\sqrt{2}}{2}$ を得るなり

正切

正切はAの點より起りてTT′の無限切線上に於て之を測り而してATの方向に在るを正と為しAT′の方向に在るを負と為す故にAMの弧の正切は+ATにしてAM′の弧の正切は−ATなり

弧0より45°に至るまでは正切は0より増大して1に至るまで變化しAOMの角45°となる時はAOTは二等邊三角形を為すなり故に $tang\,45°=1$ を得又弧45°を過る時は正切は更に増大し而して90°に近接する時は最大の値を有するに至るなり

又弧90°に達する時は正切を定むる所の半径はTT′に平行をなすを以て正切の長さは限る能はず之を無窮といふ

又弧90°を過ぐる時は正切は不名値に於ては最大なる所の負の値を有し180°に至りて再び0となるなり

故ニ正切は0°と180°の間ニ於て−∞より+∞ニ至るまての凡て
の値を有し即ち正或は負の如何なる數を設くるとも0°よ
り180°の間ニ於て之を正切とする所の角を得るなり

正割

若し遊点Aの点より起りてAMの弧を為す時はOTの正割は
中心より遊点の位置ニ向て半径を引長したる者なり之を
正と為し又遊点M'ニ至りABM'の弧を為す時はOT'の正割は中
心より遊点の位置ニ反して半径を引長したる者なり之を
負と為す
弧0°より90°ニ至るまては正割は+1より増大して+∞ニ至り
又弧90°より180°ニ至るまては正割は−∞より増大して−1ニ至
るまて變化するなり

餘弧の原點

餘弧はBを以て原點と為し而してBAB'の方向ニ在るを正と
為し反對の方向ニ在るを負と為す故ニ90°より小なるAMの
弧の餘弧は−BMニして90°より大なるABM'の弧の餘弧は−BM'なり

餘弦

餘弦は餘弧の正弦ニして中心より起りAA'の中径上ニ於て
之を測り而してOAの方向ニ在るを正と為し之ニ反してOA'
の方向ニ在るを負と為す餘弦も亦正弦ニ於けるか如く−1よ
り+1ニ至るまて變化するなり

餘切

餘切は餘弧の正切ニしてBの點より起りQQ'の切線上ニ於
て之を測り而してBQの方向ニ在るを正と為し之ニ反して

BQ'の方向に在るを負と為す餘切も亦正切に於るか如く$-\infty$より$+\infty$に至るまて變化せるなり

餘割

餘割は餘弧の正割にして中心より起り餘弧を為す所の遊點の位置に向て半径を引長せる者を正と為し之に反して引長せる者を負と為す

二並角の八線の關係

二弧或は二角あり其和百八十度に等しき時は彼を此並弧或は並角と謂ふ

(第三圖)AMの弧ありAA'に平行してMM'を作る時はA'M'の弧はABM'の弧の並弧なり然るにA'M'はAMに等しきを以てAMの弧も亦ABM'の弧の並弧なり

此二並弧に於て之を論するにMP M'P'の正弦は同號にして相等しくOQ OQ'の餘割は亦之に同しく又OP −OP'の餘弦は異號にして相等しく正切正割餘切は亦之に同し此關係を示す式は左の如し

$$\sin(180^\circ - a) = \sin a$$

$$\cos(180^\circ - a) = -\cos a$$

$$\mathrm{tang}(180^\circ - a) = -\mathrm{tung}\, a$$

$$\cot(180^\circ - a) = -\cot a$$

$$\sec(180^\circ - a) = \sec a$$

$$\mathrm{cosec}(180^\circ - a) = \mathrm{cosec}\, a$$

異號の二等弧の八線の關係

(第三圖)AM AN の異號の二等弧に於て之を論ずるにOPの餘弦も二弧倶に之を有しOT OT′の正割も同號にして相等しく又正弦正切餘切餘割も異號にして相等し此關係を示す式も左の如し

$$\sin(-a) = -\sin a$$

$$\cos(-a) = \cos a$$

$$\mathrm{tang}(-a) = -\mathrm{tang}\, a$$

$$\cot(-a) = -\cot a$$

$$\sec(-a) = \sec a$$

$$\mathrm{cosec}(-a) = -\mathrm{cosec}\, a$$

一角の八線の關係

一角の八線の關係を示すに五式あり

(第三圖)AMの弧をaと為す時はMOPの直三角形に於て左の式を得

$$MP^2 + OP^2 = OM^2$$

$$\sin^2 a + \cos^2 a = 1 \quad (1)$$

此關係は正弦を知る時は餘弦を計算する事を得又之を反言も亦事を得るなり

又AOT MOPの相似三角形に於て左の式を得

$$\frac{TA}{MP}=\frac{AO}{OP}$$

$$tang\ a=\frac{\sin a}{\cos a} \qquad (2)$$

此關係は正切は正弦と餘弦の比なる事を示す者なり

又其三角形に於て左の式を得

$$\frac{OT}{OM}=\frac{OA}{OP}$$

$$\sec a=\frac{1}{\cos a} \qquad (3)$$

此關係は正割は餘弦を以て一を除したる者に等しき事を示す者なり故に正割は餘弦と同号なり

又 BOQ MOK の相似三角形に於て左の式を得

$$\frac{BQ}{MK}=\frac{OB}{OK}$$

$$\cot a=\frac{\cos a}{\sin a} \qquad (4)$$

此關係は餘切は餘弦と正弦の比なる事を示す者なり

又其三角形に於て左の式を得

$$\frac{OQ}{OM}=\frac{OB}{OK}$$

$$cosec\ a=\frac{1}{sin\ a} \quad (5)$$

此關係は餘割は正弦を以て一を除したる者に等しき事を示せる者なり故に餘割は正弦と同号なり

以上の五式は角の大小に關らす一般に八線中の一線を知りて同角の他の諸線を計算するに用ふる者なり

正切餘切の關係

第三圖 AOT BOQの相似三角形に於て左の式を得

$$\frac{AT}{BO}=\frac{OA}{BQ}$$

$$\frac{tang\ a}{1}=\frac{1}{cot\ a}$$

$$tang\ a\times cot\ a=1 \quad (6)$$

此式を(2)(4)の二式と相乘ずるときは亦之を得るなり

正切の函數を用ふる正弦餘弦の式

第三圖 AOT MOPの相似三角形に於て

$$\frac{AT}{MP}=\frac{OT}{OM}$$

$$\frac{tang\ a}{sin\ a}=\frac{sec\ a}{1}$$

を得又OATの直

三角形ニ於て

$$OT = \sqrt{OA^2 + AT^2}$$

$$\sec\alpha = \sqrt{1 + \tan g^2 \alpha}$$

を得此二式より左の正弦の式を得

$$\sin\alpha = \frac{\tan g\,\alpha}{\sqrt{1 + \tan g^2 \alpha}} \quad (7)$$

$$\frac{\tan g\,\alpha}{\sin\alpha} = \frac{\sqrt{1 + \tan g^2 \alpha}}{1}$$

又其三角形ニ於て

$$\frac{OP}{OA} = \frac{OM}{OT}$$

$$\frac{\cos\alpha}{1} = \frac{1}{\sec\alpha}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1 + \tan g^2 \alpha}}$$

を得之より左の餘弦の式を得

$$\cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{1 + \tan g^2 \alpha}} \quad (8)$$

活用

$\sin 30^\circ = \frac{1}{2}$ は既に之を知るなり故に前の諸式を用ひて30°の弧の他の諸線を計算し並に60°の餘弧の諸線を計算する事左の如し

$$\sin 30^\circ = \cos 60^\circ = \frac{1}{2}$$

$$\cos 30^\circ = \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\tan 30^\circ = \cot 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$\cot 30^\circ = \tan 60^\circ = \sqrt{3}$$

$$\sec 30^\circ = \operatorname{cosec} 60^\circ = \frac{2\sqrt{3}}{3}$$

$$\operatorname{cosec} 30^\circ = \sec 60^\circ = 2$$

又 $\sin 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}$ を知る故に45°の弧の他の諸線を計算する事左の如し

$$\sin 45^\circ = \cos 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

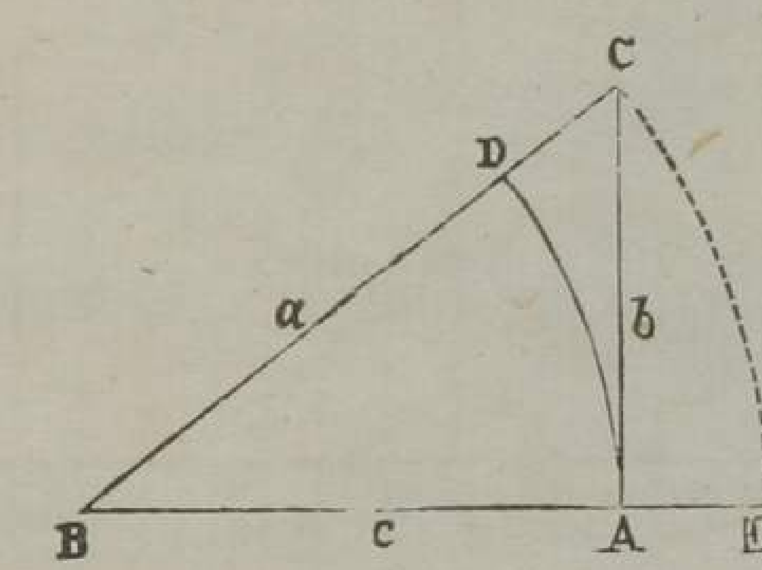
$$\tan 45^\circ = \cot 45^\circ = 1$$

$$\sec 45^\circ = \operatorname{cosec} 45^\circ = \sqrt{2}$$

第三款

直三角形或は斜三角形の邊角の關係

（第四圖）ABCの三角形ありAを直角と為す三角形の三角を示すにはABCを以てし相對する三邊を示すにはa b cを以てす即ちaは斜邊なりBを中心と為しBCを半徑と為してCEの弧を作る時はCAの弦線とBCの半徑の比はBの角の正弦なり因て左の式を得



$$\sin B = \frac{AC}{BC} = \frac{b}{a}$$

$$b = a \sin B \quad (1)$$

又同法を以て左の式を得

$$c = a \sin C \quad (2)$$

故に直三角形に於て一鋭角の正弦は對邊と斜邊の比に等しく而して直角の一邊は對角の正弦を以て斜邊に乘じたる者に等し

又BAの邊とBCの半徑の比はBの角の餘弦なり因て左の式を得

又同法を以て左の式を得

$$\cos B = \frac{BA}{BC} = \frac{c}{a}$$

$$c = a \cos B \quad (3)$$

$$b = a \cos C \quad (4)$$

故に直三角形に於て直角の一邊は鄰角の餘弦を以て斜邊に乘したる者に等し

Bを中心と為しABを半径と為してADの弧を作る時はACの正切とABの半径の比はBの角の正切なり因て左の式を得」

$$\mathrm{tang}\,B = \frac{AC}{AB} = \frac{b}{c}$$

$$b = c\,\mathrm{tang}\,B \quad (1)$$

又同法を以て左の式を得

$$c = b\,\mathrm{tang}\,C \quad (2)$$

故ニ直三角形ニ於て直角の一邊を對角の正切を以て直角の他の一邊ニ乗したる者ニ等し

推論　B C の二鋭角ハ互ニ餘角なるを以て

$$\tan B = \cot C$$

$$\tan C = \cot B$$

を得

此餘切を以て前二式の正切ニ代ふる時ハ左の二式を得

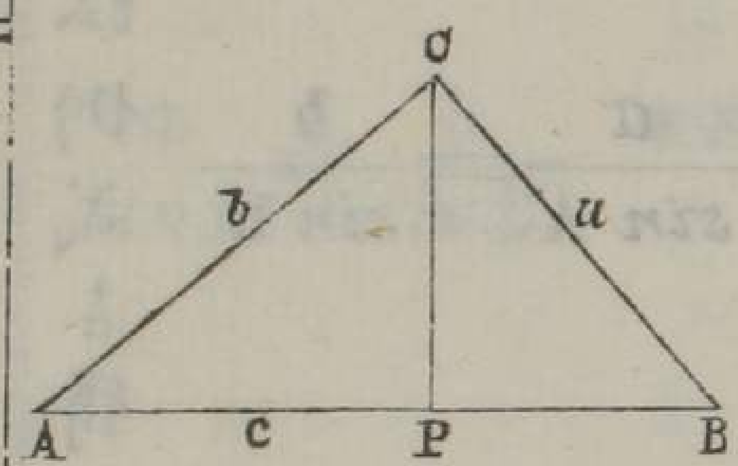
$$b = c \cot C \quad (3)$$

$$c = b \cot B \quad (4)$$

故ニ直三角形ニ於て直角の一邊ハ鄰角の餘切を以て直角の他の一邊ニ乗したる者ニ等し

斜三角形ニ於て三邊ハ各對角の正弦と比例を為す事

第五圖ABCの三角形ありCの角頂よりABの對邊上ニCPの垂線を作る時ハ本形を分つて二個の直三角形と為し各形ニ於てCPの邊ハ對角の正弦を以て斜邊ニ乗したる者ニ等し



因て

$$CP = b \sin A$$

$$CP = a \sin B$$

を得之より

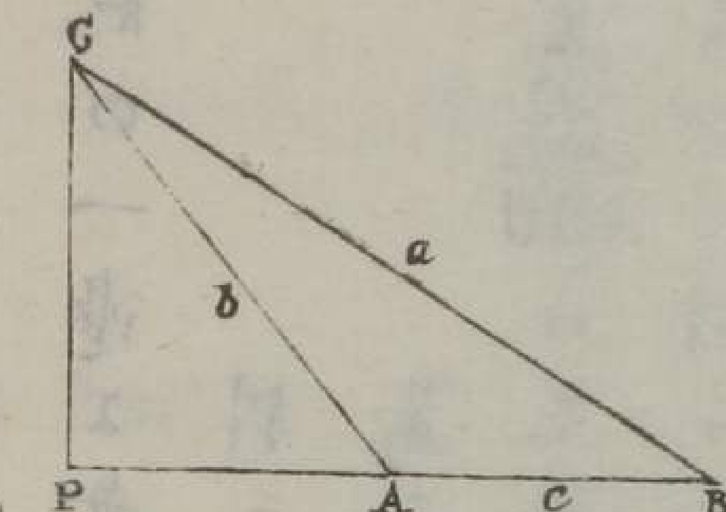
$$a \sin B = b \sin A$$

を得化して左

の比例式を得

$$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}$$

（第六圖）ABCの三角形ありAを鈍角と為す時もCPの垂線を三角形の外方に在り而してCPBの直三角形



に於ても前に同しく

$$CP=a\sin B$$

を得又CPAの直三角形に於てもCAPの鋭角もABCの三角形のCABの鈍角の並角に

して其正弦を相同しきに因り亦前に同しく

$$CP=b\sin CAP$$
$$=b\sin A$$

を得之より

$$a\sin B=b\sin A$$

を得故に何れの時に於ても左の二個の比を相等し

$$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}$$

又Aの點より對邊上に垂線を作る時は

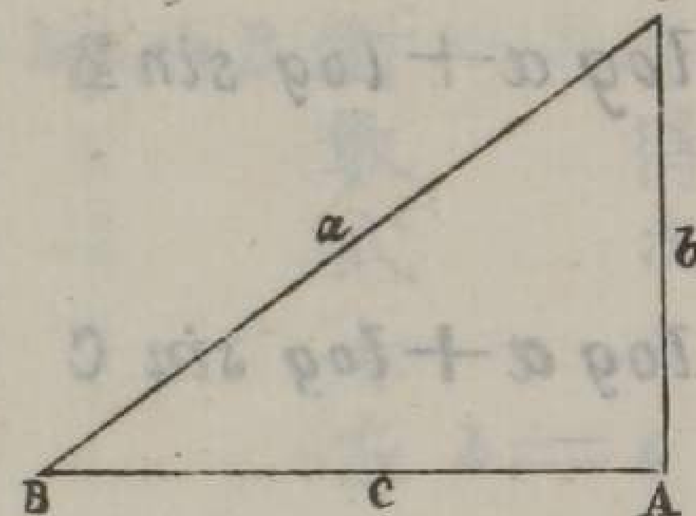
$$\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}$$

を得故に斜三角形に於て恒に左の式を得

$$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}$$

此三個の比の相等式は即ち此設論を生ずる者なり

第四款　直三角形の解法



（第七圖）直三角形に於ては恒に直角を知るを以て一邊と一鋭角或は二邊を知る時は解法を行ふ事を得るなり但し知る所の二元中に斜邊を有すると或は有せざるとに從て又各其二種に分つ

故に直三角形の解法に四種あり

第一　aの斜邊及びBの鋭角を知りてCの角及びb cの二邊を求むる事

此三角形は恒に作り得へき者なり

先つ $C=90^\circ-B$ を得次に

$$b=a\sin B$$
$$c=a\sin C$$

の式に因て b c の二邊を定むるなり對數を以て之を計算する式ち左の如し

$$\log b=\log a+\log\sin B$$

$$\log c=\log a+\log\sin C$$

第二　b の邊及ひ B の鋭角を知りて C の角及ひ a c の二邊を求むる事

此三角形ち恒に作り得へき者なり

又 $C=90^\circ-B$ を得次に $b=a\sin B$ 即ち $a=\dfrac{b}{\sin B}$ の式に因て a の斜邊を定むるなり此對數式ち左の如し

$$\log a=\log b-\log\sin B$$

又cの邊を $c=b\tan C$ 或は $c=b\cot B$ の式に因て求むる事を得るなり

第三　aの斜邊及ひbの邊を知りてcの邊及ひBCの二角を求むる事

此三角形は $a>b$ なる時に作り得へき者なり

先つ $b=a\sin B$ 即ち $\sin B=\frac{b}{a}$ の式に因てBの角を求むるなり此對數式は左の如し

$$\log\sin B=\log b-\log a$$

次に $C=90^\circ-B$ を得但し $\cos C=\frac{b}{a}$ の式に因れは直にCの角を求むる事を得るなり又cの邊を $c=a\sin C$ の式に因て求むる事を得るなり

又直三角形の性質ニ因れハ

$$c=\sqrt{a^2-b^2}=\sqrt{(a+b)(a-b)}$$

即ち

$$\log c=\frac{\log(a+b)+\log(a-b)}{2}$$

を以て直ニcの邊を求むる事を得るなり

注意　aの斜邊とbの邊の差最小なる時ハ $\frac{b}{a}$ の比ハ一ニ密近するなり故ニ角度を求むるニ

$$\sin B=\frac{b}{a}$$

$$\cos C=\frac{b}{a}$$

の式を用ふる時ハBハ九十度ニ近くCハ0度ニ近きを以て精密なる者を得る能ハす此時ニ於てハ正切を以て角度を定むるを可とす即ち

$$\tan C=\frac{c}{b}$$

$$c=\sqrt{(a+b)(a-b)}$$

の二式より

$$\tan C=\frac{\sqrt{(a+b)(a-b)}}{b}$$

又

$$\log\tan C=\frac{\log(a+b)+\log(a-b)}{2}-\log b$$

を得以て之を計算するなり

第四　bcの二邊を知りてaの斜邊及ひBCの二角を求

むる事

先つ $\tan B = \frac{b}{c}$ 或ハ $\tan C = \frac{c}{b}$ の式ニ因てB或ハCの角を計算するなり此對數式ハ左の如し

$$\log \tan B = \log b - \log c$$

$$\log \tan C = \log c - \log b$$

角を求め得ハ $b = a \sin B$ 即ち $a = \frac{b}{\sin B}$ の式ニ因て斜邊を計算するなり

此對數式ハ左の如し

$$\log a = \log b - \log \sin B$$

面積

直三角形の諸元を知る時は面積のSを $S=\frac{bc}{2}$ の式に因て求むる事を得るなり此對數式を左の如し

$$\log S = \log b + \log c - \log 2$$

活用

直三角形あり $b=591^{m}.13$、$B=41^\circ 8' 40''$ を以て他の諸分を計算する事左の如し

先つ 90° を化して $89^\circ 59' 60''$ と為し之よりBの角を減しCの角を得るなり即ち $C=48^\circ 51' 20''$ なり

aの計算

$$a=\frac{b}{\sin B}$$

$$\log a=\log b-\log\sin B$$

$$\log\sin B=\bar{1},81820$$

$$-\log\sin B=1-0,81820=0,18180$$

$$\begin{aligned}\log b&=2,77168\\-\log\sin B&=0,18180\\\hline\log a&=2,95348\\a&=898^{m}.42\end{aligned}$$

cの計算

$$c=b\,\mathrm{tang}\,C$$

$$\log c=\log b+\log\mathrm{tang}\,C$$

$$\begin{aligned}\log b&=2,77168\\\log\mathrm{tang}\,C&=0,05857\\\hline\log c&=2,83025\\c&=676^{m}.47\end{aligned}$$

第五款

三角形の一邊及ひ二角を知りて他の諸分並ニ面積を求むる事

設使ハcの邊及ひA Bの二角を以て他の諸分を計算せんとを但し此三角形ハ知る所の二角の和180°より小なる時ハ作る事を得るなり

先つ

$$C=180°-(A+B)$$

の式ニ因て他の一角を得次ニ

$$\frac{a}{\sin A}=\frac{c}{\sin C}$$

即ち

$$a=\frac{c\sin A}{\sin C}$$

の式ニ因てaの邊を得又

$$\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}$$

即ち

$$b=\frac{c\sin B}{\sin C}$$

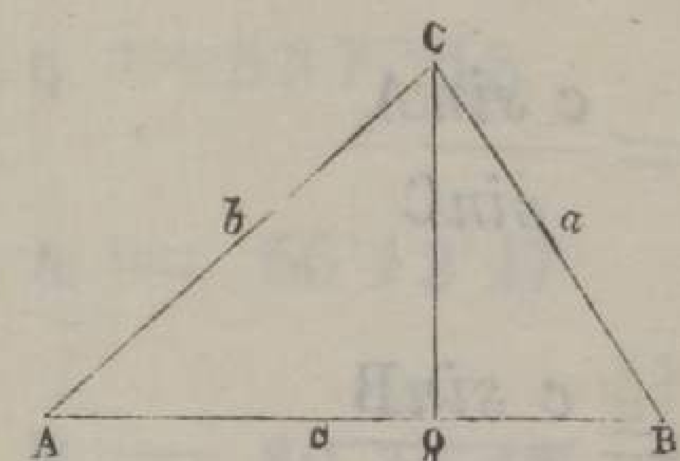
の式ニ因てbの邊を得るなり其對數式ハ左の如し

$$\log a = \log c + \log \sin A - \log \sin C$$

$$\log b = \log c + \log \sin B - \log \sin C$$

面積

第八圖 ABC の三角形あり C の角頂より底の上に CQ の垂線を作る時は其面積の S は $\frac{AB \times CQ}{2}$ に等し然るに CAQ の直三角形に



於て $CQ = b \sin A$ を得因て

$$S = \frac{bc \sin A}{2}$$

を得

故に三角形の面積は二邊及ひ其間角の正弦の積の半に等し

又其式に於て b に代ふるに $\frac{c \sin B}{\sin C}$ を以てする時は

$$S = \frac{c^2 \sin A \sin B}{2 \sin C}$$

を得

此式は一邊と三角の函數を以て三角形の面積を求むる者

なり但し以上の二式を倶に對數を用ひて計算する事を得るなり

活用

三角形あり

$c = 587^{m},65$

$A = 56^\circ 12' 47'$

$B = 80^\circ 39' 43''$

を以て之を解き並に面積を計算する事左の如し

$$a = \frac{c \sin A}{\sin C}$$

$$b = \frac{c \sin B}{\sin C}$$

$$S = \frac{c^2 \sin A \sin B}{2 \sin C}$$

計算の表

$C = 587^{m},65$

$A = 56^\circ 12' 47$

$B = 80^\circ 39' 43''$

$180^\circ = 179^\circ 59' 60''$

$A + B = 136^\circ 52' 30''$

$C = 43^\circ 7' 30''$

$\log c = 2,76912$

$\log \sin A = \bar{1},91966$

$\log \sin B = \bar{1},99420$

$\log \sin C = \bar{1},83479$

aの計算

$$\begin{aligned} \log c &= 2,76912 \\ \log \sin A &= \bar{1},91966 \\ -\log \sin C &= \underline{0,16521} \\ \log a &= 2,85399 \end{aligned}$$

$a = 714^{m},48$

bの計算

$$\begin{aligned} \log c &= 2,76912 \\ \log \sin B &= \bar{1},99420 \\ -\log \sin C &= \underline{0,16521} \\ \log b &= 2,92853 \end{aligned}$$

$b = 848^{m},26$

Sの計算

$2\log c$	$= 5{,}53824$
$\log \sin A$	$= \bar{1}{,}91966$
$\log \sin B$	$= \bar{1}{,}99420$
$-\log \sin C$	$= 0{,}16521$
$-\log 2$	$= \bar{1}{,}69897$
$\log S$	$= 5{,}31628$

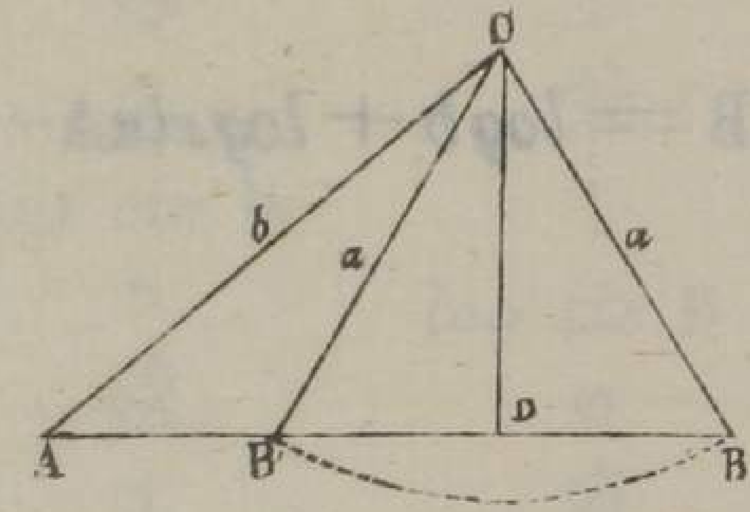
$S = 207148^{m\,car}$

第六款

三角形の二邊及ひ一對角を知りて他の諸分並ニ面積を求むる事

設使ハa bの二邊及ひaの邊ニ對せる所のAの角を以て他のcの邊及ひB Cの二角を計算せんとせハ

(第九圖)幾何學ニ因て知る所の角ニ等しくAの角を作り其一邊上ニ於てbニ等しくACを取り而してCを中心と為しaを半徑と為して弧を作る時ハ此弧と他の一邊の交る處を即ち三角形の他の角頂を定むる者なり



若し其弧BB'の二點ニ交る時ハ二個の答解を有す蓋し一點より一直線上ニ二個の等しき線を作り得れハなり又其弧ABの邊ニ切する時ハ一個の答解を有し又其弧ABの邊ニ交らさる時即ちaの邊CDの垂線より小なる時ハ此問題ハ成らさる者なり

右の計算ニ於てハ先つ $\frac{\sin B}{b}=\frac{\sin A}{a}$ 即ち $\sin B=\frac{b\sin A}{a}$ の式ニ因てろの遊ニ對する所のBの角を求むるなり此對數式ハ左の如し

$$\log\sin B=\log b+\log\sin A-\log a$$

Bの角の正弦ハ一より小なるを以て其對數ハ必ス負なり

故ニ若し $\log\sin B$ の値正なる時ハ此問題ハ成らさる事を知るなり即ち $\log\sin B$ の値正なる時ハ $a<b\sin A$ ニして又 CAD の直三角形より $CD=b\sin A$ を得故ニ $a<CD$ を得是れ幾何學ニ因て說く所の者ニ合せ

若し $\log\sin B$ の値 0 なる時ハ $\sin B=1$ ニして即ち $B=90^\circ$ なり

又 $\log\sin B$ の値負なる時はBの角は二個の値を有し即ち一は表より得る所の鋭角にして一は其並角なり其故は二並角の正弦は相同しければなり

此二個の値は倶に用ふべきか或は表より得る所の鋭角のみを用ふべきかを論ずるに若し知る所のAの角鈍角なる時はBの角は鋭角に限るなり

又 $A<90^\circ$ なる時は $a>b$ 或は $a<b$ なる事あり

若し $a>b$ なる時は $A>B$ なるを以てBの角は鋭角のみを用ひ又 $a<b$ なる時は $A<B$ なるを以てBの角は鋭鈍倶に用ふる事を得是れ二個の解法を有せる者なり

Bの角を求め得ば $C=180^\circ-(A+B)$ の式に因てCの角を得又

$$\frac{c}{\sin C}=\frac{a}{\sin A}$$

即ち

$$c=\frac{a\sin C}{\sin A}$$

の式に因てcの邊を得るなり

二弧の解法を有せる時は $C'=180^\circ-(A+B')$ の式に因て他の三角形のC'の

角を得

$$\frac{c'}{\sin C'}=\frac{a}{\sin A}$$

即ち

$$c'=\frac{a\sin C'}{\sin A}$$

の式ニ因てc'の邊を得るなり

試檢

(第九圖)二個の解法を有する時ハ

$$AD=b\cos A$$

を計算し而して

$$AD=\frac{AB+AB'}{2}=\frac{c+c'}{2}$$

ニ合する哉否を試むへし或ハBCB'の二等邊三角形ニ於て

$$BB'=2a\cos B$$

を計算し而して$BB'=c-c'$ニ合する哉否を試むへし

面積

三角形の諸元を知る時ハ

$$S=\frac{bc\sin A}{2}$$

の式ニ因て第一の面積を得

$$S=\frac{bc\sin A}{2}$$

の式ニ因て第二の面積を得るなり

活用

三角形あり

$a=87^{m},45$

$b=98^{m},60$

$A=60^{\circ}25'30''$

を以て之を解き並ニ面積を計算せる事左の如し

此三角形を作り得べき哉否を試みんが為めにBの角を計算を但し作り得べき時を二個の解法を有せり其故は $A<90^\circ$ $a<b$ なれるなり

$$\sin B=\frac{b\sin A}{a}$$

$$\begin{aligned}\log b&=1{,}99388\\ \log\sin A&=\bar{1}{,}93937\\ -\log a&=\bar{2}{,}05824\\ \hline \log\sin B&=\bar{1}{,}99149\end{aligned}$$

$B=78^\circ41'40''$

$B'=180^\circ-B=101^\circ18'20''$

$C=180^\circ-(A+B)=B'-A=40^\circ52'50''$

$C'=180^\circ-(A+B')=B-A=18^\circ16'10''$

$\log\sin B$ の値は負數を得るを以て此三角形を作り得べき事を決定し而して表よりBの鋭角を得此並角を以て B' の鈍角を得るなり

cの計算

$$c=\frac{a\sin C}{\sin A}$$

$$\begin{aligned}\log a&=1{,}94176\\ \log\sin C&=\bar{1}{,}81590\\ -\log\sin A&=0{,}06063\\ \hline \log c&=1{,}81729\end{aligned}$$

$$c=65^m{,}66$$

c' の計算

$$c'=\frac{a\sin C'}{\sin A}$$

$$\begin{aligned}\log a&=1{,}94176\\ \log\sin C'&=1{,}49622\\ -\log\sin A&=0{,}06063\\ \hline \log c'&=1{,}49861\end{aligned}$$

$$c'=31^m{,}52$$

Sの計算

$$S=\frac{bc\sin A}{2}$$

$$\log b = 1{,}99388$$
$$\log c = 1{,}81729$$
$$\log \sin A = \bar{1}{,}93937$$
$$-\log 2 = \bar{1}{,}69897$$
$$\log S = 3{,}44951$$

$$S = 2816^{m.car}\,20$$

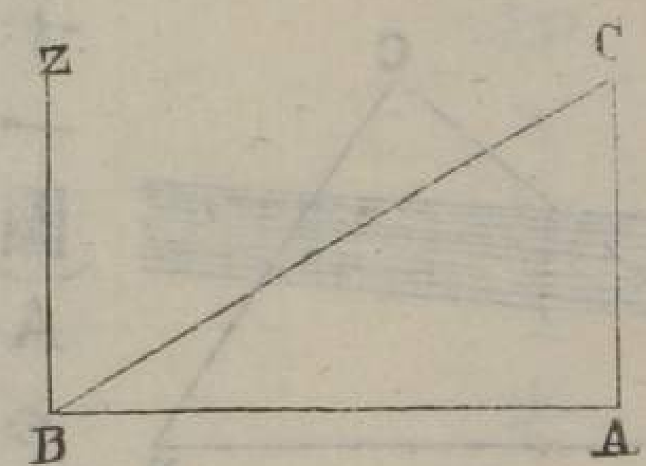
ACB′の面積も亦同法を以て計算せるなり

第七第八数

平面測圖の諸問題ニ於ける三角學の活用

第一問題　鎖鏈を以て斜地の上ニ測る所の基線を平線ニ化し及ひ其二端の高低の差を計算する事

(第十圖)



斜地の上ニ$BC=658^{m},75$の距離を測り次ニBCの線と垂線の間角の$CBZ=84°8'$を測りABの平線及ひBCの二端の高低の差を求めんとす

CBZの角より$CBA=5°52'$を定むる時ハCBAの直三角形ニ於てBCの斜邊とBの鋭角を知る事を得故ニ

$$AB=BC\cos B$$

及ひ

$$AC=BC\sin B$$

の式ニ因り對數を

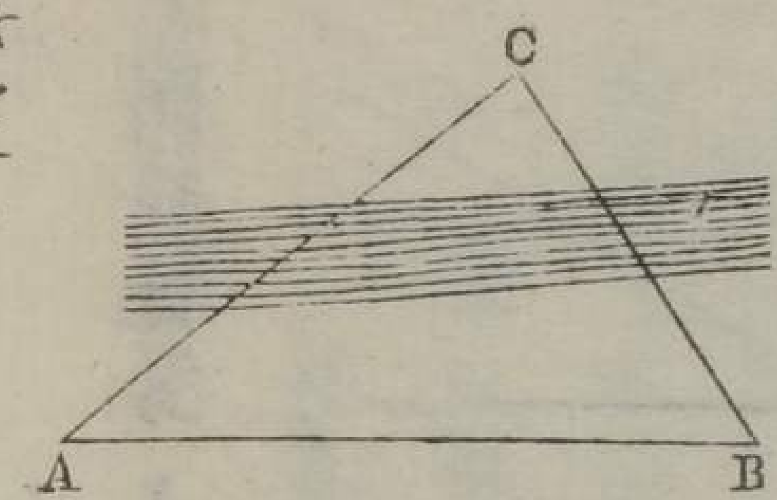
用ひて之を計算する時ハ

$AB=655^{m},30$

$AC=67^{m},33$

を得るなり

第二問題　一點より近接し難き一點に至るまでの距離を定むる事



（第十一圖）Aの點より近接し難きCの一點に至るまでの距離を求めんと欲し但し其二點は相見るを得へき者なり

Aの點より起りてABの基線を精密に測り次にAC BCの二視線と基線にて為せる所のABの二角を測るなり而して其基線を撰定するには三角形の各角をして六十度の前後ならしむる事を注意すへし是に於てABCの三角形に一邊及ひ二角を知る故に先つCの角を求め而して

$$\frac{AC}{\sin B}=\frac{AB}{\sin C}$$

の式に因り求むる所のACを計算するなり今

$AB=247^{m},49$

$A=62°41'$

$B=59°42'$

を以て計算する時ハ

$C=57°37'$

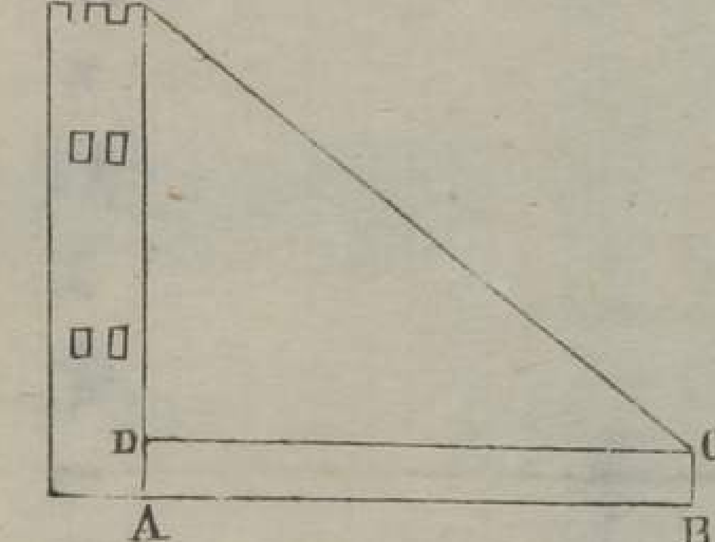
$AC=253^{m},03$

を得るなり

第三問題　底に近接するを得へき所の塔の高さを測

る事

第十二圖 塔の底より起りてABの基線を水平に測り其長をして臆測せるAEの高に等しからしめ而してBに測器を置きCEの覘線とCDの平線の間のDCEの角を測るなり是に於てDCEの直三角形にDCの邊即ちABとCの鋭



角を知る故に

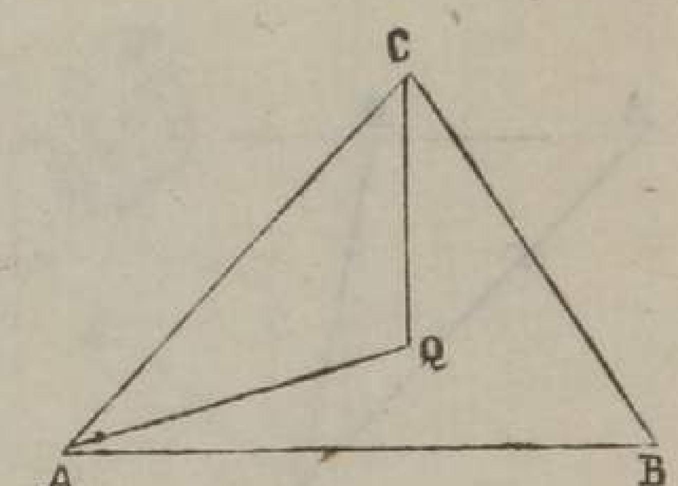
$$DE = CD\,tang\,DCE$$

を得之に測器の水平より塔の底に至るまでのADの距離を加へ以てAEの塔の高さを得るなり但しAD即ちBCを直に測り得へき者なり

若しCDの平線Aの點の下に在る時はDEよりADを減し以て其高さを得るなり

第四問題 某地の水平上に於る山の高さを測る事

第十三圖 Aの點を過くる平地の上に於るCの山頂の高さ



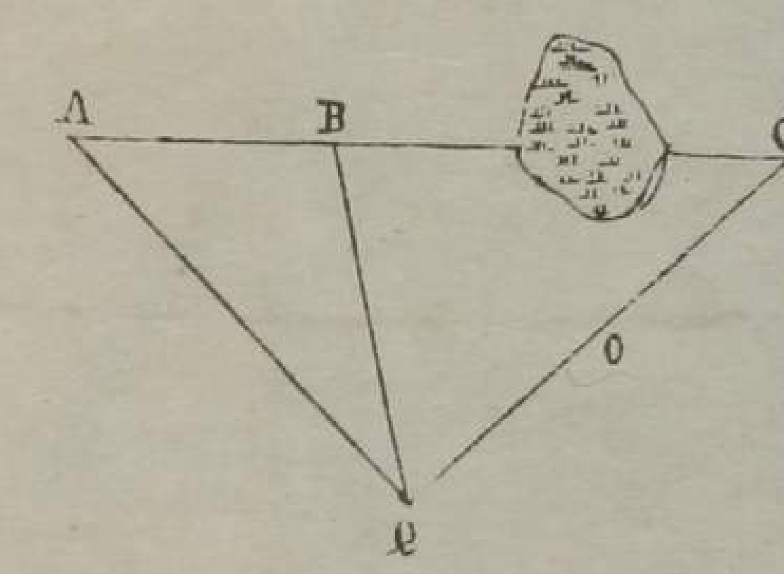
を求むるにはAの點より起りてABの基線並にCAB CBAの二角を測りABCの三角形に於てACの邊を計算し而してAQの平線とACの覘線の間のCAQの角を測る時はCAQの直三角形に於てACの斜邊とCAQの角を知る故に求むる所のCQの高さを計算する事を得るなり

注意 此問題は屋背の高さを測るに活用するなり

第五問題 望見を遮る所の障碍物を越へて一直線を

引長する事

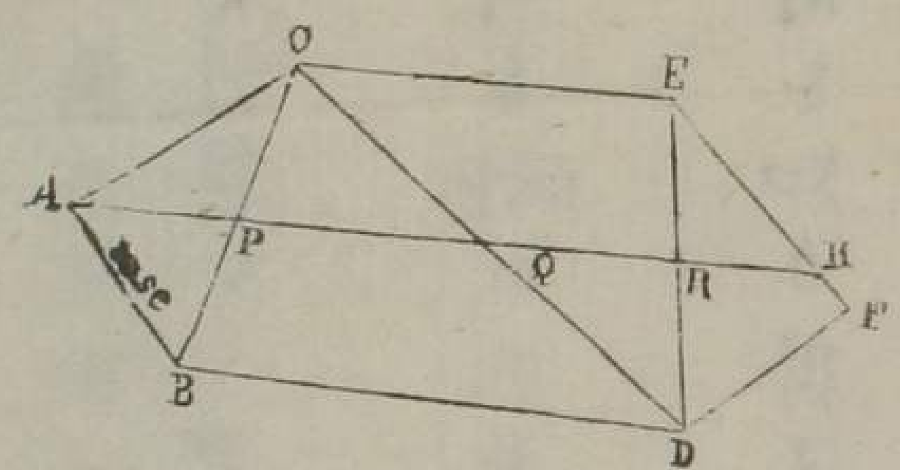
（第十四圖）ABの線あり望見を遮る所のMの障碍物を越へて之を引長せんとするにはABの直線とMの障碍物と及ひ引長線の達すへき地の一分とを望見すへき所にQの點を設けABの線及ひQAB QBAの二角を測りABQの三角形に於てBQの邊を計算し次にQの點より障碍物を越へたる地の一分に向てQOの線を設けBQOの角を測り而してOQの線とABの引長線の交る所をCとなす時はBQCの三角形に於てBQの邊及ひ二角を知る故にQCの邊並にQCBの角を計算する事を得て即ち此問題を解く者なり



第六問題　三角學に因り地上に於て線の長さを測る事

三角形の作法

（第十五圖）AKの線あり此長さを測らむとするには先つ精撰の直界尺を以てABの任意の基線を精密に測りA Bの二點よりAKの線の他傍に向てCの點を設けCAP CAB ABCの三角を測る時はABCの三角形を知る事を得而してACの邊とACBの角を計算する時はCAPの三角形に於てACの邊と二隣角を知る事を得AP PCの二邊とPの角を計算する事を得るなり次にB Cの二點よりDの點を設



けてBCD CBDの二角を測る時はDCの邊を計算する事を得又CPQの三角形に於てCPの邊と二隣角を知りPQ CQの二邊とQの角を計算する事を得るなり又同法を以て他のEの點を設くる時はDQBの三角形を解く事を得るなり其故は$DQ=CD-CQ$の邊と二隣角を知り得れはなり遞次此の如くしてAP PQ QB等の諸分を求め其和を以てAKの長さを得るなり

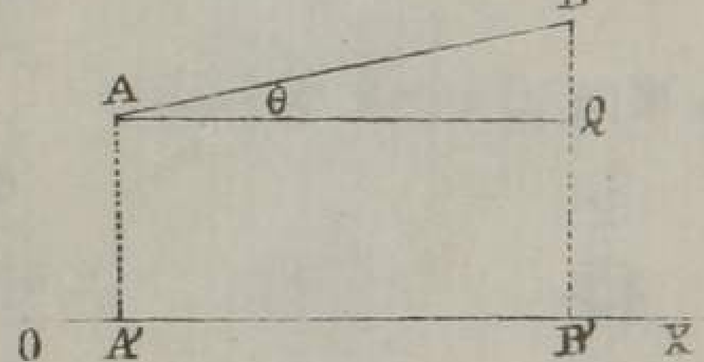
圖根の作法

前題に示せるか如く遞次に公共の一邊を用ひ且つ測るへき一線に跨る所の諸三角形の網形を作る者あり之を三角形の作法と謂ふ但し之を測るには一基線及ひ諸角に非されは用ひ是れ最も精密を要せされはなり此法は圖根の作法に用ふる事を得即ち測るへき所の地に於て適宜に設けたるABC等の諸點の位置を精密に定め然る後其中間の諸點を設くる為めに用ふる事を得るなり

第九教

畫形影

第十六圖



平面上に於てABの直線及ひOXの軸あり其直線のA Bの二端より軸の上にAA′ BB′の垂線を作る時はA′B′の軸の一分をOXの軸に於るABの直線の畫形影なり

A′B′の畫形影は直線と軸の間に在るθの銳角の餘弦を以てABの直線に乘したる

者ニ等シ其故ヲOXニ平行シテAQヲ作ル時ハABQノ直三角形ニ於テ

$$AQ = AB\cos BAQ = AB\cos\theta$$

ヲ得而シテ

$$AQ = A'B'$$

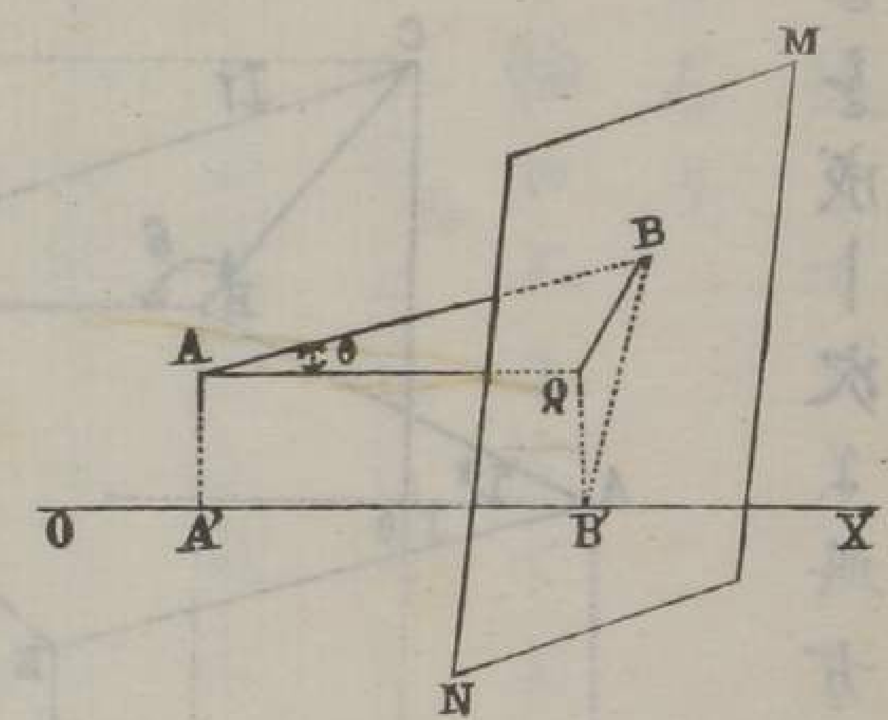
ナル故

$$A'B' = AB\cos\theta$$

ヲ得レハナリ

其設論ハ直線及ヒ軸ヲ同シ平面上ニ有セサル者ニモ亦用フル事ヲ得ルナリ

第十七圖 ABノ直線ノABノ二端ヨリ軸ニ直交スル二平面ヲ作ル時ハOXノ軸ニ於ケルABノ畫形影ハA'B'ナリ又軸ニ平行シテMNノ平面ニ達スルAQノ線ヲ作リBQヲ聯合スル時ハABQノ直三角形ニ於テ



$$AQ = AB\cos\theta$$

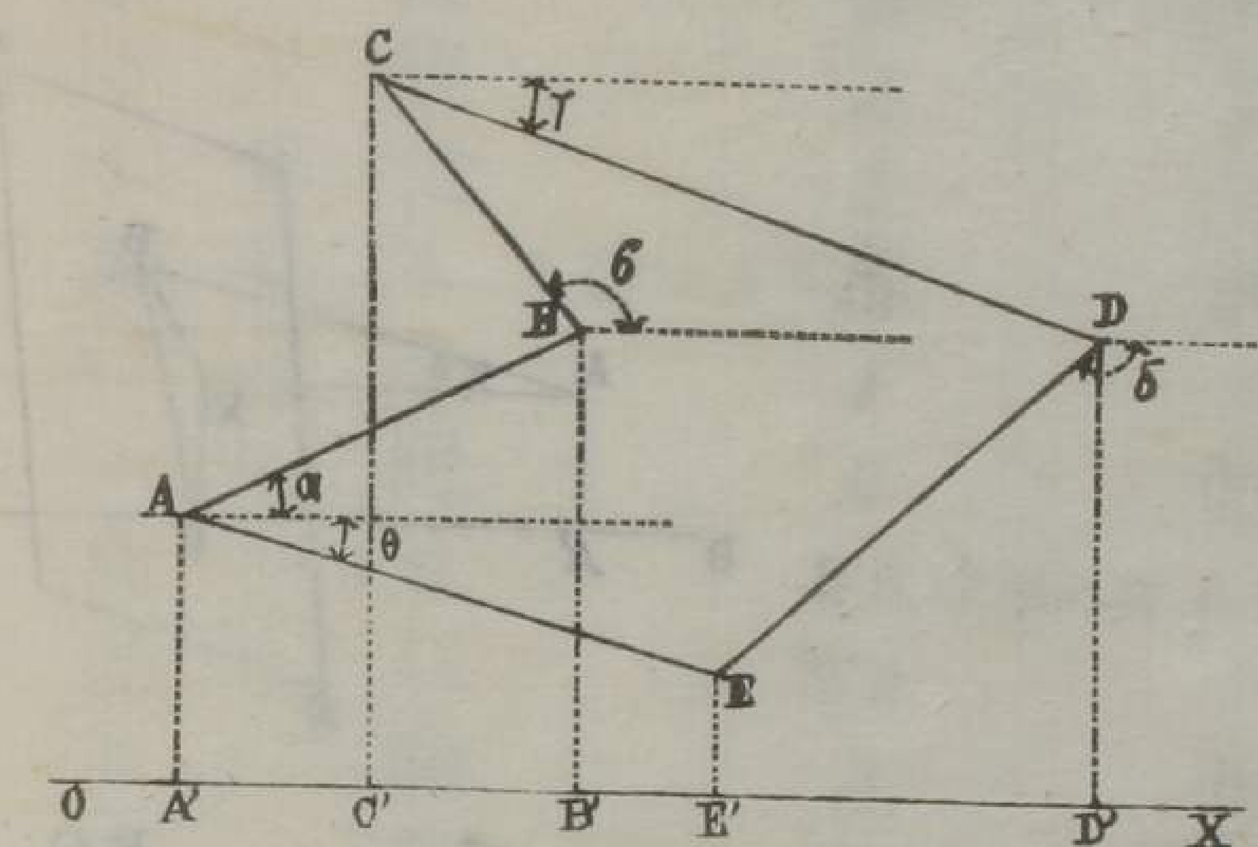
ヲ得但シθハ直線ト軸ノ間ノ鋭角ナリ然ルニAQ A'B'ハ平行二平面ノ間ニ在ル平行線ニシテ相等シ故ニ亦

$$A'B' = AB\cos\theta$$

ヲ得ルナリ

軸ニ於ル多角形ノ周邊ノ畫形影

第十八圖 空間に於てAの點よりEの點に至れるABCDEの折線あり一遊點を設け之をAよりEに至るまで折線上に行動せしむる時はOXの軸に於て其遊點の畫形影を得るなり



此畫形影は遊點折線の各邊を行動するに從て相反する二個の方向に行動す即ち遊點AよりBに至りBよりCD等に至る時は畫形影は先つ左方より右方に行動してA'B'の長さを成し次に此方向に反してB'よりC'に至り又先の方向に復してC'よりD'に至り又此方向に反してD'よりE'に至るなり

今軸の上に於てA'の點より左方にmの任意の距離を測りOの點を設け但し此點を定むるには遊點の畫形影をして悉く其右方に在らしむるなり是に於て遊點の畫形影よりOの定點に至るまでの距離を測るに始めは其畫形影はA'の處に在りて之よりOの點に至るまでの距離はmなり而して其畫形影相反する二個の方向に於てA'B' B'C' C'D' D'E'の長さを行動する時は左方より右方に行動して生ずる所の長さは其距離を增大する故正にして又右方より左方に行動して生ずる所の長さは其距離を減小するを以て負なり故に終りには其畫形影はE'の處に在りて之よりOの點に至

るまでの距離は

$$m+A'B'-B'C'+C'D'-D'E'$$

なり

又遊點AEの直線に從てAより直にEに至る時は其畫形影もA'E'の長さを為し而して此長さは左方より右方に行動して生ずるを以て正なり故に終りにも其畫形影は亦E'の處に在りて之より0の點に至るまでの距離は

$$m+A'E'$$

なり因て左の式を得

$$m+A'E'=m+A'B'-B'C'+C'D'-D'E'$$

二邊よりmを減じ下の式を得

$$A'E'=A'B'-B'C'+C'D'-D'E' \quad (1)$$

故に空間の一點より他の一點に至るまで遊點に因て生ずる所の折線ありて其遊點の畫形影一個の方向に行動して生ずる長さを正と為し反對の方向に行動して生ずる長さを負と為す時は折線の諸邊の畫形影の和は常數にして折線の二端を聯合する所の直線の畫形影に等し

若し其遊點多角形を生ずる時ハ其二端相合ずるを以て之を聯合する所の直線ハ０となり因て此畫形影も亦０となるなり故に左の論を得

某軸に於る多角形の諸邊の畫形影の和ハ恒に０に等し

設論の解式

折線の各邊の畫形影の長さ及ひ記號ハ其各邊と軸の間の鋭角或ハ鈍角の餘弦に因て容易に生ずる事を得るなり

（第十八圖）ABCDE の折線あり各邊と軸の間角を α β γ δ と為し AE の直線と軸の間角を θ と為す但し其角ハ悉く正の畫形影の方向即ち OX の方向より測る者なり是に於て各邊及ひ直線の畫形影を測るに AB の畫形影の $A'B'$ ハ α の角鋭角なる故 $AB\cos\alpha$ を以て長さ及ひ記號を知る事を得又 BC の畫形影の $-B'C'$ ハ BC と軸の間の鋭角の餘弦を以て BC に乗したる者に等し然るに其鋭角と β の並角とハ異號にして相等しき故此角を以て彼角に代ふる時ハ亦 $BC\cos\beta$ を以て $B'C'$ の長さ及ひ記號を知る事を得るなり而して負の畫形影を生ずる所の邊ハ軸と鋭角を為せる事を注意する時ハ同法を以て

$$C'D'=CD\cos\gamma$$

$$-D'E'=DE\cos\delta$$

$$A'E'=AE\cos\theta$$

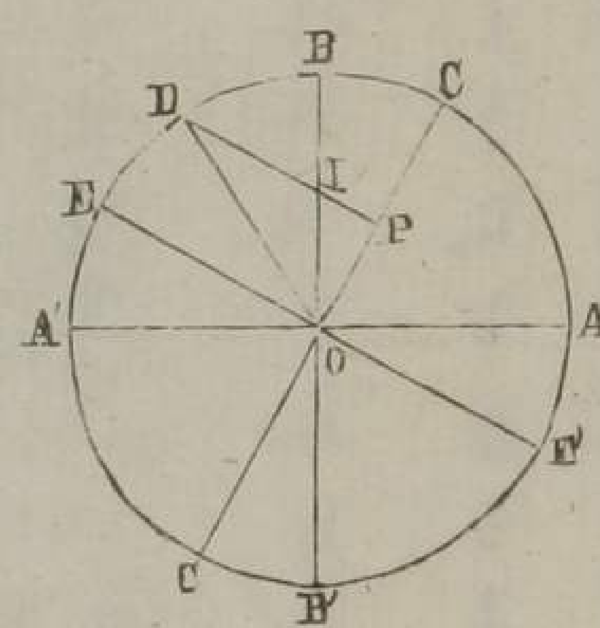
を得

此各の値を(1)式に用ふる時ハ左の式を得

$$AE\cos\theta = AB\cos\alpha + BC\cos\beta + CD\cos\gamma + DE\cos\delta \quad (2)$$

故に多角形の一邊の畫形影は他の諸邊の畫形影の和に等し

二弧の正弦餘弦を知りて其二弧の和及び差の正弦餘弦を求むる事



第十九圖

知る所の二弧をαβと為し半径を一と為せる所の圓周に於てAの原點よりαに等しくACを截取せ但し其一端のCよりβに等しくCDを截取し其弧を測るに其正負に従て或るABA'の方向に於てし或る反對の方向に於てせるなり此の如くせる時はADの弧は即ち$\alpha+\beta$なり又DよりOO'の中径上にDPの垂線を作

る時は此線は$\sin b$にしてD點CA′C′の半圓周上に在るは正なりCAC′の半圓周上に在るは負なり又OPの距離は$\cos b$にしてP點OCの上に在るは正なりOC′の上に在るは負なり

OよりDに至るまでODの直線及びOPDの折線あり今A′Aの軸に於る此二線の畫形影を測るにA′Aの方向を正と為し且つ其方向より諸角を測る時は軸に於るODの直線の畫形影は

$OD \cos DAO = OD \cos(a+b)$ にして $OD = 1$ なる故 $\cos(a+b)$ なり

又遊點OPDの折線上に行動する時はOP PDの二分の畫形影を得而してOAの軸に於るOPの一分の畫形影は恒に$\cos b\ \cos a$なり其故はOAの軸とOCの間の角はaにして$\cos b$はOPの距離OCの上に在る時は正となりOC′の上に在る時は負となればなり又OAに於るPDの一分の畫形影は恒に$\sin b \cos(90°+a)$なり其故はOCに直立してOEを作る時はOAの軸とPDに平行する線の間の角は$90°+a$

にしてsin bはPDの垂線OEの上に在る時は正となりOE'の上に在る時は負となればなり

又某弧の餘弦は餘弧の正弦に等しく且つ $90^\circ+a$ の餘弧は $-a$ に等しきを以て

$$\cos(90^\circ+a)$$
$$=\sin(-a)$$
$$=-\sin a$$

を得故にPDの一分の畫形影は又恒に $-\sin a\sin b$ に等し

是に於てODの直線の畫形影はOPDの折線の畫形影に等しき事を注意する時は左の式を得

$$\cos(a+b)=\cos a\cos b-\sin a\sin b \quad (1)$$

此式はａｂの正負大小に關らず一般に用ふべき者なり因て其式中ｂに代ふるに－ｂを以てする時は

$$\cos(a-b)=\cos a\cos(-b)-\sin a\sin(-b)$$

を得

$$\sin(-b)=-\sin b$$

$$\cos(-b)=\cos b$$

なる故に化して左の式を得

$$\cos(a-b)=\cos a\cos b+\sin a\sin b \quad (2)$$

又(1)式中aは90°を加ふる時は

$$\cos(90^\circ+a+b)=\cos(90^\circ+a)\cos b-\sin(90^\circ+a)\sin b$$

を得而して$90^\circ+a+b$の餘弧は$-(a+b)$にして$90^\circ+a$の餘弧は$-a$なる故

$$\cos(90^\circ+a+b)=\sin-(a+b)=-\sin(a+b)$$

$$\cos(90^\circ+a)=\sin(-a)=-\sin a$$

$$\sin(90^\circ+a)=\cos(-a)=\cos a$$

なり故に

$$-\sin(a+b)=-\sin a\cos b-\sin b\cos a$$

を得各

項の記号を變して左の式を得

$$\sin(a+b)=\sin a\ \cos b+\sin b\ \cos a \qquad (3)$$

又此式中bに代ふるに $-b$ を以てする時は

$$\sin(a-b)=\sin a\ \cos(-b)+\sin(-b)\cos a$$

を得化して左の式を得

又(3)式を(1)式に於るが如く圖上に於て直に求むる事を得るなり即ちOBの軸に於るODの直線及びOPDの折線の畫形影を測り而してOBの方向より諸角を測る時をODの直線の畫形影を

$OD\cos DOB$

にして

$DOB=a+b-90^\circ$

$\cos DOB=$
$\cos(a+b-90^\circ)=$
$\cos(90^\circ-(a+b))=$
$\sin(a+b)$

$OD=1$

なる故

$\sin(a+b)$

なり又OPの一分の畫形影を

$OP\cos POB=$
$\cos b\cos(90^\circ-a)$
$=\cos b\sin a$

又DPの一分の畫形影を

$DP\cos DIB=$
$\sin b\cos a$

$$\sin(a-b)=\sin a\cos b-\sin b\cos a \quad (4)$$

以上の四式を即ち本題を解く者なり

あり但しDIB COAの二角は各邊互に直立する故相等し是に於てODの直線とOPDの折線の畫形影は相等しき事を注意する時は左の式を得

$$\sin(a+b)=\sin a\cos b+\sin b\cos a$$

此式も亦他の三式に化する事を得るなり

二弧の正切を知りて其二弧の和及ひ差の正切を求むる事

設使は $\tan a$ $\tan b$ を以て $\tan(a+b)$ 及ひ $\tan(a-b)$ を計算せんとし

$$\tan(a+b)=\frac{\sin(a+b)}{\cos(a+b)}$$

の式中 $\sin(a+b)$ $\cos(a+b)$ に代ふるに前に得る所の値を以てする

時は

$$tang(a+b)=\frac{sin\,a\ cos\,b+sin\,b\ cos\,a}{cos\,a\ cos\,b-sin\,a\ sin\,b}$$

を得 $cos\,a\ cos\,b$ を以て此分數の分母子を除する時は左の式を得

又 $tang(a-b)$ を前に得る所の(2)式を以て(4)式を除して之を得る

$$tang(a+b)=\frac{\frac{sin\,a}{cos\,a}+\frac{sin\,b}{cos\,b}}{1-\frac{sin\,a}{cos\,a}\times\frac{sin\,b}{cos\,b}}$$

$$tang(a+b)=\frac{tang\,a+tang\,b}{1-tang\,a\ tang\,b}\quad(5)$$

なり然れとも(5)式を一般に用ふへき者なる故此式中bに代ふるに−bを以てする時は亦之を得るなり即ち左の式の如し

$$\tan g(a-b)=\frac{\tan g a-\tan g b}{1+\tan g a \tan g b} \qquad (6)$$

第十教 $\sin 2a$ $\cos 2a$ 及ひ $\tan g 2a$ の式

前に得る所の(3)(1)(5)の三式中$b=a$と為せる時は左の式を得

$$\sin 2a=2\sin a\cos a \qquad (7)$$

$$\cos 2a=\cos^2 a-\sin^2 a \qquad (8)$$

$$\tan g 2a=\frac{2\tan g a}{1-\tan g^2 a} \qquad (9)$$

此三式ハ一角の正弦餘弦及ひ正切の函數を以て其倍角の正弦餘弦及ひ正切を求むへき者なり

$\sin\frac{1}{2}a$，$\cos\frac{1}{2}a$ 及ひ $\tang\frac{1}{2}a$ の式

$$\cos^2 a+\sin^2 a=1$$

$$\cos^2 a-\sin^2 a=\cos 2a$$

の二式中 $\frac{1}{2}a$ を以て a に代ふる時ハ

$$\cos^2\frac{1}{2}a+\sin^2\frac{1}{2}a=1$$

$$\cos^2\frac{1}{2}a-\sin^2\frac{1}{2}a=\cos a$$

を得

此二式を相加へて左の式を得

$$2\cos^2\frac{1}{2}a=1+\cos a$$

$$\cos\frac{1}{2}a=\pm\sqrt{\frac{1+\cos a}{2}} \quad (10)$$

又前の二式を相減して左の式を得

$$2\sin^2\frac{1}{2}a=1-\cos a$$

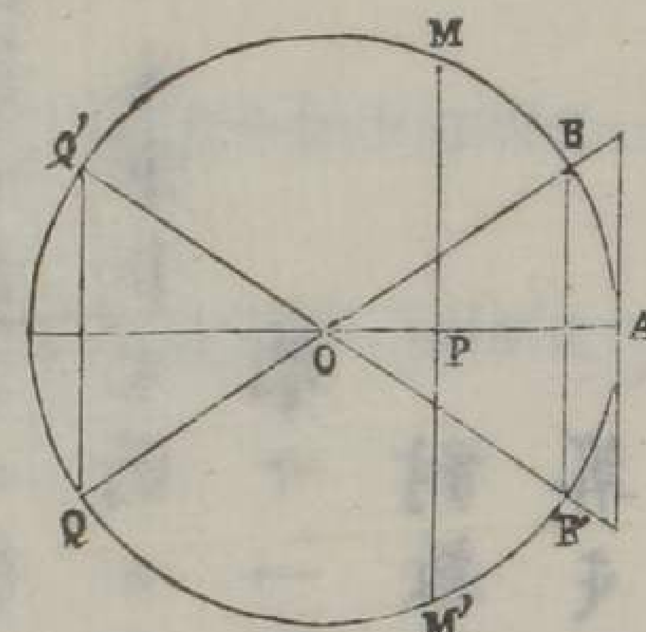
$$\sin\frac{1}{2}a=\pm\sqrt{\frac{1-\cos a}{2}} \quad (11)$$

又(10)式を以て(11)式を除して左の式を得

$$tang\,\frac{1}{2}\alpha=\pm\sqrt{\frac{1-cos\,\alpha}{1+cos\,\alpha}}\quad(12)$$

以上の三式は一角の餘弦を知りて其半角の正弦餘弦及ひ正切を計算するに用ふる者なり

又其三式に於ては $sin\,\frac{1}{2}\alpha$ $cos\,\frac{1}{2}\alpha$ 及ひ $tang\,\frac{1}{2}\alpha$ は各異号にして相等しき二個の値を有れ是れαの弧の餘弦のみを以て之を計算するに係れるなり



第二十圖設使を知る所の餘弦をOPと為す時は前の三式を以てOPを餘弦と為す所の諸弧即ちM及ひM′に達する所の諸弧の半の正弦餘弦及ひ正切を求むる事を得而して AM AM′ の二弧の中央をB B′と為しBQ B′Q′の二中径を作る時はM及ひM′に達する所の弧に一圓周を加減せし者の半は其弧の半に半圓周を加減せし者なる故其諸弧の半はB B′ Q Q′の四點中の一點に達し即ち此正弦餘弦及ひ正切は異号にして相等しき者なり

若し $\cos a$ を知る時並に a の弧を知る時は $\sin\frac{1}{2}a$ $\cos\frac{1}{2}a$ 及ひ $\tang\frac{1}{2}a$ の記号は $\frac{a}{2}$ の値に從て容易に知る事を得るなり此時に於ては求むる所の式は不定に非さるなり

第十一教

對數を以て二正弦或は二餘弦の和及ひ差を計算する事

$\sin(a+b)$ $\sin(a-b)$ を求むる所の(3)(4)の二式に於て二邊を相加へ或は相減せる時は左の二式を得

$$\sin(a+b)+\sin(a-b)=2\sin a\cos b$$

$$\sin(a+b)-\sin(a-b)=2\sin b\cos a$$

又 $\cos(a+b)$ $\cos(a-b)$ を求むる所の(1)(2)の二式に於て二邊を相加へ或は相減せる時は左の二式を得

$$\cos(a+b)+\cos(a-b)=2\cos a\cos b$$

$$\cos(a+b)-\cos(a-b)=-2\sin a\sin b$$

令

$$a+b=p$$

$$a-b=q$$

と為る時ハ之を加減して

$$a=\frac{p+q}{2}$$

$$b=\frac{p-q}{2}$$

を得之を前の四式ニ用ふる時ハ左の四式を得

$$\sin p+\sin q=2\sin\frac{1}{2}(p+q)\cos\frac{1}{2}(p-q) \quad (13)$$

$$\sin p-\sin q=2\sin\frac{1}{2}(p-q)\cos\frac{1}{2}(p+q) \quad (14)$$

$$\cos p+\cos q=2\cos\frac{1}{2}(p+q)\cos\frac{1}{2}(p-q) \quad (15)$$

$$\cos p-\cos q=-2\sin\frac{1}{2}(p+q)\sin\frac{1}{2}(p-q) \quad (16)$$

以上の四式ハ二正弦或ハ二餘弦の和或ハ差を積ニ變し而して對數を以て之ニ計算するニ用ふる者なり

設使は對數を以て $\sin 47+\sin 25^\circ$ を計算せんとするときは $p=47^\circ$ $q=25^\circ$ と為し (13) 式に因りて左の式を得

$$\sin 47^\circ+\sin 25^\circ=$$

$$2\sin\frac{1}{2}(47^\circ+25^\circ)\cos\frac{1}{2}(47^\circ-25^\circ)$$

$$=2\sin 36^\circ\cos 11^\circ$$

此式は對數を以て計算すへき者なり

設論

(14) 式を以て (13) 式を除する時は左の式を得

$$\frac{\sin p+\sin q}{\sin p-\sin q}=\frac{2\sin\frac{1}{2}(p+q)\cos\frac{1}{2}(p-q)}{2\sin\frac{1}{2}(p-q)\cos\frac{1}{2}(p+q)}$$

$$=\frac{\sin\frac{1}{2}(p+q)}{\cos\frac{1}{2}(p+q)}\times\frac{\cos\frac{1}{2}(p-q)}{\sin\frac{1}{2}(p-q)}$$

$$=\tan\!g\frac{1}{2}(p+q)\times\cot\frac{1}{2}(p-q)$$

$$=\tan\!g\frac{1}{2}(p+q)\times\frac{1}{\tan\!g\frac{1}{2}(p-q)}$$

$$\frac{\sin p+\sin q}{\sin p-\sin q}=\frac{\tan\!g\frac{1}{2}(p+q)}{\tan\!g\frac{1}{2}(p-q)}\qquad(17)$$

$$\frac{a+b}{a-b}=\frac{\sin A+\sin B}{\sin A-\sin B}$$

を得然るに前の設論に因れば

$$\frac{\sin A+\sin B}{\sin A-\sin B}=\frac{\tan\frac{1}{2}(A+B)}{\tan\frac{1}{2}(A-B)}$$

なる故左の式を得

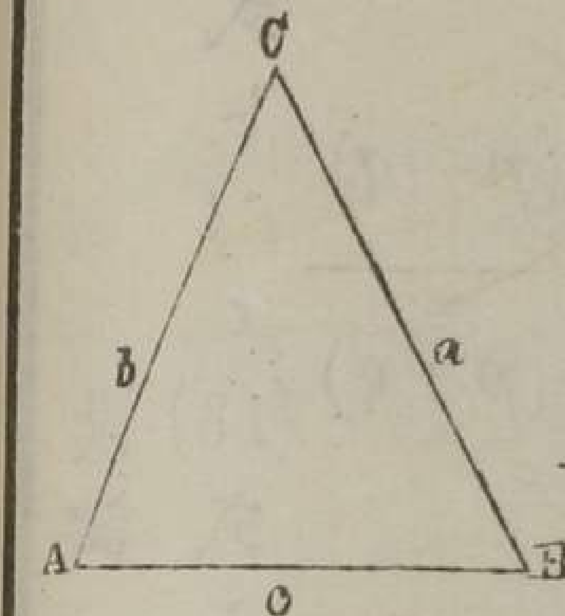
$$\frac{a+b}{a-b}=\frac{\tan\frac{1}{2}(A+B)}{\tan\frac{1}{2}(A-B)} \quad (1)$$

故に左の論を得

二角の正弦の和と差の比は其二角の半和の正切と半差の正切の比に等し

第十二款　斜三角形の邊角の關係

第一設論　三角形に於て二邊の和と差の比は之に對する二角の半和の正切と半差の正切の比に等し



(第二十一圖) ABCの三角形ありABCを以て三角を示しabcを以て三邊を示す時は

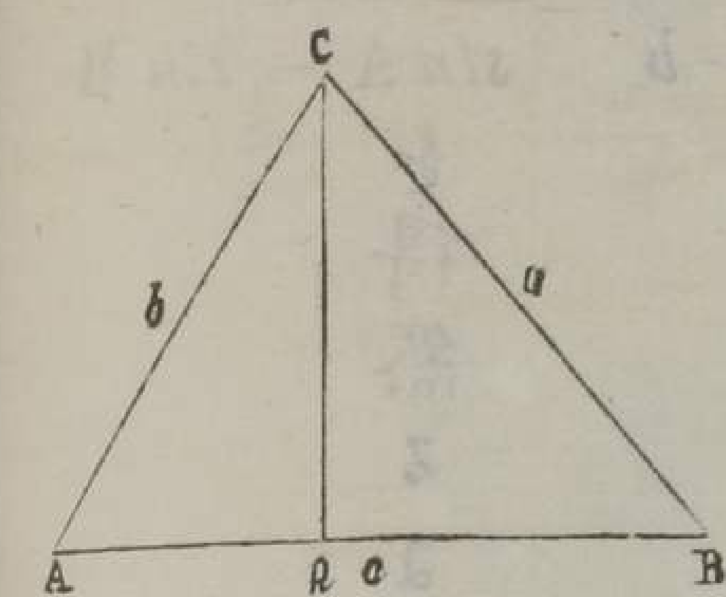
$$\frac{a}{b}=\frac{\sin A}{\sin B}$$

の式を得

比例式の原理に因りて之を化する時は

第二設論　三角形に於て一邊の二方は他の二邊の二方の和より此二邊と間角の餘弦の積の二倍を減したる者に等し

(第二十二圖) ABCの三角形ありAの角に對する所のaの邊を以て之を論せんとに



第一　Aを鋭角と為し而してCQの垂線を作る時は幾何學に因て

$$BC^2=AC^2+AB^2-2AB\times AQ$$

を得又CAQの直三角形より

$$AQ=AC\ \cos A$$

を得此値を前の式に用ひ且つa b cを以て三邊に代ふる時は左の式を得

$$a^2=b^2+c^2-2bc\ \cos A \qquad (2)$$

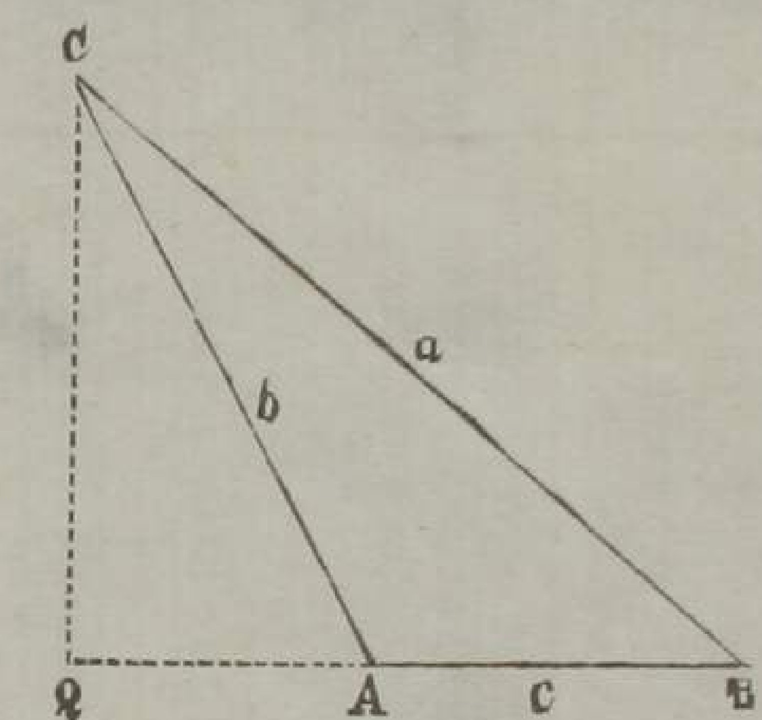
第二　(第二十三圖) Aを鈍角と為す時は幾何學に因て

$$BC^2=AC^2+AB^2+2AB\times AQ$$

を

得

又 CAQ の直三角形より AQ=AC cos CAQ を得然るに CAQ=180°−A



$\cos CAQ = -\cos A$

にして亦

$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$

を得故に此相等式を一般に用ふへき者なり

若しAを直角と為る時は $\cos A = 0$ なるにして(2)式より $a^2 = b^2 + c^2$ を得是れ直三角形の性質に合するなり

又(2)式は三邊と一角の關係を示せるの故に此式を化して

$$\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$$

と為す時は即ち三邊の函數を以てAの角を求むる事を得るなり

又同法を以て左の二式を得

$$\cos B=\frac{a^2+c^2-b^2}{2ac}$$

$$\cos C=\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}$$

三邊の函數を以て一角を定むる所の式を化せる事

斜三角形は各角と對邊の比例並に前の二個の設論を知る時は之を解く事を得るなり然れとも三邊の函數を以て一角を定むる所の式は對數を以て之を計算する能はす故に此式を化するの法を示す

cosA の函數を以て $\sin\frac{1}{2}A$ を求むる所の

$$\sin\frac{1}{2}A=\sqrt{\frac{1-\cos A}{2}}$$

の式に於て cosA に代ふるに

$$\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$$

式以てする時は

$$\sin\frac{1}{2}A=\sqrt{\frac{1-\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}}{2}}=\sqrt{\frac{2bc-b^2-c^2+a^2}{4bc}}$$

を得然るに

$$(b-c)^2=b^2+c^2-2bc$$

$$-(b-c)^2=-b^2-c^2+2bc$$

ふ

る故

$$\sin\frac{1}{2}A=\sqrt{\frac{a^2-(b-c)^2}{4bc}}$$

を得又

$$\sin\frac{1}{2}A=\sqrt{\frac{(a+b-c)(a-b+c)}{4bc}}$$

を得益し二數の二方の差は其二數の和と差の積に等しけれバなり是に於て三角形の周邊を$2p$と為す時は

$$a+b+c=2p$$

$$a+b-c=2p-2c$$

$$a-b+c=2p-2b$$

$$b+c-a=2p-2a$$

なる故之を前の式に用ひて左の式を得

$$\sin\frac{1}{2}A=\sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{bc}} \qquad \text{D}$$

此式は對數を用ひて計算せらる事を得而して三邊の函數を以て一角の半の正弦を求むる事を得るなり

又

$$\cos\frac{1}{2}A=\sqrt{\frac{1+\cos A}{2}}$$

の式中$\cos A$に代ふるに其値を以てする時は

$$\cos\frac{1}{2}A=\sqrt{\frac{1+\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}}{2}}$$

$$\sqrt{\frac{2bc+b^2+c^2-a^2}{4bc}}=\sqrt{\frac{(b+c)^2-a^2}{4bc}}=\sqrt{\frac{(b+c+a)(b+c-a)}{4bc}}$$

を得而して $b+c+a$ $b+c-a$ に代ふるに $2p$ $2p-2a$ を以てする時は左の式を得

$$\cos\frac{1}{2}A=\sqrt{\frac{p(p-a)}{bc}} \quad (2)$$

此式も亦對數を用ひて一角の半を計算する事を得るなり

又(2)式を以て(1)式を除する時は左の式を得

$$\tan g\frac{1}{2}A=\sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{p(p-a)}} \quad (3)$$

此式は三邊の函數を以て一角の半の正切を定むへき者なり

又前に得る所の $\sin 2A=2\sin A\cos A$ の式に於てAに代ふるに $\frac{1}{2}A$ を以てせ

る時を

$$\sin A = 2\sin\frac{1}{2}A\cos\frac{1}{2}A$$

を得又此式中

$\sin\frac{1}{2}A$

$\cos\frac{1}{2}A$

に代ふるに前に得る所の値を以てせる時を左の式を得

$$\sin A = 2\sqrt{\frac{p(p-a)(p-b)(p-c)}{b^2 \times c^2}}$$

$$\sin A = \frac{2}{bc}\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} \quad (4)$$

此式は三邊の函數を以て一角の正弦を定むへき者なり

第十三第十四款

斜三角形の解法

斜三角形は亦直三角形に於るか如く四種の解法を有し即ち第一は一邊と二角第二は二邊と一對角第三は二邊と其間角第四は三邊を知る者なり然るに第一第二種は既に之を示せるを以て次に第三第四種を示す

二邊と其間角を知りて他の諸分並に面積を求むる事

設使はa bの二邊及ひCの間角を以てABの二角及ひcの邊を計算せんとす但し此三角形は恒に作り得へき者なり

先つＡＢの二角を定めんとするは其半和を

$$A+B=180°-C、\quad \frac{A+B}{2}=90°-\frac{1}{2}C$$

より直に知り得へきを以て尚其半差を求むれは可なり之を求むるより前の設論より左の式を設し但しａをｂより大なる者とす

$$\frac{a+b}{a-b}=\frac{tang\frac{1}{2}(A+B)}{tang\frac{1}{2}(A-B)}$$

此比例式に於ては第四率の他は悉く知り得る者なり故に之を化して左の式を得

$$tang\frac{1}{2}(A-B)=\frac{(a-b)\,tang\frac{1}{2}(A+B)}{a+b}=\frac{(a-b)\cot\frac{1}{2}C}{a+b}$$

$$\log tang\frac{1}{2}(A-B)=\log(a-b)+\log\cot\frac{1}{2}C-\log(a+b)$$

ＡＢの二角の半和及ひ半差を知る時ハ之を加減して其二角を得るなり設使ハ半和をＰと為し半差をＱと為す時ハ左の式を得但しＡ＞Ｂなり

$$\frac{A+B}{2}=P$$

$$\frac{A-B}{2}=Q$$

$$A=P+Q$$

$$B=P-Q$$

二角を求め得ハ

$$\frac{c}{\sin C}=\frac{a}{\sin A}$$

即ち

$$a=\frac{a\sin C}{\sin A}$$

の式ニ因てｃの邊を得るなり

又面積ハ

$$S=\frac{ab\sin C}{2}$$

の式ニ因て計算するなり

三邊を知りて三角並ニ面積を求むる事

知る所の三邊をａｂｃと為す但し此三角形ハ最大の一邊他の二邊の和より小なる時ハ作る事を得るなり

三角を求むるニハ先つ前ニ得る所の

$$\tan\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{p(p-a)}}$$

の式ニ因て $\frac{A}{2}$ の角を計算するなり其對數式ハ左の如し

$$\log \tan g \frac{A}{2} = \frac{\log(p-b)+\log(p-c)-\log p-\log(p-a)}{2}$$

$\frac{A}{2}$の角を求め得て之を二倍してAの角を得次に同法を以て

$$\tan g \frac{1}{2}B = \sqrt{\frac{(p-c)(p-a)}{p(p-b)}}$$

$$\tan g \frac{1}{2}C = \sqrt{\frac{(p-a)(p-b)}{p(p-c)}}$$

の二式よりBCの二角を得るなり

此三角を正切に因て之を求むるを簡便なりとす其故はp $p-a$ $p-b$ $p-c$の四數の對數を用ひて悉く之を計算し得ればなり若し正弦に因て之を求むる時は六數の對數を用ひ又餘弦に因て之を求むる時は七數の對數を用ひさるへからは

又 $\tan\frac{1}{2}A$ $\tan\frac{1}{2}B$ $\tan\frac{1}{2}C$ を定むる所の各平方根は虚なる事なし其

故にaを以て三邊中の最も大なる者と為せし時は $a<b+c$ によりて

此二邊にaを加ふる時は

$$2a<a+b+c$$
$$2a<2p$$
$$a<p$$

を得故に又

$$b<p$$
$$c<p$$

によりて

即ち $p-a$ $p-b$ $p-c$ は悉く正なれはなり

又三角を各別に計算せる時に得る所の値の和は180°に等しからさるを得す是れ試驗の簡法なり

面積

$S=\frac{bc\sin A}{2}$ の式中 $\sin A$ に代ふるに前に得る所の

$$\frac{2}{bc}\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

の値を以てせる時は左の式を得

$$S=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

此式は三邊の函數を以て三角形の面積を求むへき者なり

而して左の如く之を誦も

三角形の面積を半周邊と之より各一邊を減したる者の積の平方根に等し

活用

第一 三角形あり

$a=3469^{m}$

$b=2653^{m}$

$C=68^{\circ}43'28''$

を以て之を解き並に面積を計算する事左の如し

$a+b=6122^{m}$

$a-b=816^{m}$

$\frac{C}{2}=34^{\circ}21'44''$

$\frac{A+B}{2}=55^{\circ}38'16''$

$\frac{A-B}{2}$の計算

$$tang\frac{A-B}{2}=\frac{(a-b)\cot\frac{1}{2}C}{a+b}$$

$$\log(a-b)=2,9116902$$
$$\log\cot\tfrac{1}{2}C=0.1651050$$
$$-\log(a+b)=\bar{4},2131067$$
$$\log tang\frac{A-B}{2}=\bar{1},2899019$$
$$\frac{A-B}{2}=11^{\circ}\ 1'\ 51''$$
$$A=66^{\circ}\ 40'\ 7''$$
$$B=44^{\circ}\ 36'\ 25''$$

Sの計算

$$S=\frac{ab\sin C}{2}$$

$$\log a=3,5402043$$
$$\log b=3,4287372$$
$$-\log\sin C=\bar{1},9693442$$
$$-\log 2\ \ 1.6989700$$
$$\log S=6,6322557$$
$$S=4288009^{m.}$$

cの計算

$$c=\frac{a\sin C}{\sin A}$$

$$\log a=3,5402043$$
$$\log\sin C=\bar{1},9693442$$
$$-\log\sin A=0,0370487$$
$$\log c=3,5465972$$
$$c=3520^{m},44$$

第二 三角形あり

$a = 567^m,37$

$b = 419^m,85$

$c = 354^m,63$

を以て之を解き並ニ面積を計算する事左の如し

計算の表

$a = 567,37$
$b = 419,85$
$c = 354,63$
$2p = 1341,85$
$p = 670,925$
$p - a = 103,555$
$p - b = 251,075$
$p - c = 316,295$

$\log p = 2,8266740$
$-\log p = \bar{3},1733260$
$\log(p-a) = 2,0151711$
$-\log(p-a) = \bar{3},9848289$
$\log(p-b) = 2,3998035$
$-\log(p-b) = \bar{3},6001965$
$\log(p-c) = 2,5000924$
$-\log(p-c) = \bar{3},4999076$

Aの計算

$$\tan g\frac{1}{2}A = \sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{p(p-a)}}$$

$\log(p-b) = 2,3998035$
$\log(p-c) = 2,5000924$
$-\log p = \bar{3},1733260$
$-\log(p-a) = \bar{3},9848289$
$0,0580508$
$\log \tan g\frac{1}{2}A = 0,0290254$
$\frac{1}{2}A = 46°54'47'',6$
$A = 93°49'35''$

Cの計算

$$\tan g\frac{1}{2}C = \sqrt{\frac{(p-b)(p-a)}{p(p-c)}}$$

$\log(p-b) = 2,3998035$
$\log(p-a) = 2,0151711$
$-\log p = \bar{3},1733260$
$-\log(p-c) = \bar{3},4999076$
$\bar{1},0882082$
$\log \tan g\frac{1}{2}C = \bar{1},5441041$
$\frac{1}{2}C = 19°17'29'',5$
$C = 38°34'59''$

Bの計算

$$\tan g\frac{1}{2}B = \sqrt{\frac{(p-a)(p-c)}{p(p-b)}}$$

$\log(p-a) = 2,0151711$
$\log(p-c) = 2,5000924$
$-\log p = \bar{3},1733260$
$-\log(p-b) = \bar{3},6001965$
$\bar{1},2887860$
$\log \tan g\frac{1}{2}B = \bar{1},6443980$
$\frac{1}{2}B = 23°47'42'',0$
$B = 47°35'26''$

試験

$A = 93°49'35''$
$B = 47°35'26''$
$C = 38°34'59''$
$A + B + C = 180°0'0''$

Sの計算

$$S=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

$$\log p = 2{,}8266740$$
$$\log(p-a) = 2{,}0151711$$
$$\log(p-b) = 2{,}3998035$$
$$\log(p-c) = 2{,}5000924$$
$$9{,}7417410$$

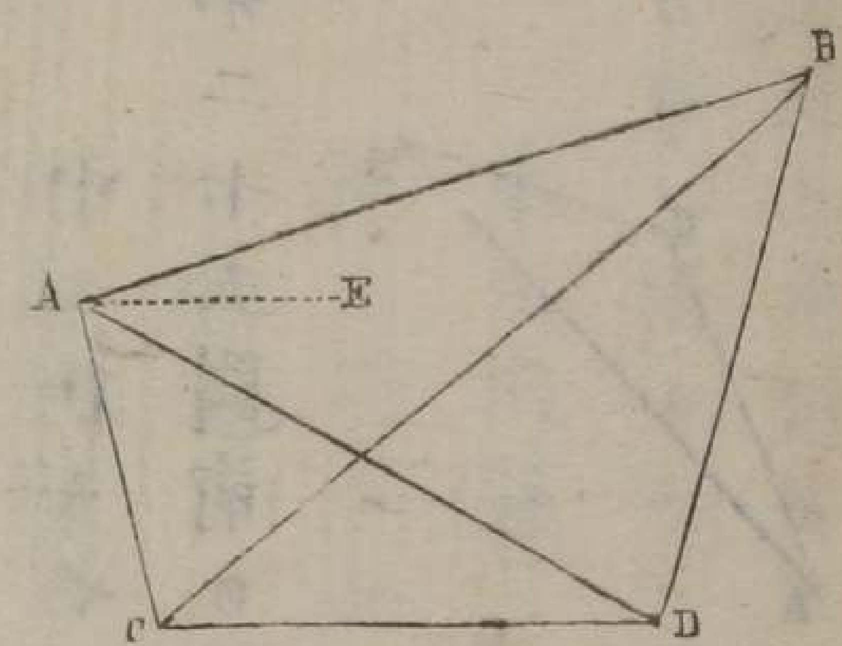
$$\log S = 4{,}8708705$$
$$S = 74279^{\text{m.car}}77$$

第十五第十六教

平面測圖の諸問題に於る三角學の活用

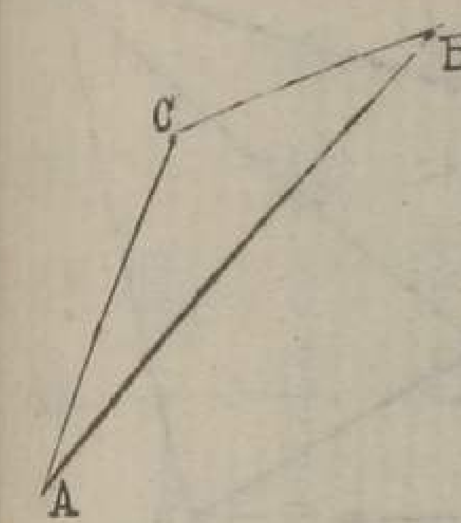
第七問題 望見し得へくして近接し得へからさる二點の距離を求むる事

(第二十四圖)ABの二點の距離を求むるにハ先つ此二點を望見し得る處にCDの基線を測りCに測器を置きCA CBの視線と基線の間のACD BCDの二角を測り又Dに測器を移しDB DAの視線と基線の間のBDC ADCの二角を測る時ハBCDの三角形に於てCDの邊と二隣角を知る故BCの邊を計算する事を得又ACDの三角形に於てCDの邊と二隣角を知る故ACの邊を計算する事を得るなり是に於てACBの角を測る時ハACBの三角形ハACBCの二邊とACBの間角を知る故之を解く事を得而してABの距離を求むる事を得るなり但しABCDの四點同平面上に在る時ハACBの角ハACDとBCDの二角の差なり若し測る所のACBの角ハACDとBCDの二角の差に等しき時ハABCDの四點ハ同平面上に在り而してAの點よりCDの基線



に平行なるAEの線を作る時はBAEの角はBACとCAEの二角の差なり然るにBACの角は既に解く所の三角形に於て之を得又CAEの角はACDの角の並角なり故に近接し難きABの線と基線の間のBAEの角を知る事を得而してCの點或は他の諸點よりABに平行なる線を作る事を得るなり

第八問題　近接し難き三點を知りて此の線は一直線中に在るやを探鑿する事

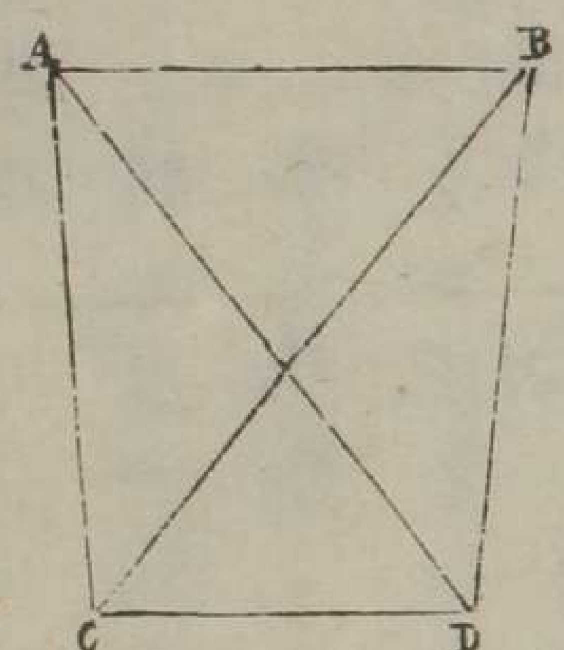


第二十五圖前の問題に因て各三點の距離のAB BC ACを測り而して

AB＝AC＋BC

なる時は其三點は一直線中に在り否らざる時は三角形を為すなり但し此三角形は三邊を知る故容易に三角及ひ面積を計算し得る事を得るなり

第九問題　近接し難きABCDの四點を知りて此四點は同平面上に在るやを探鑿し而して同平面上に在る時は其四點にて為す所の四角形は圓形に内容するやを探鑿する事



第二十六圖先つ各二點の距離を計算し次に三邊を知る所の諸三角形に於てACD ACB BCDの三角を計算し而して

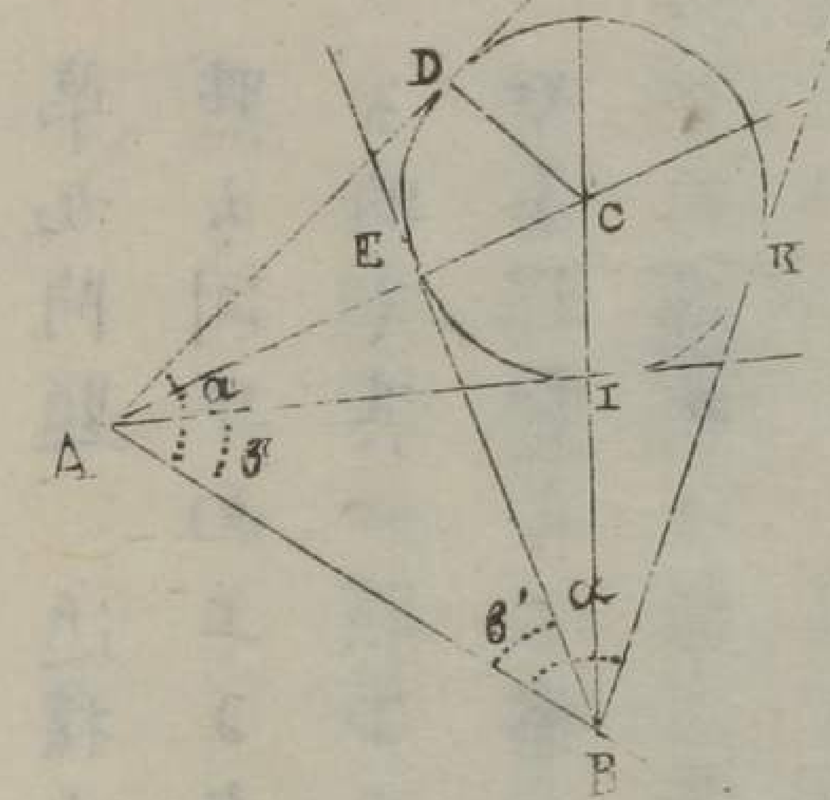
ACD＝ACB＋BCD

なる時はABCDの四點を

同平面上に在り又CAD CBDの二角を計算し而して此二角相等しき時は其四點は同圓周上に在るなり

第十問題　近接し難き圓柱塔の半径を定むる事

(第二十七圖)先つABの基線を測りAの點に於て塔に切する二視線と基線の間のDAB IABの二角を測り之をα βと為す時は此二角の差即ちDAIの角の平分線は塔の中心を過き而して此平分線と基線の間のCABの角は$\frac{\alpha+\beta}{2}$に等し次にBに於てKBA EBAの二角を測り之をα' β'と為す時はCBAの角は$\frac{\alpha'+\beta'}{2}$に等し今ABCの三角形に於てABの邊と二隣角を知る故ACの邊を計算する時は又ACDの直三角形に



於てACの斜邊を知る事を得而してCADの鋭角は$\frac{\alpha-\beta}{2}$に等し故にCDの半径を求むる事を得るなり

第十一問題　知る所のABの二點よりCの點に至るb aの距離を知り地上に於て再ひCの點を定むる事

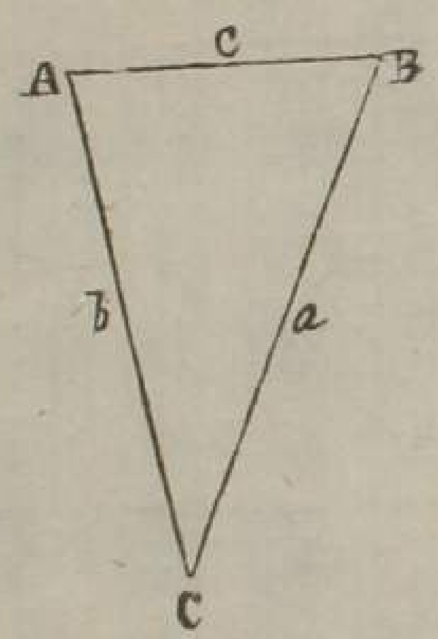
(第二十八圖)先つABの距離を測り之をcと為す時はABCの三角形に於て三邊を知る故Aの角を計算する事を得るなり是に於てACの方向を定め此方向中にAC即ちbの距離を測るなり設令は

$a=9459^{m},31$
$b=8032^{m},29$
$c=8242^{m},58$

を知る時は

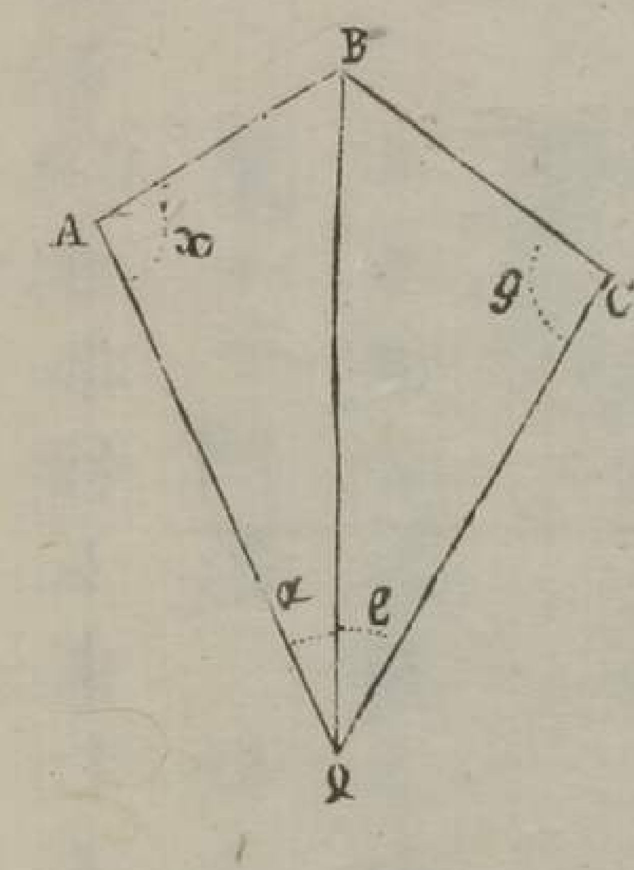
$A=71°3'34''$

を得之よりCの點を得るなり



第十二問題　平地に在る所のＡＢＣの三點を圖上に載せたる時他のＱの點を定むる事但し此點よりAB BCの距離を見る所の二角を既に測りて之を知る者なり

（第二十九圖）Ｑの點よりAB BCの距離を見る所のAQB BQCの二角をαβと為す



圖上に於て此問題を解くにはABを通弦と為して知る所のαの角を内容すへき圓分を作り又BCを通弦と為して知る所のβの角を内容すへき圓分を作る時は此二弧はB及ひQの二點に交り即ち求むる所のQの點を得るなり其故は此二弧の交點に知る所の角に於てAB BCの距離を見る事を得ればなり

此圖上の解法は精密なる者と為すを能はざる故に三角學に於て此問題を解くへし其法はABQ CBQの二角及ひBQの距離を計筭し以てQの點を求めんとするなり

知る所のAB BCの距離をａｂと為しABCの角をBと為し又知らざる所のBAQ BCQの二角をx yと為す時は此x yを知ればABQ CBQの三角形を解く事を得即ち本題を解く事を得べし故に先つx yの二角を求めんとす

A B C Dの四點は同平面上に在る者と定むる時は此四點にて為す所のABCQの四角形に於て左の式を得

$$x+y=360-(B+\alpha+\beta)$$

$$\frac{x+y}{2}=180-\frac{B+\alpha+\beta}{2} \quad (1)$$

此式に因てxyの半和を知る事を得るなり故に又其半差を求めんとす

ABQ及びBCQの三角形に於て左の式を得

$$\frac{BQ}{\sin x}=\frac{a}{\sin\alpha}$$

$$BQ=\frac{a\sin x}{\sin\alpha} \quad (2)$$

$$\frac{BQ}{\sin y}=\frac{b}{\sin\beta}$$

$$BQ=\frac{b\sin y}{\sin\beta} \quad (3)$$

又(2)(3)の二式より

$$\frac{a\sin x}{\sin\alpha}=\frac{b\sin y}{\sin\beta}$$

を得之を変化して

$$\frac{\sin x}{\sin y}=\frac{b\sin\alpha}{a\sin\beta}$$

又

$$\frac{\sin x-\sin y}{\sin x+\sin y}=\frac{b\sin\alpha-a\sin\beta}{b\sin\alpha+a\sin\beta}$$

を得然るに前の設論に因れハ

$$\frac{\sin x-\sin y}{\sin x+\sin y}=\frac{\tan\frac{1}{2}(x-y)}{\tan\frac{1}{2}(x+y)}$$

なる故

$$\frac{\tan\frac{1}{2}(x-y)}{\tan\frac{1}{2}(x+y)}=\frac{b\sin\alpha-a\sin\beta}{b\sin\alpha+a\sin\beta}$$

を得 $b\sin\alpha$ を以て之を

除して左の式を得

$$\frac{\tan\frac{1}{2}(x-y)}{\tan\frac{1}{2}(x+y)}=\frac{1-\dfrac{a\sin\beta}{b\sin\alpha}}{1+\dfrac{a\sin\beta}{b\sin\alpha}}$$

今

$$\tan\varphi=\frac{a\sin\beta}{b\sin\alpha}$$

と為す時は φ の角は之より求むる事を得而して前式は左の如く変ず

$$\frac{\tan\frac{1}{2}(x-y)}{\tan\frac{1}{2}(x+y)}=\frac{1-\tan\varphi}{1+\tan\varphi}=\tan(45^{\circ}-\varphi)$$

$$\tan\frac{1}{2}(x-y)=\tan\frac{1}{2}(x+y)\times\tan(45^{\circ}-\varphi) \quad (4)$$

此式に因れば對數を以て x y の半差を計算する事を得而して其半和は(1)式に於て既に之を知る故即ち x y の角を得るなり

是に於てACの點にx yの角を作る時は此二方向の交る處は即ち求むる所のQの點なり而してABQ CBQの二角を知る時はBQの距離は(2)或は(3)式より求むる事を得るなり

若し $\alpha+\beta+B=180^\circ$ なる時はQの點の位置は不定なる者なり其故は ABCQ の四角形は圓形に内容する事を得而してAB BCを通弦と為す所の二圓分は全く相合すればなり又前の式を以て之を論ずる時は

$$x+y=180^\circ$$

$$\frac{x+y}{2}=90^\circ$$

$$\tan g\,\frac{1}{2}(x+y)=\infty$$

にして又

$$\sin x=\sin y$$

$$a\sin\beta=b\sin\alpha$$

$$\tan g\,\varphi=1$$

$$\varphi=45^\circ$$

$$\tan g(45^\circ-\varphi)=0$$

なる故(4)式變じて

$$\tan g\,\frac{1}{2}(x-y)=\infty\times0=\frac{0}{0}$$

となればなり

注意　此問題は地圖或は海圖の作法に活用する者なり設使ば島嶼或は岩礁ありて之より海濱を望見すべき時之を圖上に載せんとするに濱上にABCの三點を設け而してAQB BQCの二角を測る時は即ち其位置を定むる事を得るなり又平面測圖に於ても知らざる所のQの點より知る所の三點を望見すべき時は亦同法を施す事を得るなり

筭學教程講本卷之五終

筭學教程講本卷六

標高平圖幾何學之部

第一教

平圖幾何學の本旨

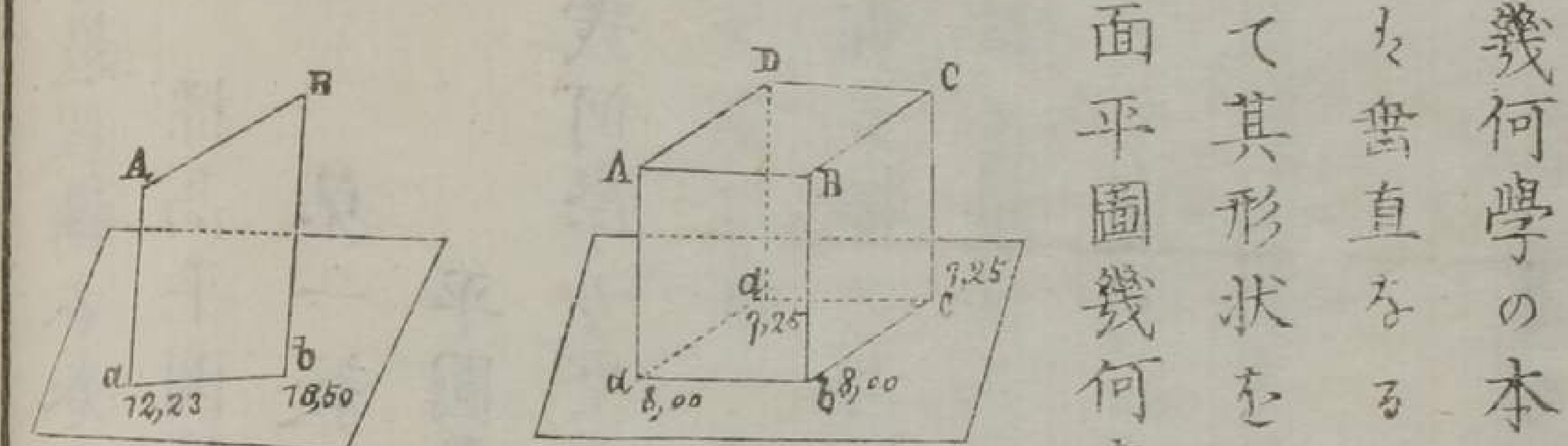
平圖幾何學ハ空際ニ於テ三個の長度を有てる体を二個の長度を有てる一平面上ニ顕ハし而して此平面中ニ於ける諸製圖ニ依リ此体ニ関する諸設問を觧くを旨とし凡そ諸工作及ひ築城の法ニ於ても幾何圖を用ひ一平面上ニ物品の真圖を顕ハし其体の諸性質を全ふし其真形を精密ニ定むる事を得せしむ是れ平圖幾何學の要用なる所以なり

畫形影の法

平圖幾何學の本旨を遂けんにハ畫形影を用ふ此法一ハ水平一ハ垂直なる直交せる二個の定平面上に於て体を寫影し以て其形状を十分に顕はす事を得せしむるものなり之を二面平圖幾何學ト名く

又一寫影平面即ち水平面のみを用ひ諸体の畫形影の傍に於て此點の高さを顕はし數を記るす之を標高と名く故に(第一圖) a b c d ハ A B C D の畫形影を顕はし而して 8m,00 7m,25 の標高ハ A 及ひ B の點ハ寫影平面上 8m,00 ハ在り又 C 及ひ D の點ハ 7m,25 ハある事を示し又次の a b ハ A B の畫形影にして寫影

第一圖



平面上A點ハ 12m,23 B點ハ 16m,50 にある事を示し之を標高平圖幾何學と名く

畫形影の法を定むる幾何學の設論

平圖幾何學を了解せんにハ能く畫形影の法を定むる幾何學の設論を記臆せさるへからす依て左に其要用なる者を挙く」

設論

第一　平面ハ一直線中にあらさる三點或ハ相交截せる二直線或ハ平行せる二直線或ハ一點と一直線とに依て決定す

第二　一直線平面に直立するにハ其直線の底を過き且つ其平面上に在る二直線に直立せる時に在り

第三　一點ヨリ平面上に下せる垂線は其點より其平面までの最近距離なり

第四　空際の一點Aより平面上に垂線ABを下し其底Bより其平面上に在るPQの某直線上に第二の垂線BCを作る時は此A點とC點に聯接せる直線はPQの直線に直立す

第五　平行せる直線は同し平面に直立す又之を反言すへし

第六　一直線平面と平行するには其平面上に在る直線と平行すれは可なり

第七　一個の同し直線に直立する二平面は互に平行す又之を反言すへし

第八　平行せる二平面と第三の平面との交線は相平行す而して其平行平面間に夾める平行せる各直線は相等し

第九　同し平面上に在らさる二角の各邊相平行して且つ同方向に向ける時は此二角は相等し而して其平面は相平行す

定說

第十　一點より平面上に下せる垂線の底を其平面上に於ける此點の畫形影と名く

第十一　直線の平面上に於ける畫形影は其直線の諸點の其平面上に於ける畫形影の幾何地なり

設論

第十二　直線の平面上に於ける畫形影は亦直線なり是れは設くる所の直線を過きて寫影の平面と直角に作れる平

面即ち投影の平面と名くる者の寫影の平面上に於ける跡なり

第十三　二個の直線空際に於て相平行せる時ハ其平面上に於て此二線を投影せる所の各平面及ひ此二線の畫形影も同しく相平行なり

第十四　直線平面とに由て成る角ハ其直線其平面上に於ける其畫形影とに由て成す鋭角を以て測るなり

第十五　二平面の角ハ此二平面の交線の同し一點より此二平面上に建てたる二個の垂線にて成る角を以て測るなり

第十六　一直線平面に直立せる時ハ此直線を過きて作れる凡ての平面ハ原平面に直立ス

第十七　二個の平面互に直立せる時ハ第一平面の某點より第二平面に直立せる凡ての直線ハ全く第一平面上に在り

第十八　某平面他の交截せる二平面に直立せる時ハ此平面ハ此二平面の交線に直立す

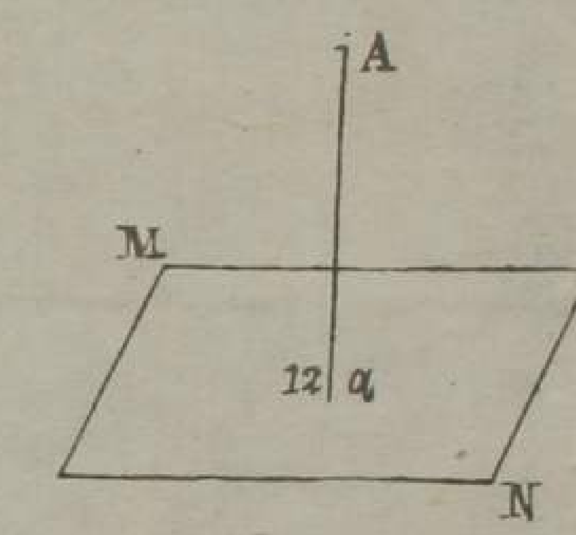
寫影平面

寫影平面ハ土地の各點より下方を過ぐる水平面なり而して寫圖せんと欲する土地或ハ物体の各變ハ此平面に直立せる各線即ち鉛線に依て寫影せるなり而して此寫影平面と各點との間に在る此鉛線の長さハ則ち此各點の標高なり

點を寫圖する事

(第二圖)空際のAの一點ハ其水平影aと此點より一定せる

第二圖



水平面MNまての距離を標せる所のAaの標高とに依て寫圖せるなり

水平影と空際とに於ける一點の占位すへき直立線を知らしむるのみにして標高をもて全く此直立線中Aの一點の位置を定むるなり設使はaの畫形影の傍に於て12の標高を記るす時は此Aaの直立線中の一點の位置を定むる為めにも唯aの點より起り此直立線中に於て12mを取るも可なり

同一畫形影を有てる種々の點

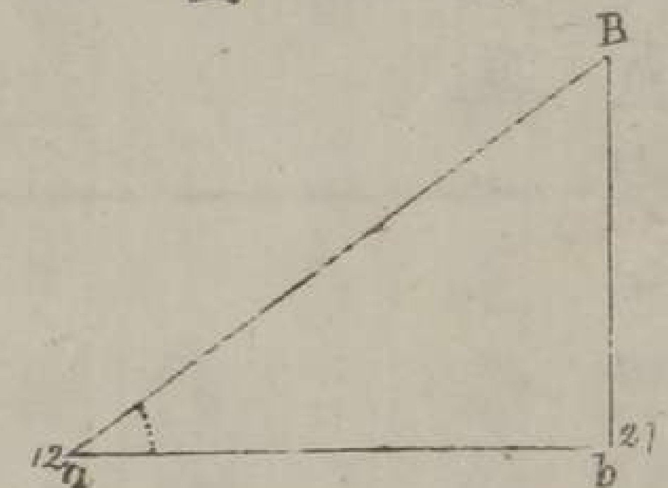
同一直立線中に於て同一畫形影を有てる數個の點を注意し其全點を標示せんと欲する時は其單影の傍に於て其寫影すへき點數丈けの標高を記るすへし而して其最大なる

標高は其最高點に應せるなり

直線を寫圖する事

直線は其畫形影及ひ其二點の標高に依て寫圖せるなり空際の直線は確定せる二點を有てる故直線は三點を以て精密に決定せる事を得へし

第三圖



故に(第三圖)設使は直線の二點の畫形影a及ひbを12及ひ21と標高せる者とす而してa點を以てb點に聯接せる時は此直線の畫形影を得へし是れ即ち此寫影せる水平面と此直線を過ぐる直立面との交線なり此水平影abは此直線を函むへき直立面を決定する者にして已知の兩標高を以て全く此直立面中直線

の位置を定むるなり

圖の紙面の廣狭不十分なるを以て各水平影を皆或ハ一定の梯尺に減縮せり然れとも其各標高ハ皆真數を記るす

直線の真長

直線の両端12及ひ21と標高せる者の水平影をabとなし12と標高せる最低點を過ぐる水平面上に於てabを樞鈕となし此直線を投影する直立面を折り反へして之を重ぬる時ハaの點ハ止つて動かす而してbに寫影せる一點を両端の標高差即ち圖の梯尺に於て $bB=9^m$ の距離に於てabの直線の垂線中に重ぬるへし今又aBを聯接せる時ハ此直線ハ即ちabの畫形影を底としbBの標高差を高さとせる直三角形の斜邊にして其真長を以て重ぬるへし故に圖の梯尺に於てabを測り設使ハ22^mに等しとせハa及ひbに於て寫影せる二點を聯接したる空際の直線の真長に於てハ

$$aB=\sqrt{22^2+9^2}$$

を得るなり

直線の傾斜角

直線の水平との傾斜角即ち其水平面とにて成す所の角を直線の傾斜角と名く此角ハ此直線其水平影或ハ此影の平行線とにて成す所の角を以て測る事幾何學に於て已に知るか如し故に(第三圖)同し梯尺を以て底及ひ高さを測定せれハabに寫影せる直線の傾斜角をBabなり

直線の傾斜

直線の水平とにて成す傾斜角の正切を此直線の傾斜と名

く（第三圖）baB の直三角形に於て此直線の水平とにて成す所の鋭角 Bab の正切は其對邊と傍邊の比 $\frac{Bb}{ab}$ 即ち其標高差と畫形影との比に等し故に梯尺に於て値せざる ab を以て 22^{m} とそれを ab に寫影せる直線の傾斜を $\frac{9}{22}$ なる[illegible]し然る時は之を其直線 $\frac{9}{22}$ に於て傾くといふなり而して高さ即ち標高差を底即ち畫形影が $\frac{9}{22}$ にして底を高さの $\frac{22}{9}$ なりといふも意なり此傾斜を知る時は已知高即ち標高差に應ずる底即ち畫形影を求め得へし而して又之を反言すへし

此傾斜をして常に一を分子とする分數に化し得へし故に此傾斜設使は $\frac{9}{22}$ なる時は

$$\frac{9}{22}=\frac{1}{\frac{22}{9}}=\frac{1}{2,44}$$

を得へし

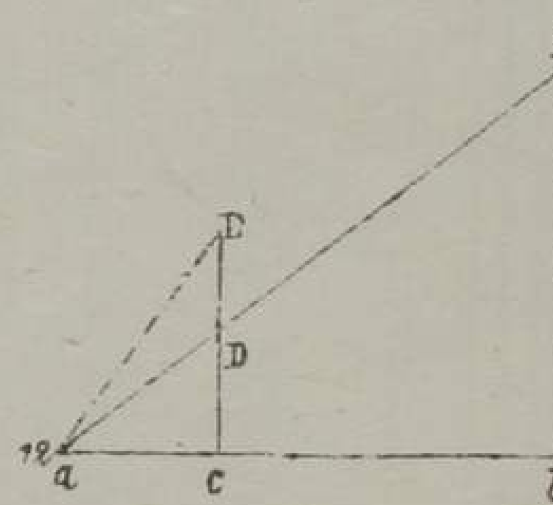
直線水平或は直立なる所の場合

水平線は其畫形影及び此線を函む所の水平面の標高即ち其畫形影の兩端に記せざる標高に依て寫圖せるなり此時た其真長は其畫形影に等し又直立線は其畫形影即ち其線の水平面に交はる單點に依て寫畫せるなり而して其各點中或る二個の距離は標高差に依て之を知るなり

空際に於て三點一直線中に在る所の性質

（第四圖）空際に於て三點一直線中に在り而して a b c に於て寫影せざる者と考る時は此各點を聯接せざる直線を以て最低點を過くる水平面上に重ぬる時は c 及び b に寫影せる二點は D 及び B に於て重なるへし而して Dac 及び Bab の相似

第四圖

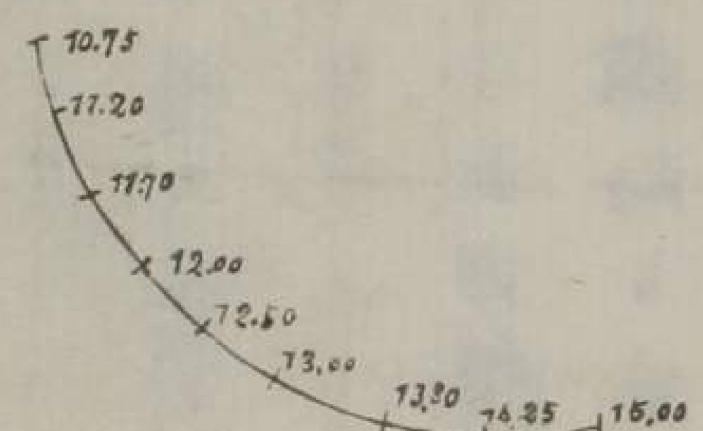


三角形に於て $\frac{Dc}{ac}=\frac{Bb}{ab}$ の比例式を得然るにDCをaに寫影する點とcに寫影する點の標高差にして又Bbをbに寫影する點とaに寫影せる點の標高差なり故に空際に於て三點一直線中に在る時は其各標高差は其各畫形影の距離と比例するなり又之を反言して同じ直線中に寫影せる三點即ち同じ直立面中に在る三點に於て若し此性質に合する時は此三點を空際に於て一直線中に在るなり其故は若し此三點を函める直立面を以てabを樞鉸の如くにして最低點を過ぐる水平面上に重ね而して第四畫の如くc及びbに寫影せし各點をD'及びBに於て重りたりとすれば設想に依て $\frac{D'c}{ac}=\frac{Bb}{ab}$ を得る故D'ac及びBabの三角形は比例せる二邊の間に等角を有てる故相似形なり而して $\angle D'ac=\angle Bab$ にしてD'點を全くD點にしてaBの直線中に占位すべき者なり

曲線を寫圖する事

曲線を直線の如く其水平影に依て寫圖する事なり但し(第五畫)曲線の一點より一點まで直線と一様になるべき爲めに十分接近せる諸點若干個の標高を得るを要す故に極多邊數の多角形を以て此曲線に代用すべし而して設問中曲線に關せる者は直線

第五圖



の設問ニ導クヘシ今若シ此寫圖ヲ導クヘキ曲線或ハ水平面上ニ在ル時ハ其畫形影及ヒ此面ノ同標高ヲ以テ全ク之ヲ寫圖スルニ足レリ

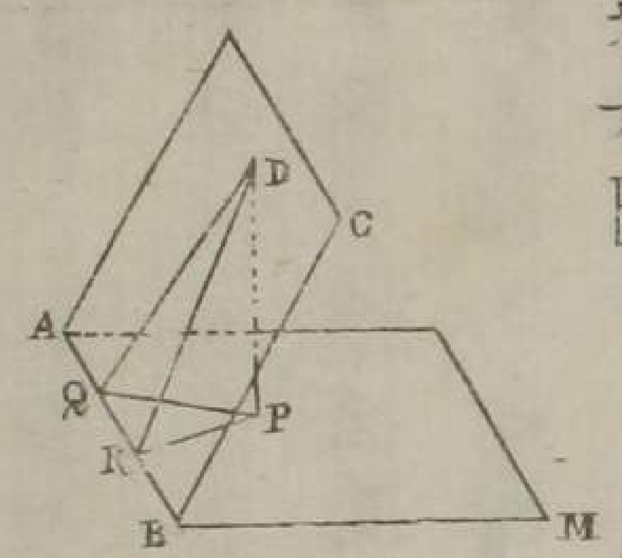
曲線ハ平面曲線即チ其各點皆同シ平面上ニ在ルモノ及ヒ凹凸曲線即チ前ノ性質ニ適當セサル者ノ二種ニ區分ス幾何學ニ於テ曲線ヲ極小邊ノ無窮多角形トシテ考定セリ而シテ設クル所ノ一點ノ切線ハ此點ヲ一分トセル直線狀ナル一微分ヲ以テ雙方ニ引長セル者ニ異ナラス又此切線ニ直立セル凡テノ線ヲ以テ法線ト名ク

平面○水平線○最大傾斜線

(第六圖)平面ノ水平線ト名クハABノ直線ニ循テAMノ水平面ヲ截リサルABCノ某平面ニ於テ若シ此平面ヲ許多ノ水平面ニテ交截スルト考フレハ其許多ノ交線ハ皆ABト平行スルナリ而シテ之ヲABCノ平面ノ諸水平線ト名ク

平面中種々ノ點ヲ過キテ作レル各水平線トノ垂線ヲ此平面ノ最大傾斜線ト名ク

ABCノ平面中Dノ一點水平面中Pニ於テ寫影スルト考ヘ此平面中ABノ線トノ垂線PQヲ作リDQヲ聯接スル時ハ則チ水平線トノ垂線ヲ得ヘシ而シテ此DQハ即チ最大傾斜線ナリ



第六圖

蓋シ此平面中此ノ如ク作レル線ハ他ノ諸線ヨリ最大ナル傾斜ヲ有テルナリ設使ハ今PRニ於テ寫影スルDRノ某線ヲ作ル時ハDPQ及ヒDPRノ直三角形ニ於テ

$$\tan Q = \frac{DP}{PQ}$$

$$\tan R = \frac{DP}{PR}$$

は得而して此両分数は同し分子を有ち而して垂線PQは斜線PRより小なり故にDQの傾斜はDRの傾斜より大にしてQ角はR角より大なり

故に平面上を滑下する体即ち水滴の如き者は常に此最大傾斜線に循て流下するなり

水平と平面との角

最大傾斜線と其畫形影とにて成す角は即ち水平面とABCの平面との角を測る者なり蓋し此角はABの交線に於て両平面上に作れる各垂線にて成れる者なり故に平面の傾斜は即ち其面の最大傾斜線の傾斜に等し

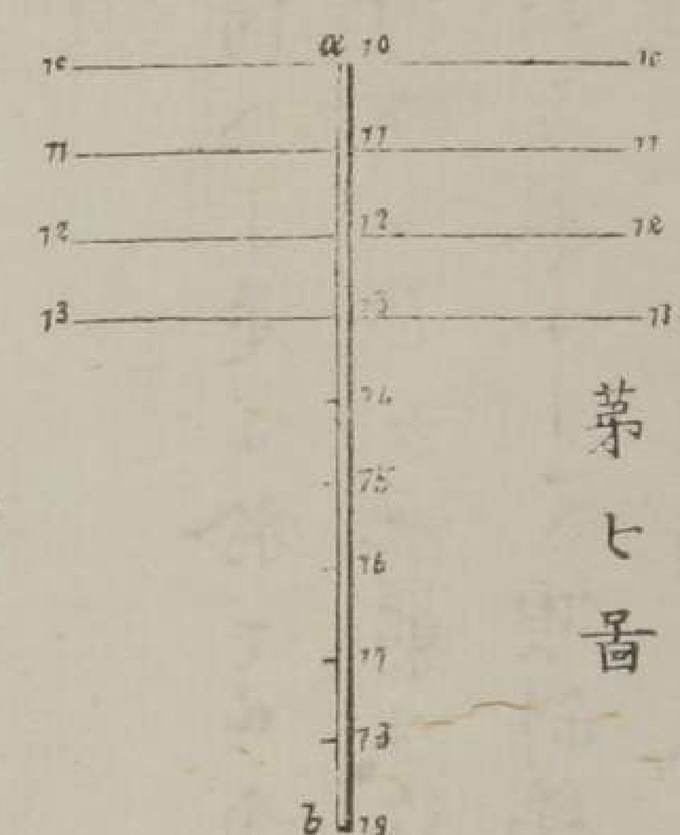
水平線の畫形影及ひ最大傾斜線の畫形影に於ける関係

前に経見せる如く最大傾斜線の畫形影PQはABに直立する故凡そ各最大傾斜線の畫形影は皆PQと平行し而して此平面のABの水平跡と平行せる各水平線の畫形影に直立す

平面を寫圖する事○等距水平線○傾斜梯尺

二個の平行線は平面の位置を決定する故若し二個或は数個の水平線の標高及ひ其畫形影を得る時は此平面は則ち寫圖する事を得へし然れとも諸平行線及ひ諸水平線の連列は必すしも同し平面中に在らさるを注意すへし故に此諸線の同し平面中に在る為めには其諸線同し直線に依着するを要す而して此の如き性質は其水平影の距離其標高差と比例する時に於て成るへし此の如くせんには其各畫形影を等距離に作り又之を等距離の諸平面上に在りて其

各標高を等差級数を成せる者と定め而して圖に於てハ此平面の各水平線を多く整数を以て一米突毎に標高せるなり(第七圖)平面の各水平線の方向に直立せる直線abを作り此最大傾斜線の畫形影中に諸點を設く但し此諸點ハ各水平線の畫形影にて此abを截る所の點にして其各點ハ之か標高せるなり然る時ハ此abの直線を以て平面の傾斜梯尺と名く此梯尺ハ平面を寫圖する為めに十分なる者なり其故ハ此諸點に並線を作くる時ハ隨意に若干数の水平線を求め得へけれハなり此傾斜梯尺ハ其名称の如く直に平面の傾斜を定め得へし設使ハ若し二點の畫形影の距離をPとし其標高差をdとすれハ此直線の傾斜ハ$\frac{d}{P}$にして前に經見せし如く平面の傾斜と全く相等し故に幾何學に依りdを高さとしP弦底とせる直三角形を作り以て平面と水平との傾斜を得へし又此平面の傾斜梯尺を細線を以て之を記るし其傍に於て標高の分畫を記るす而して通常他の粗線を以て之と並へ以て通常の直線と混せさらしむ但し其方向を一定し其位置を隨意なるへし



第七圖

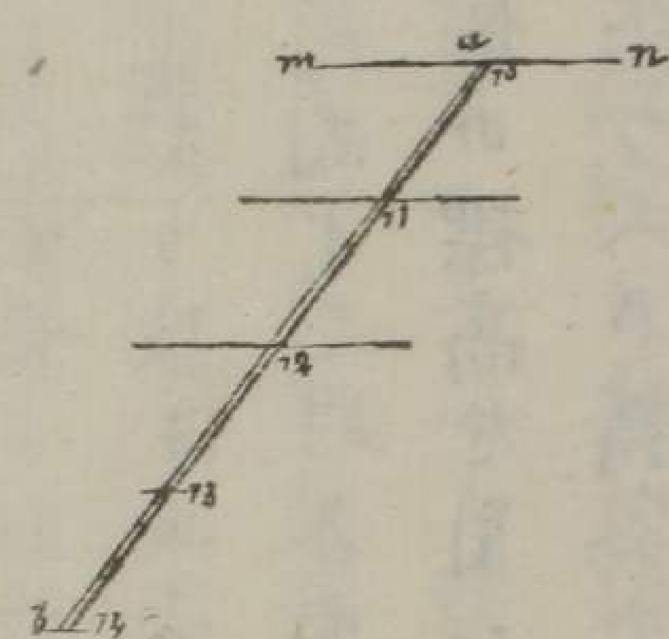
前二法中此或ハ彼を用ゆる所の場合

平面を寫圖する二法を前已に經見せり即ち一を其諸水平線に依り一を其傾斜梯尺に依る者なり實用に於てハ其場合に從ひ此二法中此或ハ彼を用ゆ蓋し其實同一に歸すれハなり

水平面及び垂直面

平面の傾斜梯尺を二個の水平線其標高逐次の整數なる者の各畫形影の間隔を知らしむ故に若しpを以て其間隔となしαを以て此平面水平面とにて成す角とすれは $\tan\alpha = \frac{1}{p}$ を得へし是に於てα角零に近減少すれは其正切も零となり此時はpも無窮に近増大すへし故に水平面に於ては其傾斜を零にして傾斜梯尺を無窮なるへし而して凡そ水平面は單に其標高に依て寫影するなり又若し之に反してα角90°に近増大すれは其正切も無窮となり而してpは零に近減少すへし故に凡そ垂直面に於ては其傾斜を無窮にして其傾斜梯尺は零なり故に垂直面は單に其水平跡に依て寫圖せらるゝなり而して此水平跡は其垂直面を全く決定するに足れる者なり

第八圖



平面殆と垂直なる時は其傾斜梯尺の分畫甚た小なり此時は（第八圖）水平線中の一個mn及び適宜に採擇せるabの如き他の某線とに依て寫畫せるなり而して此某線中整數を以て標高せる諸點に於てmnに平行せる諸線を作り以て各水平線を求め得へし此abの直線を又斜傾斜梯尺と名く

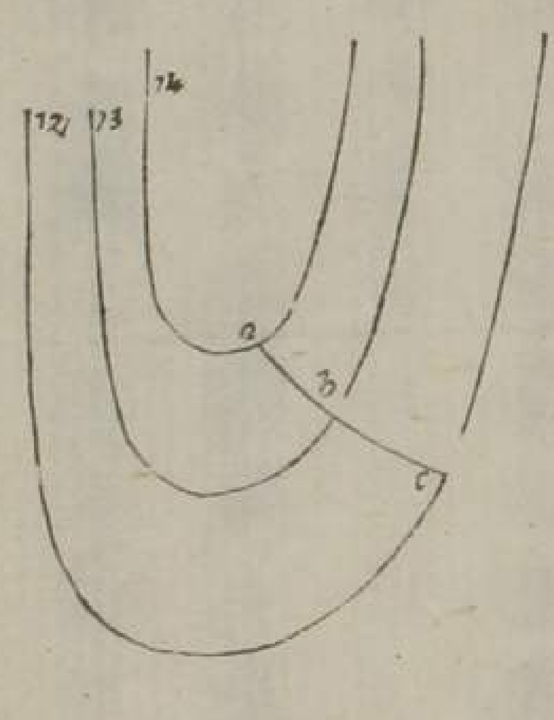
地理圖學表面を寫圖する事

土地の表面或は之に等しき表面即ち其成立の法未知にし

て垂直線通常只一點のみに交はる者を地理圖學表面と名
く
幾何學上の定說に適當すへからざる表面を寫圖するには
其表面を垂直の方向に於て等距離なる水平面の若干層に
平截し其表面と此許多の水平面との交線を以て圖上に寫
影するなり故に此表面の水平線と名くる所の若干個の曲
線を得而して此各曲線中の諸點を全く決定せる爲めには
只一個の標高を用ひて足れりとす而して此表面の性質又
は其係つへき精密の度に從ひ多少接近せる水平線の數に
於て其要する丈けの數を取り以て之を集むるなり此集合
せる者を即ち十分なる法に依て此表面の形狀を寫圖せし
者と考へ得るなり

土地の表面を寫圖する事

前法を以て土地の表面を寫圖する事に活用せんとするに
は先つ其畫形影と其標高とに依て此表面の一點を得るを
始とす設使を今一點の畫形影なれ標高を12とす是に於て
水準測量の方法に依て地上に於て同し高さ即ち12と標高
をへき凡ての點を決定し此諸點の集合に依て連續せる曲
線を作る是を即ち設くる所の標高12
の水平面と地面との交線なり故に若
し地上に於て此曲線を精密に測り
後面上に於て其畫形影を畫くに（第
九圖）此曲線中聯接すへき諸點を決す
る爲めに只12の標高を記るすを以て



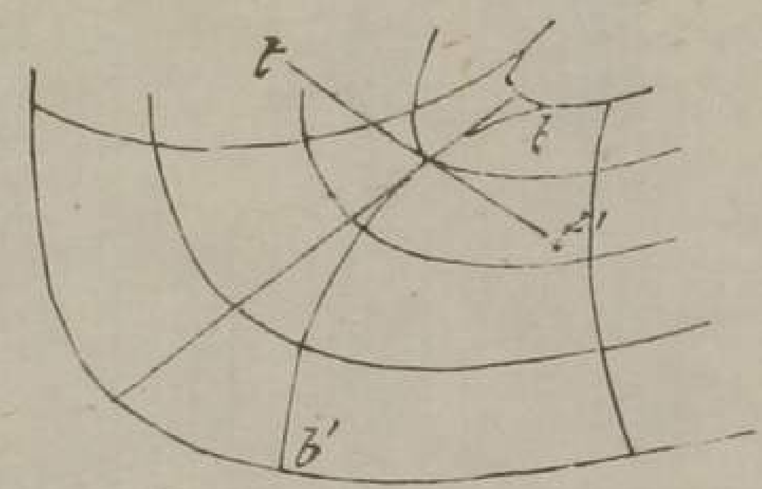
第九圖

足れりとす若し又此第一曲線の傍に於て同し法を以て此地面と或る水平面との交線にて成りたる第二曲線を置く時は則ち又諸點の第二連列を得へし是れ亦只一個の標高を要するのミ

土地の性質及ひ其違せんと欲する精密の度に從ひ多少接近せる曲線に於て其要する丈けの數を集合するなり

等距離に於ける各曲線の畫形影の間隔は地面傾斜の強きに從て減少する故諸水平面を垂直に分界する所の等距離即ち常に米突を以て標示せる距離は寫圖すへき土地の性質に從て變せさるへからす故に其傾斜急なる時は其距離をして大ならしむへし又傾斜緩なる地に於ては之を減少すへし蓋し此時は兩曲線の中間に函める球分面の畫形影を最大の間を有てるなり

第十圖



最大傾斜線

某表面上に於て其一點を過くる某線の一微分と水平とにて成せる角若し此同し點を過くる他の諸線の微分と水平とにて成せる角より最大なる時は之を最大傾斜線と名く

故に土地の最大傾斜線は平面の最大傾斜線と相等し而して同し性質を有つものなり故に此表面の最大傾斜線の畫形影は其通過せる水平曲線に直立せるなり即ち(第十圖)最大傾斜線に切線なるbb'は水平曲線に切線なる線に直角なり

最大傾斜線ハ地上ニ流下スル水滴ノ随行セル線ナリ
此最大傾斜線ハ地理圖學ニ於テ緊要ナル者ナリ其故ハ若シ此線ヲ定ムル時ハ水平曲線ヲ作ル事ヲ得レハナリ

第二教

直線ノ設問

設クル所ノ直線中某點ノ畫形影ヲ知テ此點ノ標高ヲ求ム

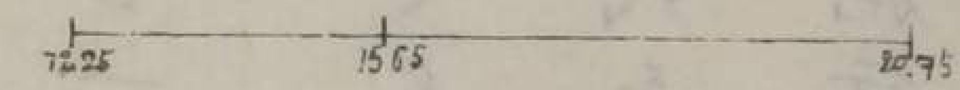
數上ノ答解（第十一圖）直線ノ畫形影ヲabトシ其諸點中二個ノ標高ヲ12,25 20,75トシ此直線中他ノ一點設使ハcニ於テ寫影スル點ノ標高ヲ求メントハ此cニ寫影スル一點ノ標高ヲ此點トa或ハbノ設クル所ノ二點中ノ一個トノ標高差ヲ知ル時ハ決定スル事明ナリ然ルニ前ニ経見スル如ク若シ空際ノ諸點一直線中ニ在ル時ハ其標高差ハ其畫形影ノ距離ト比例スルナリ而シテ設クル所ノ二點ノ標高差ハ8,50ナル故若シaニ於テ寫影スル點トcニ寫影スル點ノ標高差ヲxトスレハ

$$\frac{x}{8.50}=\frac{ac}{ab}$$

ノ比例式ヲ得而シテac及ヒabノ長サヲ圖ノ擬尺ニ於テ測リ知ルヘシ設使ハ今

$ac=24^{m},15$ 及ヒ $ab=60^{m},45$ トスレ

第十一圖



ゟ比例式

$$\frac{x}{8,50}=\frac{24,15}{60,45}$$

となる是れより

$$x=\frac{24,15\times 8,50}{60,45}=8^m,40$$

を得るなり故に今設くる所の一點cの位置に依れば340を以て12,25に加ふれば可なり因てcに寫影せる一點の標高に於ては$15^m,65$を得るなり比例式を作る事の代りに下の如く口唱し一に化せる法に依て施行し得へし即ち$60^m,45$の畫形影に於ては其標高差は$8^m,50$なり1^mの畫形影に於ては其標高差は$\frac{8,50}{60,45}$なるへし又$24^m,15$の畫形影に於ては則ち

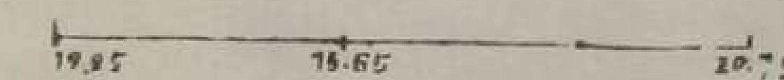
$$\frac{8,50\times 2415}{60,45}=3^m,40$$

なるへし

設くる所の直線中の一點の標高を知て其畫形影を求む

一直線あり其畫形影と其諸點中の二個の標高に依て設けらる、時は前に反對し此直線中他の一點の標高を知りて其畫形影を求め得へし即ち(第十一圖)abの設くる所の線中に於て15,65と標高せる一點の畫形影cを求むるにa或ゟも

の設くる所の點との距離を知る時は則ち之を决定



し得へし今acの未知距離をxとすれは此xを求むる為めに

$$\frac{x}{ab}=\frac{15,65-12,25}{20,75-12,25}$$

即ち

$$\frac{x}{60,45}=\frac{3,40}{8,50}$$

の比例式を得へし是れより

$$x=\frac{3,40\times 60,45}{8,50}=24^{m}.15$$

を得るなり是ニ於て圖の梯尺ニ依り$ac=24^{m}.15$とすれは$15,65$と標高セヌ一點の畫形影をcニ於て得へし

又下の如く口唱し得へし即ち標高差$8^{m},50$ニ於てを$60^{m},45$の畫形影を得標高差1^{m}ニ於ては則ち$\frac{60,45}{8,50}$なるへし而して標高差$3^{m},40$ニ於ては則ち

$$\frac{60,45\times 3,40}{8,50}=24^{m}.15$$

の畫形影を得へし

直線の水平跡

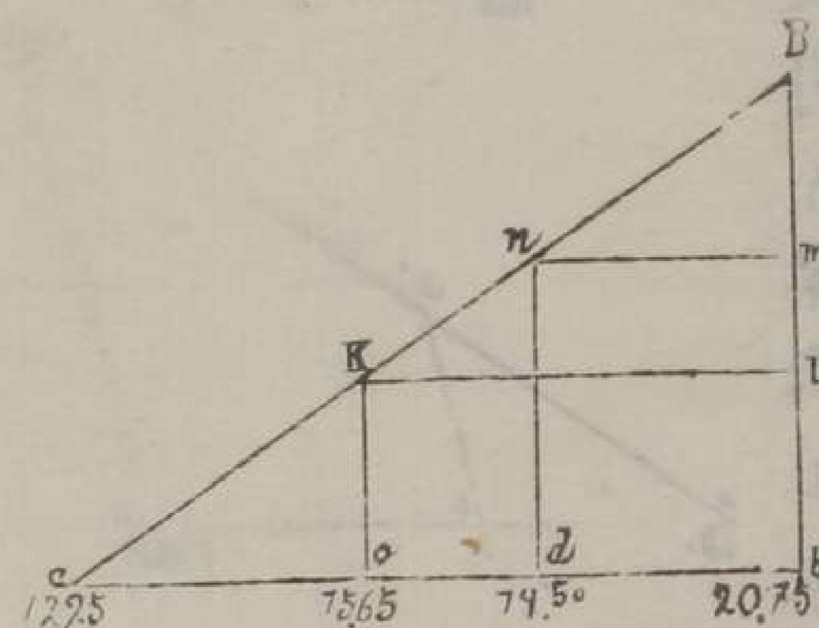
前法ニ依リ直線中零と標高セヌ一點の畫形影を求め先以て

設くる所の直線の比較水平面上に於ける跡を得へし
前の設問を實用に於て數々用ゆる者なるか故猶圖上にても如何に答解し得へきやを指示せへし但し圖上の答解を數の計算より不精密なりといへとも亦水平影を測り知る事を省略せへし

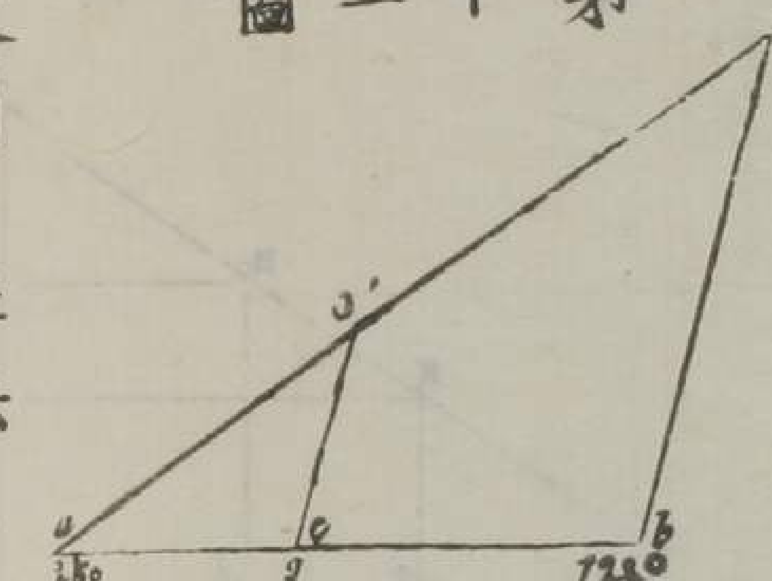
第一圖上の答解

ab の畫形影と其諸點中二個の標高に依て設けられたる直線中に於て c を畫形影とせる一點の標高を求むるに（第十二圖）此直線を以て零と標高せる比較水平面又た他の水平面上に重るなり設使を 12,25 と標高せる平面即ち設くる所の諸點中最低點を過くる所の平面に重ぬる時には a に寫影せる點を止て動かすときは寫影する點即ち $8^{m},50$ 丈け高き所の者を畫の梯尺に於て $bB=8^{m},50$ の距離に於て ab 上に建てたる此線中に重なるへし而して設くる所の直線を aB 上に重なり c に寫影する點を K に至るへし故に此重なりたる斷面の梯尺にて測定せる Ko 即ち bl を a に寫影する點と c に寫影する點との標高差を標示する者なり又之に反して設使を若し此直線中 $17^{m},50$ と標高せる一點の畫形影を求むる時を此點を a 點の上 $5^{m},25$ の處に在る故 $bm=5^{m},25$ にされを可なり而して mn の平行線を

第十二圖

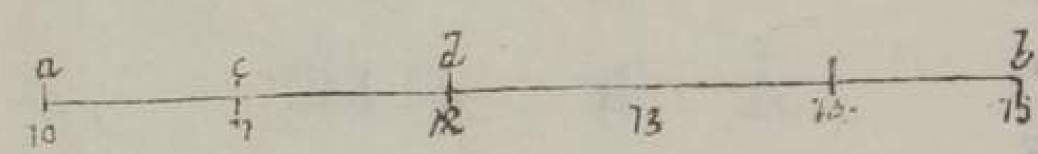


則ち此直線中設くる所の標高を有てるの點を決定し得へし而して其畫形影をaに在るなり
第二圖上の答解
（第十三圖）abを一直線の畫形影として其端界の標高を8,50及ひ12,80なり

第十三圖


今9と標高せる畫形影を求めんとす而して設使もcを其畫形影とせる時もac及ひcbの距離を9−8,50即ち0,50及ひ12,80−9即ち3,8,0の標高差に比例をへき者なり故に幾何學設問の解法に依りabの一線を設くる所の二數即ち0,50或は3,80或は38に比例せる各分に分てるを可なり

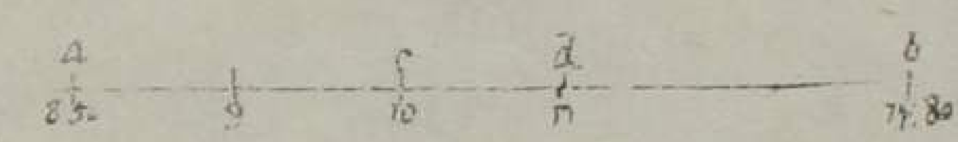
設くる所の直線中整數にて標高せる點の畫形影を求む

第十四圖


（第十四圖）abの畫形影と其諸點中a及ひbの二點の標高とに依て設けられたる直線なり此標高整數なれは則ち此abの畫形影を此標高差の內に函めたる一の個數に等しく等分せへし然る時はcd等の分點を即ち此直線中整數にて標高せる諸點の畫形影なる事明らかなり其故を元來$ac=\frac{1}{5}ab$なる故にaに寫影せる點とcに寫影せる點の標高差を即ちa及ひbに寫影せる點の標高差の$\frac{1}{5}$即ち5^mの$\frac{1}{5}$にして1^m

なきをなり故にcは寫影せざる點を11と標高せへし又同法に依てd等は寫影せる點を12等と標高せへし又此分隅をabの左右に伸す時は此直線中整數にて標高せざ凡ての點を得へし若し（第十五圖）設くざ所の點分數の標高を有つときは前に説明せし法に依て其整數の標高を有てざ二點の畫形影を求むへし然る時は今論説せし場合に皈するなり

第十五圖



直線の水平との傾斜の正切

直線の傾斜は水平と直線の傾斜角の正切なり正切は二點の標高差と此二點の畫形影の距離との比に等しき故（第十五圖）水平と直線とにて成す傾斜をαとする時即ち

$$\tan g\alpha = \frac{12,80-8,50}{ab}$$

なり若し逐次整數の標高の二点を用ゆる時設使をcの標高を10としdの標高を11とする時を

$$\tan g\alpha = \frac{1}{cd}$$

なり

故に若し畫の梯尺に於て測定せるcdを設使を6^mに等しとすれる此直線る則ち$\frac{1}{6}$に於て傾斜するなり而して6^mを底とし1^mを高さとせる直三角形を作り以て此傾斜角を得るなり

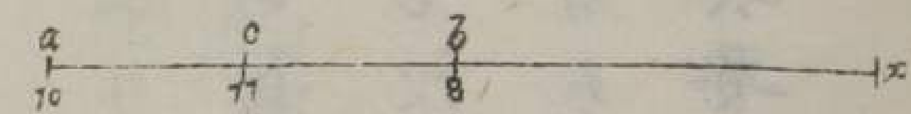
此直線水平なる時や正切も零となりcdの傾斜梯尺も無窮

となる又之に反して若し直線直立なるときは $\tan y\alpha$ は無窮となり $c\alpha$ は零となる又 $c\alpha = 1$ なる時は直線を $\frac{1}{1}$ に於て傾斜し而して $\alpha = 45^{\circ}$ なり

画形影並に其諸点中一個の標高及ひ其水平との傾斜を知れる直線あり此直線中整数を以て標高せる諸点を求む

第十六圖不定の画形影 ax 及ひ α に寫影する一点の標高10並に傾斜 $\frac{2}{5}$ を知る所の直線あり此直線中整数を以て標高せる諸点を求む

第十六圖



元来此直線を $\frac{2}{5}$ に於て傾斜せる故若し a より起り梯尺に於て $ab=5^m$ とする時は a 及ひ b に於て寫影する二点は二米突の標高差を有つへし故に b 点は直線の昇降に従て12或は8と標高すへし

a に寫影する一点の標高は是迄整数と設想すれとも今又之を 10^m25 と定め而して上昇直線に於て0,75丈け高き所の11と標高せる一点の画形影を求めんとする時は設くる所の傾斜即ち

$$\frac{2}{5}=\frac{1}{2,50}$$

は又

$$\frac{0,75}{2,50\times 0,75}=\frac{0,75}{1,87}$$

の形に変し得る事を注意

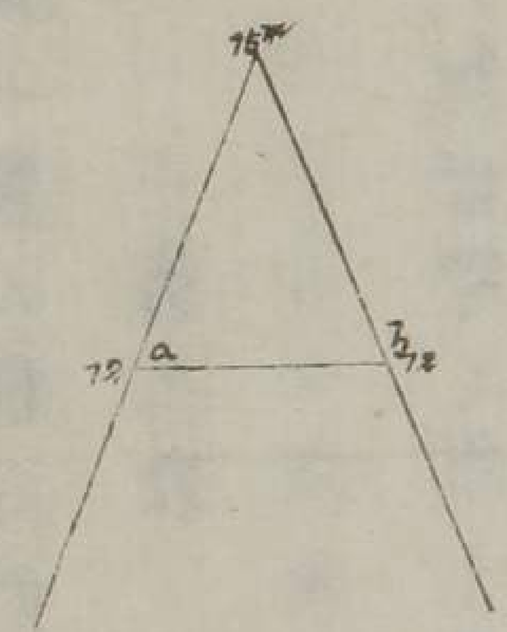
すへし故ニ若しa点より起り梯尺ニ於て1^m87ニ等しき距離を取る時ハ即ち11と標高せる一点の画形影を得へし又此画形影より起りて2^m50ニ等しき距離を取る時ハ則ち12と標高せる点の画形影を得へし餘之ニ倣ふ

注意

前法ハ亦画形影及ひ其諸点中二個の標高ニ依て設けられたる直線ニ活用すへき叓を注意すへし即ち画形影を以て除したる標高差ハ傾斜を知らしめ此分數を適宜ニ變形する者ハ前ニ行ひし如く此直線中整數ニて標高せる諸点ニ於て其要する丈けの画形影を決定し得へし

二直線の交截○二直線同し平面中ニ在るかを知る法

第十七圖am及ひbmの二直線の畫形影mの一點ニ於て交截せる時ハ空際の二直線必らす相交截し或ハ此線他の線の上方ニ在るへし若し相交截せる時ハ同し平面中ニ在るなり故ニ若し此二直線中の諸點互ニ同標高を有てる者を二個つゝ聯接すれハ此聯線ハ即ち此平面の水平線ニして必らす相平行すへし故ニ此性質の全たからさる時ハ則ち此二直線ハ同し平面中ニ在らさる事を決定すへし又二個の畫形影ニ於てmの一點の標高ハ査得し以て此線他線の上方若干の處ニ在るやを求め得へし又二直線相交截せる時ハm點ニ於



第十七圖

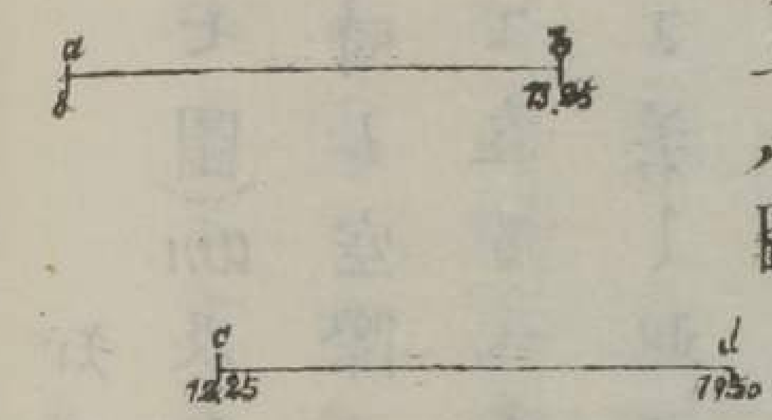
けゟ一樣の標高ハ即ち其交點の標高なり

第三款

一點を過ぎ設る所の直線ニ平行線を作る事

二直線空際ニ於て平行する時ハ此二直線を投影する二平面も亦相平行す而して此二直線ノ畫形影ハ此二平面と水平面との交線ニして亦相平行す

第十八圖



又此平行線の各標高ハ同し方向ニ於て増加し而して水平上同方向且つ等傾斜なる故等しき標高差ハ等しき長サの畫形影ニ應すへし故ニ(第十八圖)cニ寫影する一點を過ぎてabニ寫影する直線と平行する直線を作らんとするときハcdをしてabニ等しく且つ平行ならしめ而してd點の標高をしてa及びbの二點の標高差をc點の標高ニ加へさる者ニ等しからしむれハ可なり即ち全く其平行線を決定する者なり

諸平面の設問

設くる所の平面の諸點中畫形影を知りて一點の標高を求む

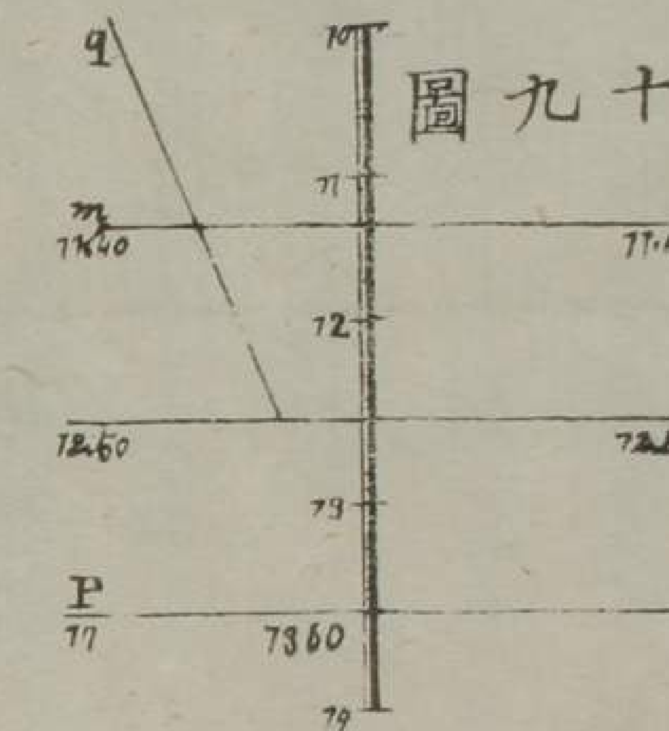
平面ハ其傾斜梯尺或ハ二個の水平線又ハ三點ニ依て知らしむる事を得るなり

第一の場合(第十九圖)平面其傾斜梯尺ニ依て設けられる時此平面中mの畫形影を知れる一點の標高を求むるニハ此m點を過ぎて此傾斜梯尺ニ直立せるmiの線を作きて可なり此m點の標高ハ即ちi點の標高ニ等ふして殆と

11m,40

なるへし又之に反して平面中設くる所の標高設使を12,50を有て凡ての點の畫形影を求むるなれは此傾斜梯尺に於て12,50と標高すへき所の點に垂線を作るへし此水平線中の諸點は皆此問に答ふへき者なり

第十九圖



若し或は一點pの畫形影を17の標高に依て設けられしならは時は此平面に關係して此點の位置を知る事容易なるへし即ち此p點を過きて平面の諸水平線と平行せる水平線を作る時は此水平線は平面中同し畫形影を有てる水平線の上方3m,40の處を過くる事知るへし故に此點は即ち平面の上方3m,40の處にあるなり

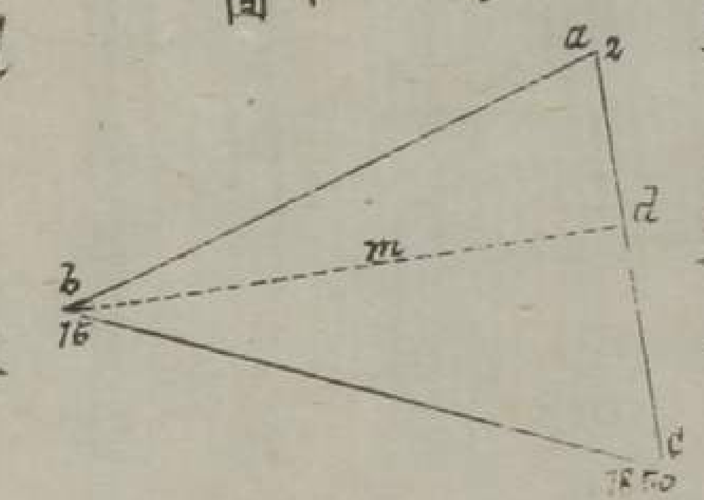
第二の場合　平面一個の水平線設使を11,40及ひ12,50に依て設けられたる時此平面中qに於て寫影する一點の標高を求むるには此点を道きて設くる所の二個の水平線に交るへき某直線を作るなり然る時は此直線は既に其二交点の標高を知れり因て前に説明せる法に從ひ此q点の標高を求むる事容易なるへし而して設くる所の標高に於ける某水平線の畫形影を求むるには水平線の畫形影の距離を其標高差と比例する原理に據るへし

又q点を過きて水平線に垂線を作くる時は前の場合に倣

す蓋し此線ハ最大傾斜線なれハなり

第三の場合（第二十圖）平面abcに於て寫影する三点に依て設けられたる時此平面中mの画形影を知れる一点の標高を求むるにハ此m点を以てabcの三角形の一角頂に聯接すへし而してacの直線中に於てd点の標高を決定し然る後bdの直線中に於てm点を標高する事容易なるへし

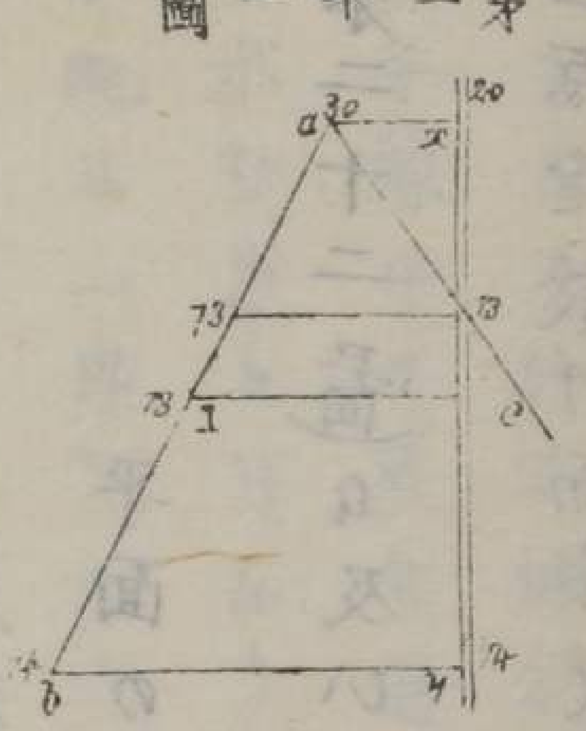
第二十圖



三点を知て傾斜梯尺を求む

（第二十一圖）abcに於て寫影する三点を知る時此三点を過くる平面の傾斜梯尺を求むるにハ先つ此平面の水平線を決定すへし此の如くせんにハ設くる所の三点中或る二個を聯接すへし但し最高点を最低点に聯接するを佳とす

第二十一圖

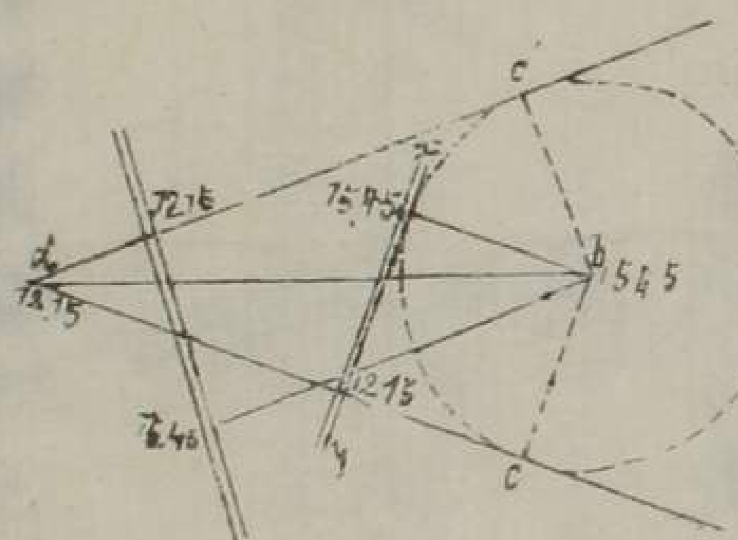


其故ハabの線中に於て之を引長する事なく第三点cと等標高のI点を求むる事を得れハなり然る時ハcIの直線ハ求むる所の平面中17と標高せる水平線なり此水平線に直立せるxyの直線ハ傾斜梯尺の方向を知らしむる者なり而して此平面中ax及ひbyの二個の水平線を知る故其要する丈けの点を梯尺上に標高し得へし若し又設くる所の諸点の標高奇零數を有つ時ハ亦同法を以てすへし只ab線上に於て整數標高の二点を求め之を傾斜梯尺上に寫影するを要す此の如くせんにハ亦acの線中に於て最初の二点と等標高を有てる他の二点を求むへし而して之を適當の順序に聯接し以て設くる所の平面

に於ける整数標高の二個の水平線を得るなり
若し二個の平行線或ハ交截線又ハ一点と一直線を過くる平面の傾斜梯尺を求めんと欲する時ハ前方を活用すへし
若し設くる所の一点を過きて設くる所の二直線と平行する平面を作る事を要する時ハ此点を過きて互に設くる所の二直線と平行せる二線を作るへし此二平行線に依て決定せる平面を即ち直に此問に合する者なり

二点及ひ其水平との傾斜に依て設けられたる平面の傾斜梯尺を求む

第二十二圖 a及ひbの画形影と 12,15 及ひ 15,45 の標高とに依て二点を設け而して此二点を拼接せる直線を過き且つ設使を $\frac{3}{8}$ に於て傾斜せる平面を作らんとす此間を此平面の水平線中a點を過くる者或ハb點を過くる者或ハ他の者を求むるを可なり今a點を過くる者を求めんとするに是れ既に一點を知りたる者故其第二點を求むれハ下なり而して是をb點を過くる最大傾斜線中に在る者なり今先つ



第二十二圖

假りにacをして求むる所の水平線と定めacに直立せる線bcを作る時ハ此bcを即ちb點を過くる最大傾斜線にしてc點ハ即ち求むる所の者なり又b點とc點の標高差ハ 8°30 にしてbcの直線ハ必ちすると $\frac{3}{8}$ に於て傾斜すへき者なる故高さハ底の $\frac{3}{8}$ にして此未知底bcハ高さ即

ち其標高差 3ᵐ.30 の $\frac{8}{3}$ なる事知るへし故に若しる點を以て

中心とし $R=\frac{3,30\times 8}{3}=8^{m},80$ の半徑を以て 12,15 と標高せる水平面中に圓周

を作る時はc點は即ち此圓周中に在り而して求むる所の
水平線は此圓周に切し且つbcの半徑に直立さへし而して
即ち此圓周中a點を過きて作れるacの切線なり己に此水
平線を知る時は則ち直にxyの最大傾斜線を決定し得へし
又此圓周にはac'の第二の切線を作る事を得へきか故に此
設問は通常二個の答解を得而して此二平面中何れを用ゆ
へきやを知る事容易なるへし

城寨の圖に於ては平面は二點及ひ水平との傾斜を以て定むる事屢々之れあり且つ此平面の水平線を作る事を要用とす是れ此平面と他の平面との交線を定むる為めなり

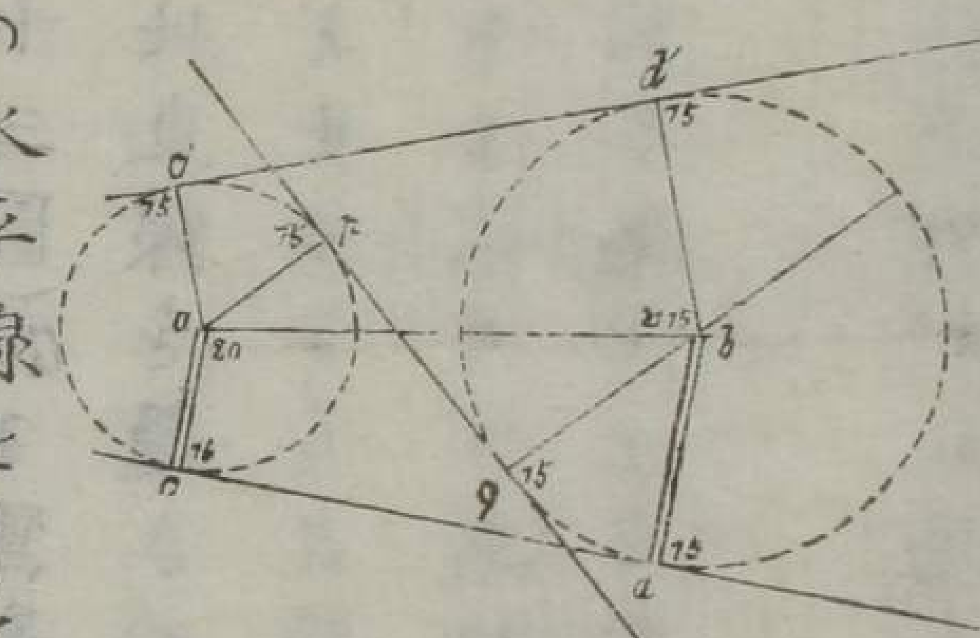
直線の傾斜極微少なる場合○此平面中の水平線を求むる法

(第二十三圖)abに寫影せる設くる所の直線極微少の傾斜なる時此直線を過きて設使は $\frac{1}{4}$ に於て傾斜せる平面を作らんとするにはa點を過くる水平線或はb點を過くる水平線をも求めす其故は此二點中の一個を中心として作れる圓周は極少の半徑を有ち精密の圖に適當せさるなり

此場合に於ては設くる所の標高に比較して最大なる差を

有つへき他の水平線を直ニ求むるなり設使ハ今15の標高の水平線を求むるニ先つ其二點を決定すへし但し此二點ハ此平面中a及びbの設くる所の點を過くる最大傾斜線中ニ在る者を求むへし

第二十三圖



今cdの水平線をして己ニ知る者となし之ニ二垂線ac及びbd即ち最大傾斜線を作る時ハac及びbdの未知距離を決定せる為めニ

$$ac=\frac{5\times4}{1}=20^m$$

$$bd=\frac{6,75\times4}{1}=27^m$$

を得へし故ニ若し15と標高せる水平面中ニ於てa及びbを中心とし梯尺を以て一ハ20^mを半径とし一ハ27^mを半径とし二個の圓周を作る時ハ求むる所の15の標高の水平線ハ此二圓周ニ切し而して両半径ニ直立すへし是れ即ち二圓周の公切線ニ異ならすcd及びc'd'の二個の外切線を作る時ハ此答解ニ於て二個の平面を得へし又pqの内切線ハ此問ニ適當せさる事明かなり其故ハap及びbqの二直線ハ此平面の最大傾斜線ニ非らす蓋し同方向ニ於て一ハ上升し一ハ下降すへきなり然れとも求むる所の水平線設くる所の標高の中間なる時設使ハa點の標高を20ニしてb點を0なる時ハpqの内切線を即ち求むる所の平面の15の標高の水平線なり而して此時ニ二個の答解ある事なし

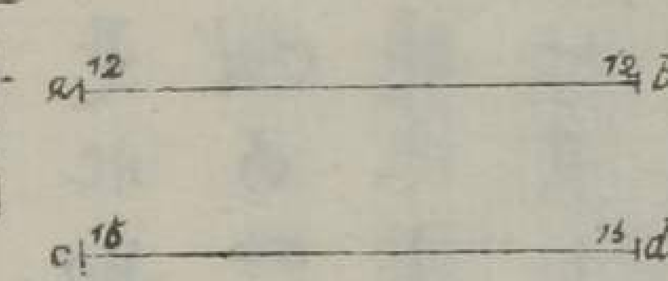
設くる所の直線水平なる所の場合

（第二十四圖）12と標高せる ab の水平線を過ぎて $\frac{3}{2}$ に於て傾斜せる降斜面を作り而して此降斜面と15と標高せる水平面との交線を求む此降斜面は $\frac{3}{2}$ に於て傾斜すへき者なりして二個の某水平線の標高差は其畫形影の $\frac{3}{2}$ なりして

其畫形影の距離は即ち標高差の $\frac{2}{3}$ なり

故に若し cd を ab と平行に作り其距離をして 3^m の $\frac{2}{3}$ 即ち 2^m ならしむる時は則ち此平面中15の標高の水平線を得るなり

第二十四圖



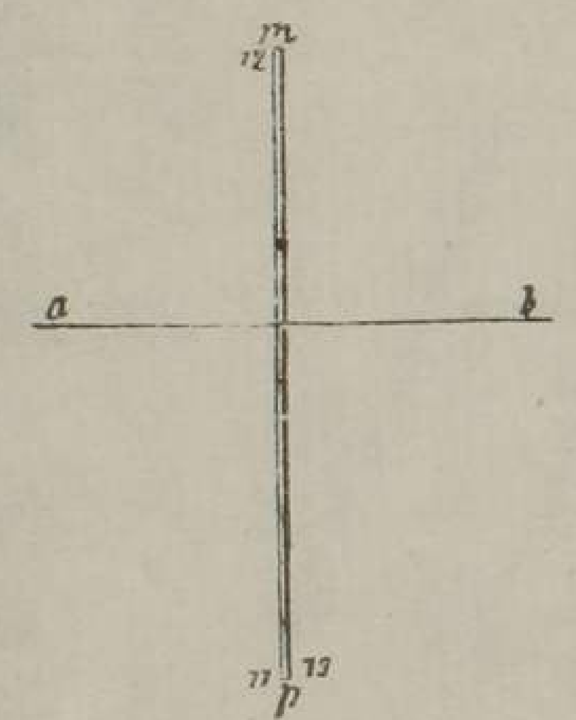
若し降斜面 $\frac{1}{1}$ 或は $\frac{2}{1}$ に於て傾斜する時二個の某水平線の畫形影の距離は第一の場合に於ては其標高差に等しく第二の場合に於ては其標高差の半に等し

平面の一點及ひ其水平との傾斜并に水平線の方向を知りて此平面の傾斜梯尺を求む

（第二十五圖）平面の一點の畫形影を m とし標高を12とす又其水平線の方向を ab とし其傾斜を設使は $\frac{1}{6}$ とす而して此平面の傾斜梯尺を求めんとす此設問は前問に異ならす即ち今 ab に直立せる mp を作る時は傾斜梯尺の方向を得へし而して此平面 $\frac{1}{6}$ に於て傾斜すへき故梯尺に於て

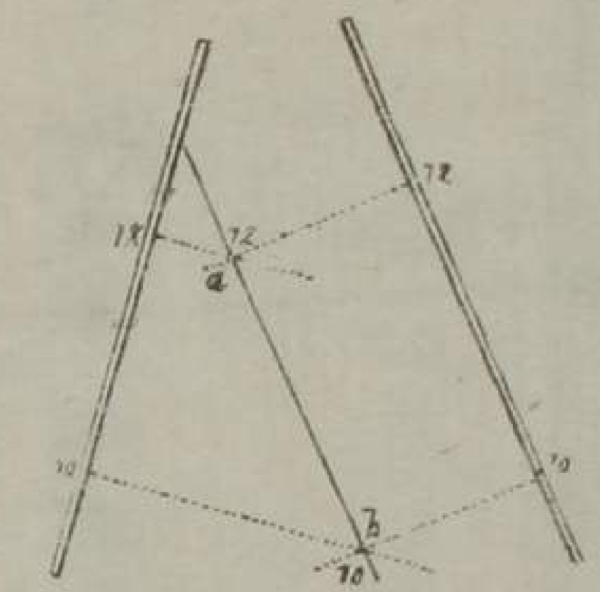
$$mp = 6^m$$

とせは p 點は即ち11或は13と標高をへし是は常に二個の答觧を有つ者なり



二平面の交線を求むる事

通常の法（第二十六圖）三個の平面を設けられたる者と定め12及ひ10の標高の水平面を以て此二平面を截断せるなり



此補助平面を12の水平線に循て二平面の各を截り而して此二平面中の二個の水平線を此二平面の交線中に在るa點に於て相交らしむるなり又10の標高の他の水平面を以て二個の平面を截る時は第二の交點bを得而して求むる所の交線は即ち此abなり

二平面の交線に於ける種々の場合　二平面の交線を求むる為めに前に指示する所の法は圖上に於て其平面を決定せへき已知件の如何に關係せさる者なり然れとも此法を活用する能はさる種々の場合を生する事とあり是は其二平面の各水平線平行なるか或は平行ならすして極鋭角を以て交はるへきか又は画面の紙面外に於て交はるへき時に在るなり此終り二種の場合に於て交線の一點を求めんとするには設くる所の二平面を他の水平ならさる補助平面に截り二平面との交線を求むるなり而して此二交線の交點は三平面中に在る故求むる所の交線中に在る事明らかなり又第二の補助平面を以て交線の他の一點を知らしむへし故に此の如く決定せる二點を聯接し以て求むる所の交線を得るなり但し此補助平面を採擇する事に就て設くる所の平面との交線を容易に得へき事に注意すへし又補助平面を通常設くる所の平面の水平線の如く標高せる

二個の平行直線に て決定し而して適宜の角を以て此水平線を截らしむへし若し已に畫上に於て他の目的を以て作れる平行線ありて其方向適宜なれハ更に便利を得る事あり

二平面の交線ハ三個の格段なる場合を有つ即ち其水平線畫上に於て適宜の角に交る者又此水平線平行なる者又畫の經界外に於て交る者此三個の場合の各に於て平面ハ常に其水平線にて設くるを佳とす其故ハ平面を最大傾斜線或ハ三点或ハ他の法にて設くる時此交線を求むるにハ此水平線を定むるより外更に容易なる事非さるか故なり

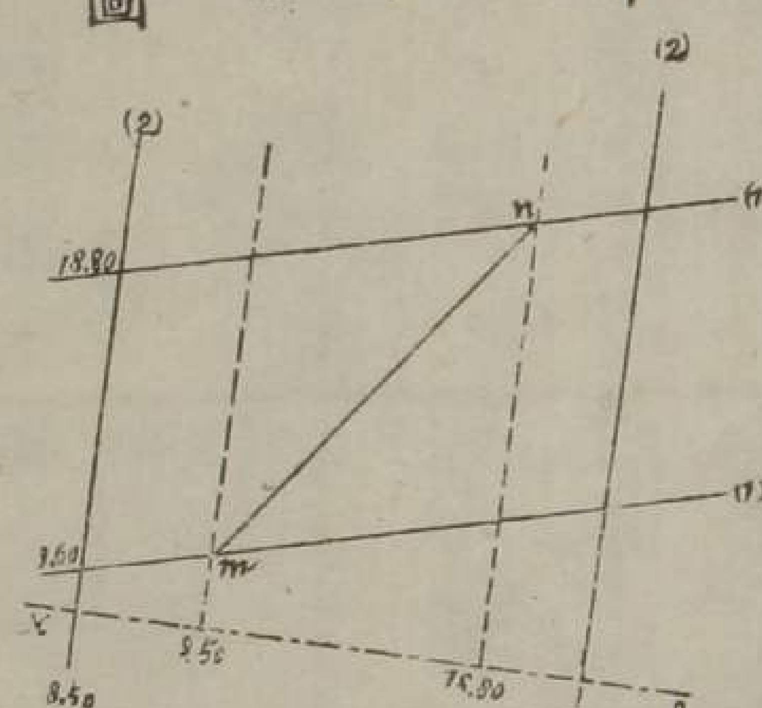
水平線に依りて設けられたる平面の交線

以下擧くる所の交線を求むへき平面ハ二個の水平線に依て設けられたる者と定む此場合ハ屢々活用上に於て生する者なり

畫上に於て水平線適宜の角を以て交る所の場合

(第二十七圖)(1)の平面ハ9,5及ひ13,8の水平線(2)の平面ハ8,5及ひ15,3の水平線に依て設けられたる者とす今此二平面中一個の水平線に直立せる直線xyを作る時ハ其諸点中の二個ハ則ち標高せる者にして今此直線上に於て他の平面の水平線と等標高の二点の画形影を求むへし然る時ハ設くる所の二平面の各に於て等標高の二水平線を得へ

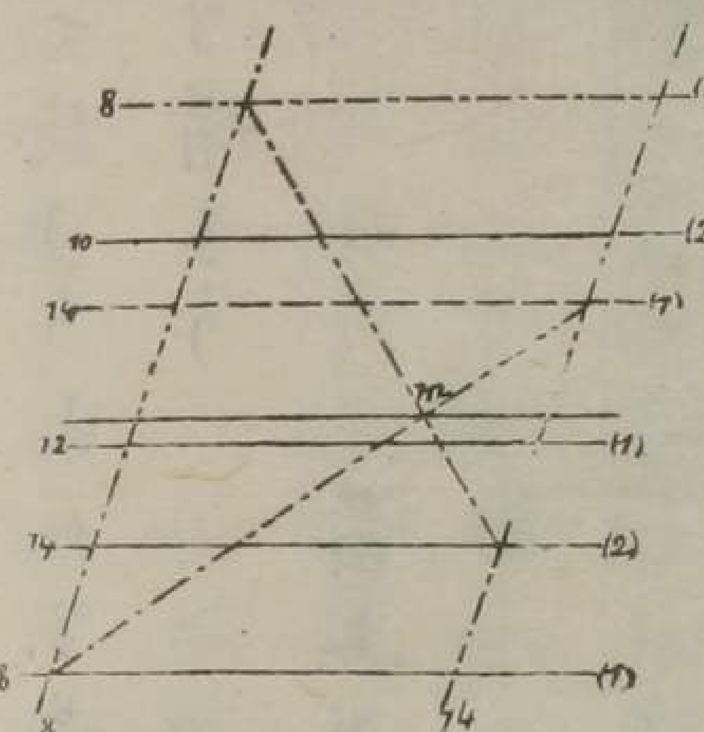
第二十七圖



し此交点を即ち求むる所の交線 mn を得せしむる者なり

水平線平行なる場合

(第二十八圖)(1)の平面は8及び12の二水平線(2)の平面は14及び10の二水平線に依て設けられ第一平面の水平線と平行なりと定む今此二平面の交線を得んとするに或る補助平面を以て之を截るなり但し是れは8及び14の二個の平行水平線に依て決定する者なり而して此補助平面と設くる所の二平面との交線を求め以て m に於て交截せる一直線を得るなり然るに此二平面の交線は水平線なる故求むる所の交線を得る為めに此 m 点を過きて諸水平線と平行せ

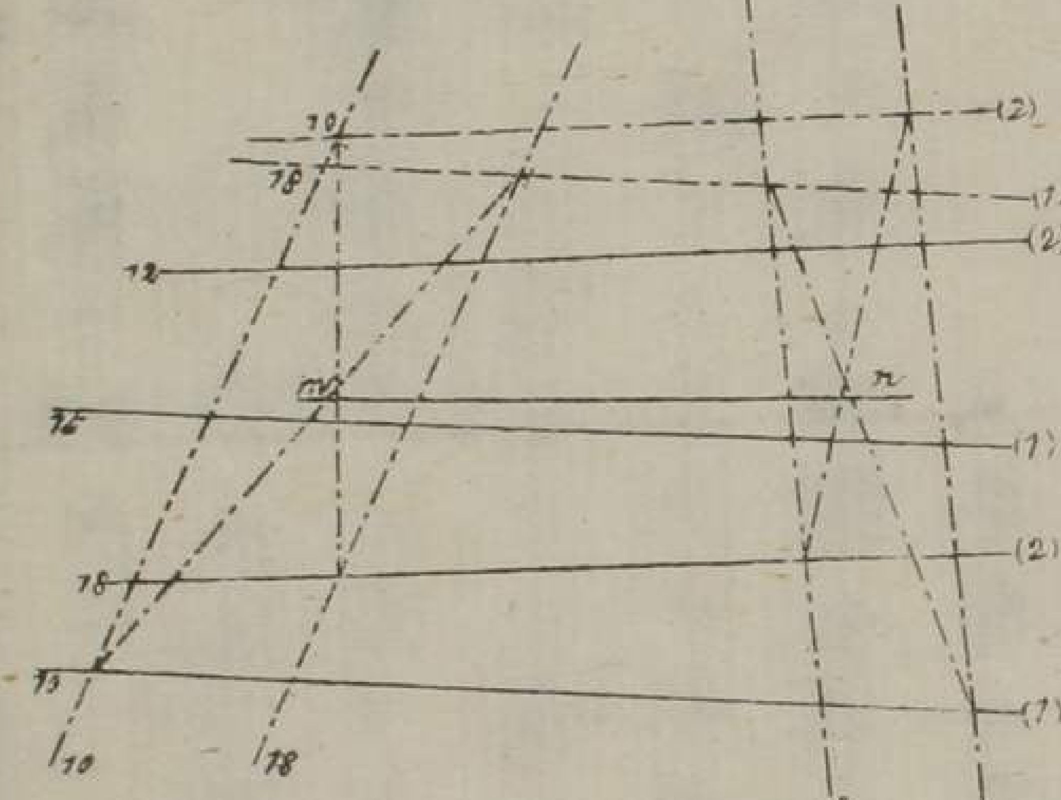


第二十八圖

る mn の直線は作るのみにして足れり

水平線圖の經界外に於て交る所の場合

(第二十九圖)各平面共に二水平線にて設けられ其水平線も平行ならずして極鋭角なるを以て極遠距離にて交る者とす是又常に同法を以て行ひ補助平面を以て之を截るなり然るに其水平線を適宜の方向並に標高にて有つ然きとも各補助平面にて只交線の一點を知らしむるのみにして此交線の方向を知れさる者故必らす二個の補助平面を用ひさる可からず而して第一補助平面にて m 點を得せしめ第二にて n 點を得せしむ而し



第二十九圖

て其交線をmnなり

凸稜及ひ凹稜の性質

交截せる二平面有りて城寨の一分の限界の如き時に於ては此に凸稜及ひ凹稜なる者を生す而して是らは水平線に依て顯はせり此二平面の角水平線の交點の上方に在る時は此平面は凸稜を生し下方に在る時は凹稜を生す

三平面の交處

三平面の交處は一點なり今之を求むるには此の三平面中二個つゝの交線を求むへし然る時は同しく一點に於て交截せる三個の直線を得へし即ち此點は求むる所の點なり

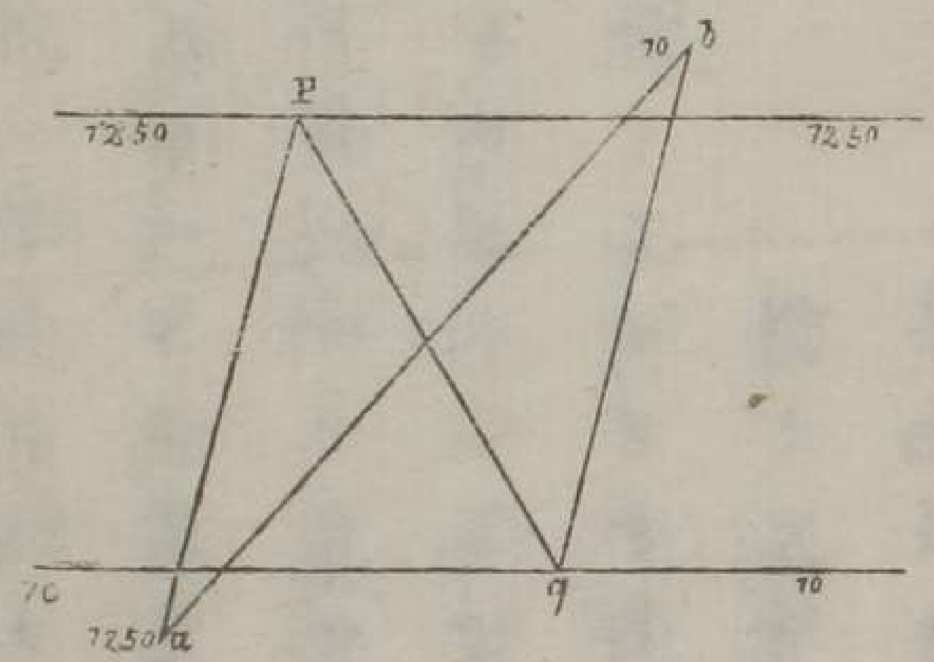
第四款

直線及ひ平面の設問

直線と平面との交點を求むる事

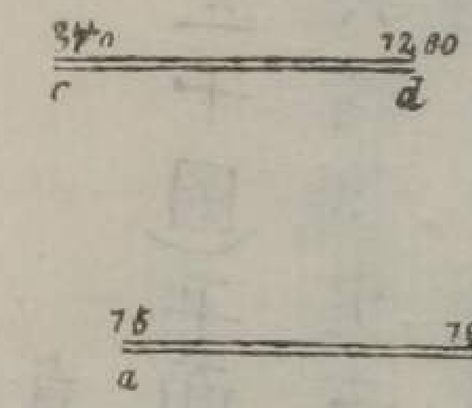
(第三十圖)平面其水平線に依て設けられ又直線其畫形影abと其諸點中二個の標高とに依て設けられ以て此直線と此平面との交點を求むるには設くる所の直線を過きて或る補助平面を作るなり但し此平面を適宜の角を以て設くへし所の平面の水平線を或る所の二個の水平線に依て決定せる者とす是に於て設くる所の平面中此補助平面の水平線と等標高の水平線を求め此二平面の交線PQを得へし此に求むる所の一點は補助平面上設くる所の平面中に在る、、

第三十圖



即ち此二平面のPQの交線中に在るへし又設くる所の直線中に在るへき故其畫形影は必す此二直線の交點mに在るへし又此mの畫形影を知る時は此畫形影よりして二條の法を用ひ以て其標高を決定し得へし蓋し此點はabの直線及ひ設くる所の平面中に在るへき者なれはなり

設くる所の一點を過きて他の平面と平行なる平面を作る事



第三十一圖

(第三十一圖)aに寫影して15と標高せる一點を過きてcdの傾斜梯尺に依て設けられたる平面と平行なる平面を作らんとす

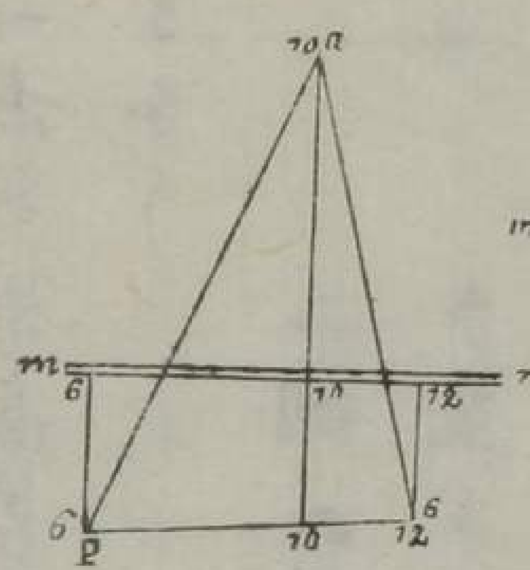
二平面相平行せるには其最大傾斜線相平行せれは可なり其故は此時は其水平線は同しく相平行して此平面は同方向に於て水平と等しき傾斜を有て居るなり故に其傾斜梯尺も亦相平行して其分画も亦相等し故にabの直線をcdと平行に作り而してcdの標高cよりdに至りて増加する事を注意すれは則ちb点の標高はc及ひdの二点の標高差をa点の標高に加へたる者に等しからしむるなり

二個の直線相平行せす又相交截せさる者を過きて互に相平行せる二平面を作る事

(第三十二圖)ab及ひcdを設くる所の二直線の画形影とす又其諸標高に據るに相交る能はさる者なり故に此二直線は同し平面中に在らさるなり今abを通きて平面を作り又cdを過きて他の平面を作り此二平面をして互に相平行せし

めんとす先つ第一直線のa點を過き第二直線と平行なる直線apを作り又第二直線のc點を過き第一直線と平行せる直線cqを作る時はbap及ひdcqの二角は空際に於て互に平行せる諸邊を有ち而して其諸邊にて決定せる二平面は相平行すへし故に此設問は$a\ b\ p$の三點に依て平面を作り又$c\ d\ q$の三點に依て他の平面を作る事に皈せり而して此の如く求め得たる$m'n'$の平面は直に此設問の性質に合する者なり又cdと平行せる直線apを作り後にcd中の一點を過きてab及ひapの二直線にて決定せるmnの平面と平行せる平面

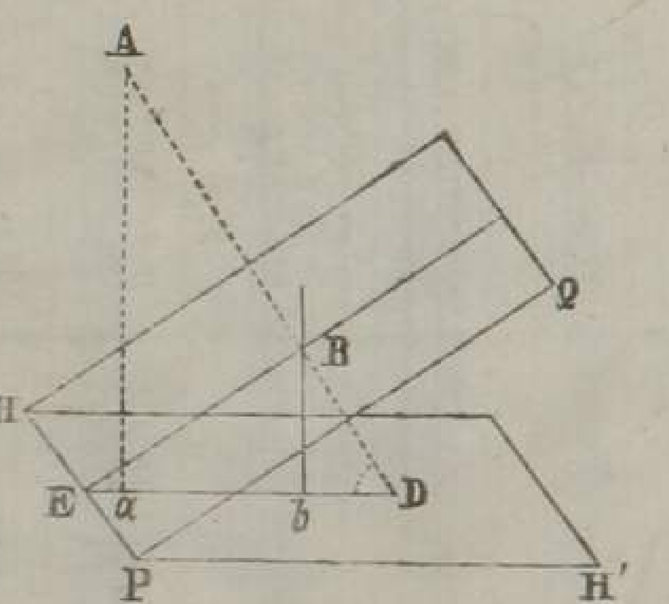
第三十二圖



を作り以て此設問に答ふる事を得へし

若し二直線相平行せる時は此設問は不定なり又相交截せる時は此二平面は此二直線の平面即ち只一個の平面となる

第三十三圖



直線及ひ平面相直立せる者

直線平面に直立せる者の畫形影と此平面の水平線の方向との関係

(第三十三圖)ABの直線空際に於てHPQの斜平面に直立せる者とし此平面はHPの直線に循てBH'の水平面を截る者とす然る時はABの直線を投影せるABabの平面は此水平面及ひ斜

平面に直立すへし其故は各此二平面に直立せる二直線に依て成れはなり故に又HPの交線にも直立す而して此直線のabの水平影は此斜平面の水平線に直立す故に又此平面の水平線の畫形影に直立すへし又此直立線と水平面とにて成すADEの角は斜平面と此水平面とにて成すBEDの角の餘角なり其故はBEDの三角形のB角は直角なれはなり故に此二角の正切は互に倒數にして即ち其相乘は一に等し故に其中一ツを知れは他の者は求め得へし

又垂線A.B及ひBEの最大傾斜線は其畫形影相平行し而して反對の方向に於て標高せる事を注意すへし其故はBbの鉛線の各傍に於て一は上升し一は下降すれはなり

標高平圖幾何學終

明治十一年五月廿三日　板權免許
明治十三年一月二十七日　出版
定價金三十五戔

出版所
東京京橋區山下町七番地
内外兵事新聞局
東京日本橋通二丁目
小林新兵衛
同
稻田佐兵衛

發兌書肆
大坂心齋橋通唐物町四丁目
淺井吉兵衛
同心齋橋通久太郎町四丁目
柳原喜兵衛