洋算例題微分篇

二奴2
678
4

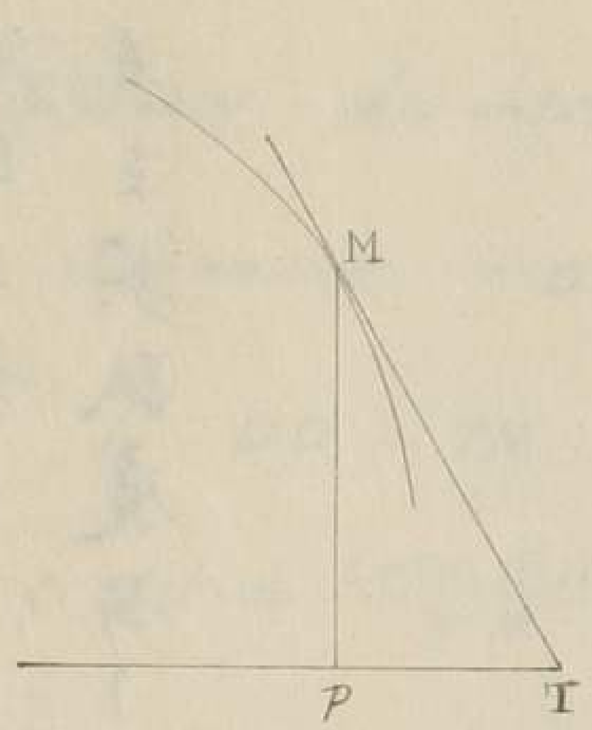
門 二 2
號
巻

洋算例題續々篇巻之十二

陸軍大尉福田半編輯

極曲線の次切線及ひ切線を推る法

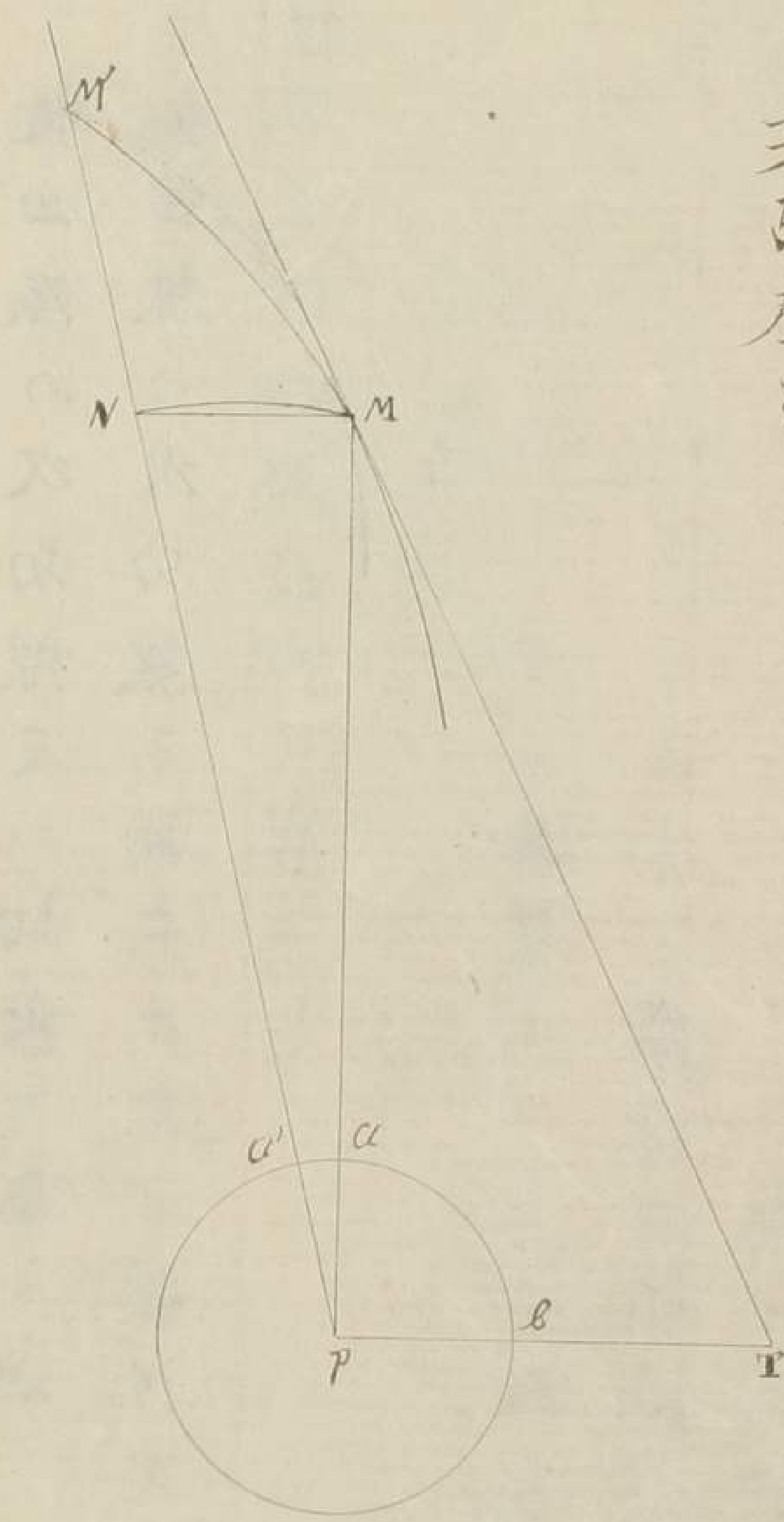
凡そ極曲線の次切線を極点に於て帯径に正交し帯径界点の切線迄以て界とし



Pを極点としてPMを帯径なりMTを帯径の界点Mの切線としてPTを即ち次切線なり

第一則　極曲線の次切線を帯径の自乗に弧の微係数

我架さるものか等しと云其證次の如し
左図の如くPを曲線の心点PMを曲線の帯径a
bを其弧度とす



曲線微長してMM'に至れを帯径微長してM'N我
得る弧度微長してaa'を得べし

今PM我半径としMNの弧我作り又其通去NM
を作り之か平行してPT我作る然しPT即ち
曲線の次切線なり

$$PM = r \quad MN = \Delta r \quad ab = t$$

$$aa' = \Delta t \quad aP = 1$$

$$1 : aa' :: PM : \mathrm{arc}\,MN$$

$$\therefore aa' = \frac{\mathrm{arc}\,MN}{PM} \cdots\cdots (1)$$

$$\triangle MNM' \sim M'PT$$

$$M'N : \mathrm{chord}\,MN :: M'P : PT$$

$$\therefore M'N = \frac{M'P\,\mathrm{chord}\,MN}{PT} \cdots\cdots (2)$$

$$\frac{\Delta t}{\Delta r} = \frac{aa'}{NM'} = \frac{\mathrm{arc}\,MN}{\mathrm{chord}\,MN} \times \frac{PT}{M'P \times MP}$$

$$\Delta t = 0 \qquad MP = M'P = 1 \quad \frac{\mathrm{arc}}{\mathrm{chord}} = 1$$

$$\therefore \frac{\partial t}{\partial r} = \frac{PT}{r^2}$$

$$\because PT = \frac{\partial t}{\partial r} r^2$$

按ずるに

$$\tan PMT = \frac{PT}{PM}$$

故に

$$\tan PMT = \frac{\partial t}{\partial \tau}\tau$$

第二則　極曲線の切線と次切帯径各自乗の和を平方に開れし者に同じ前図に準じ

$$MT^2 = PM^2 + PT^2$$

$$MT = \sqrt{PM^2 + PT^2}$$

$$= \sqrt{\tau^2 + \frac{\partial t^2}{\partial \tau^2}\tau^4}$$

$$= \tau\sqrt{1 + \frac{\partial t^2}{\partial \tau^2}\tau^2}$$

なり

凡そ螺線皆上二則に準じ之を推して得べし

設題

第一　假令亜爾氏螺線の次切線を問ふ

第二　假令螺線の切線一亜弧線の端に在るときこれを次切線と帯径を半径として作りたる圓形の周に等しと云其證如何

第三　若し切線れ亜弧線の端に在るときこれを次切線とれ倍切点上の帯径を半径として作りたる円形の周に等しと云其證如何

第四　假令双線螺線の次切線を問ふ

第五　假令對数螺線の次切線を問ふ

洋算例題續々篇巻之十二終

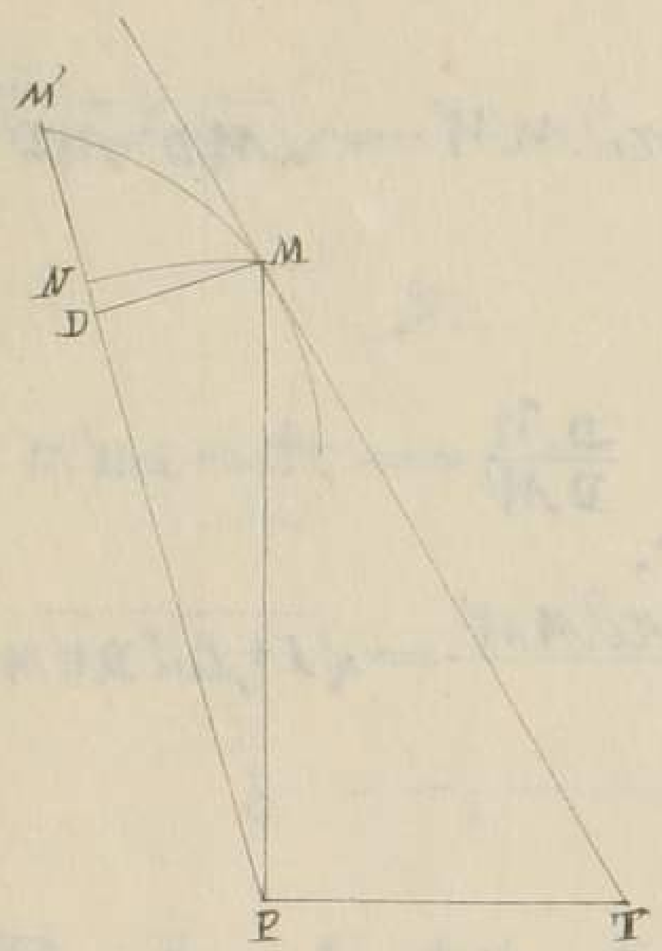
洋算例題續々篇巻之十三上

陸軍大尉福田半編輯

極曲線及ひ其面積の微分を推る法

第一則極曲線の微分を帯径に弧の微分を乗したる積及ひ帯径微分各自乗の和の平方商に等しと云

其證左の如し



上図PM及ひPM'は極線の二帯径なり故M点よりPM'の垂線MDを作れは即ちMDM'の勾股形を生ずへし故に其式次のことし

$$\mathrm{Chord}\ MM' = \sqrt{M'D^2 + MD^2}$$

又

$$\frac{DM}{DM'} = \tan DM'M$$

$$\therefore \frac{\mathrm{Chord}\ MM'}{\quad} = \sqrt{1 + \tan^2 DM'M}$$

扨帯径の長数M'N漸損して0となられを通弦MNと曲線M'M'との比例の限一となる然し十一巻一例に詳なり而してM'D及ひM'Nの二線漸く一致を致す故に帯径とMDの比例の限を亦一となる

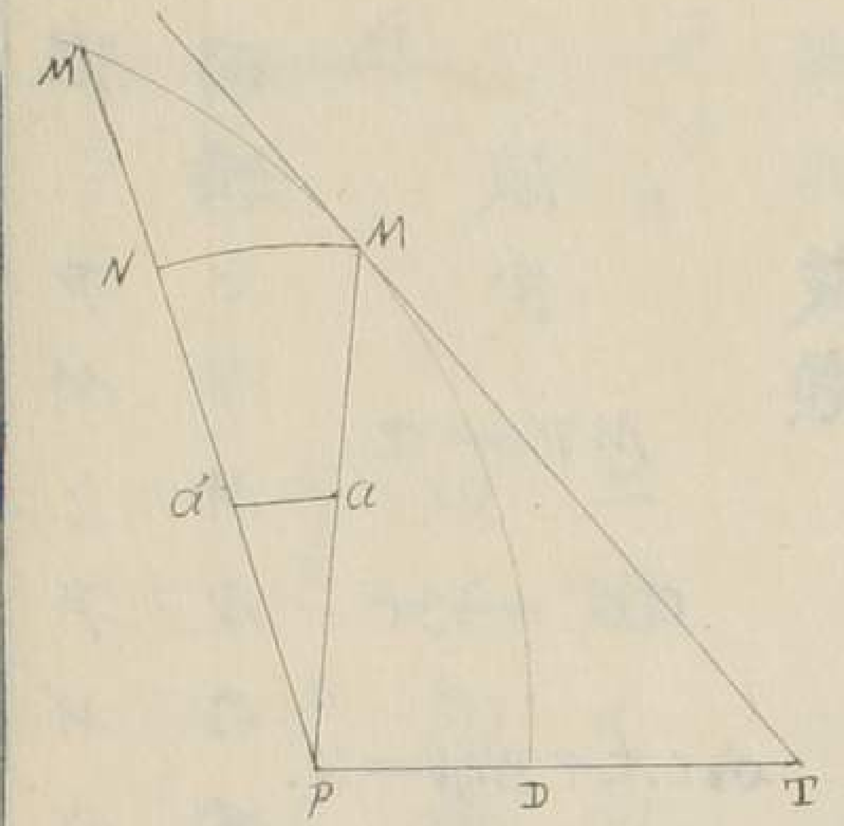
然之に依てDM'Mの角変してPMTの角となる而して其正切を上巻一例の案に依て$\frac{y\partial x}{\partial y}$を得る故に曲線を命して之とすれハ

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \sqrt{1 + \frac{y^2 \partial x^2}{\partial y^2}}$$

$$\therefore \partial z = \sqrt{\partial y^2 + y^2 \partial x^2}$$

なり

第二則極曲線面積の微分を帯径平方に弧線の微分を乗し之を半する者に等しと云其確左の如し左図PMDを極曲線内の一段面積とし若し帯径過る所の弧微長してaa'を加ふれハ曲線面も亦微長してPMM'を加ふるなり



$$\mathrm{Area}\ PMN = \frac{1}{2} MP \times MN$$

$$a'a : MN :: 1 : MP$$

$$aa' = \frac{MN}{MP}$$

$$\therefore \frac{\mathrm{Area}}{aa'} = \frac{1}{2} MP^2$$

但シPMとPM'の比例の限一とすれハPMM'の面積とPMNの面積の比例の限も亦一なり

故に

$MP = r$

$aa' = t$

$\text{area } PMN = S$

$\Delta t = 0$

$\therefore$

$\partial s = \frac{r^2 \partial t}{2}$

なり

設題

卅一 假令亜奇式螺線なり其微分如何

卅二 假令双線螺線なり其微分如何

卅三 假令對数螺線なり其微分如何

卅四 假令双線螺線なり面積の微分如何

洋算例題續々篇巻之十三上終

洋算例題續々篇巻之十三下

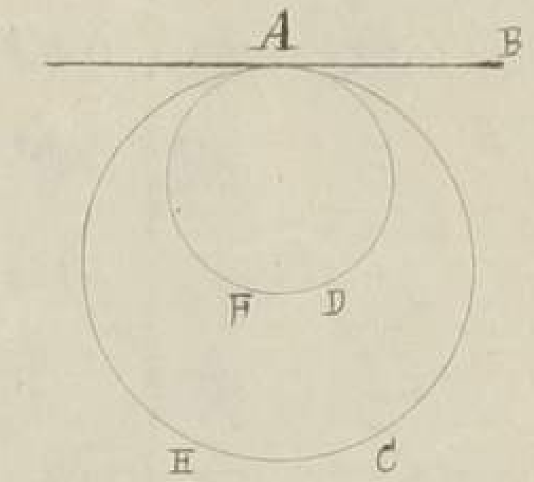
陸軍大尉福田半編輯

曲率半径

曲線切線ヲ離るヽの率ヲ曲率と云ふなり二曲線切線ヲ離るヽに遅速アリ其速なるものハ曲率の較大なり

上図の如きAC、AD二曲線倶にAB線ヲ以て切線とすADの曲線切線ヲ離るヽことACより速かなれハ其曲率もACよりも大なり

凡そ円周の曲率ハ各点倶ニ同じくして二円周の半径相同しけれハ其曲率ハ亦相同じ因て切線ヲ離るゝの速ハ相等し若し二円周の半径不同なれハ半径の小なる者の曲率較大なり



上圖の如きＡＤＦの円周其切線ヲ離るゝことＡとＥの円周より速なり故ニ半径愈小なれハ則ち曲率愈大なり半径愈大なれハ則ち曲率愈小なり凡そ不同径の円周等長の弧線ヲ以て準とし其端ニ各二半径ヲ作り為れハ其二角の度ハ即ち曲率の比例なり

第一則凡そ二不同径の平円其曲率と半径と反比例を為す其証左の如し

假令ＲＲ'を半径とし二弧線の等長をＡとし第一弧端の二半径成す所の角をaとし第二弧端の二半径成す所の角ヲa'とし幾何学の理ニ準し左の如き比例ヲ為す

$$2\pi R : A :: 360^\circ : a$$

$$a = \frac{360^\circ . A}{2\pi R}$$

$$2\pi R' : A :: 360^\circ : a'$$

$$a' = \frac{360^\circ A}{2\pi R'}$$

$$\therefore$$

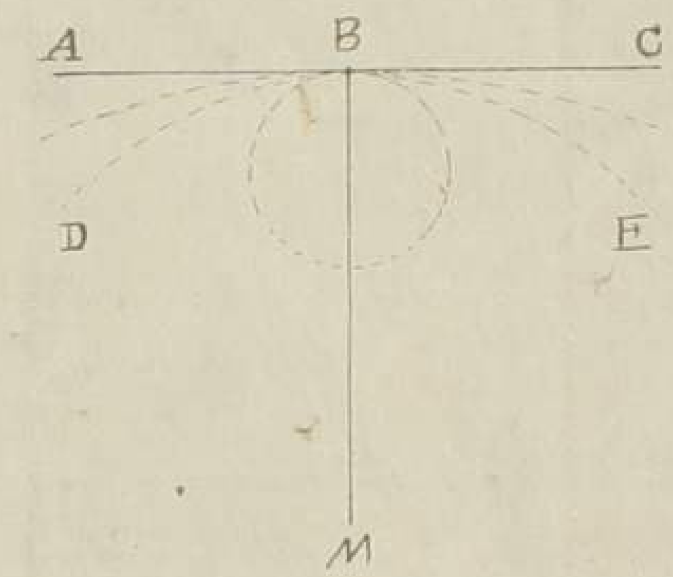
$$a : a' :: \frac{360^\circ A}{2\pi R} : \frac{360^\circ A}{2\pi R'}$$

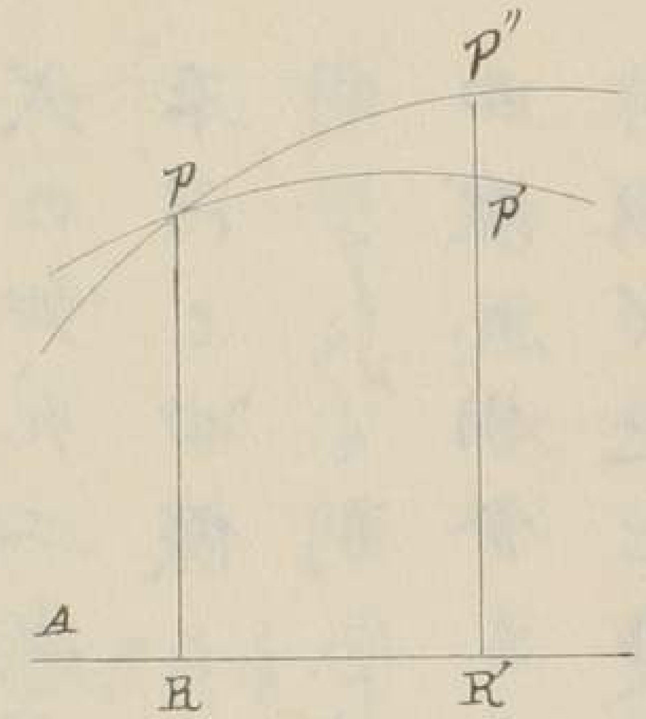
$$a : a' :: \frac{1}{R} : \frac{1}{R'}$$

なり

何曲線を論するにも必す合吻円あり

右図の如くDBEを曲線としABCをB点の切線としBMをB点の法線とす凡そ平円心BMの線内に在て而して周B点を経過する者必す倶にABCを以て切線とす故にDBEの曲線と無数の円周とB点に同切し其曲率曲線より大なれは必す曲線内に在り又曲線より小なれは必す曲線と切線の間に在り而して無数の圓周中必す一円周ありて其曲率曲線と恰も相等し即合吻円なり一名曲率円。円の半径にして則ち曲率半径なり○合吻円曲線と相合するを甚密なり





上図の如く彼と此との二曲線P点に交る此曲線の縦横線をX Yとし彼曲線の縦横線をX' Y'とし長数をhとしXをhを加へx+hとすれは次の如し

$$P'R'=y+\frac{\partial y}{\partial x}h+\frac{\partial^2 y}{2\partial x^2}h^2+\frac{\partial^3 y}{2.3\partial x^3}h^3+\cdots\cdots(1)$$

$$P''R'=y'+\frac{\partial y'}{\partial x'}h+\frac{\partial^2 y'}{2\partial x'^2}h^2+\frac{\partial^3 y'}{2.3\partial x'^3}h^3+\cdots\cdots(2)$$

P点は二曲線の公点なり故に $y=y'$ なりとす又第一微係数を切線横軸に交る角の正切とすることは第四巻に詳にす故に

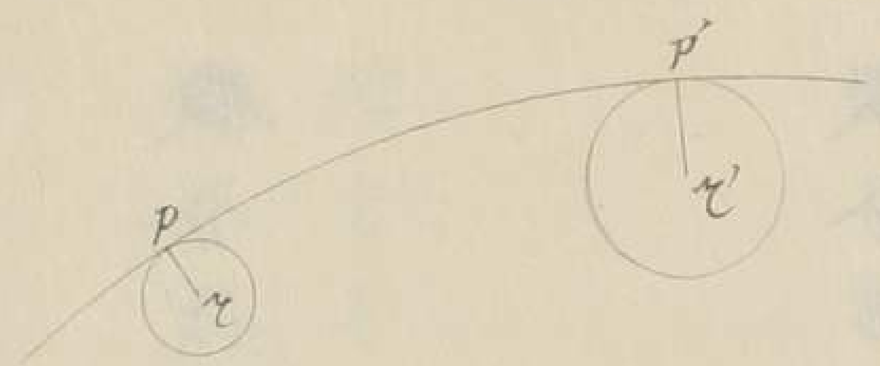
若しア点公切線にあれば

$$\frac{\partial y}{\partial x}p = \frac{\partial y}{\partial x}p'$$

なる(1)(2)両式

右遞微分の諸項相同なれば則ち二曲線相切すと其同等の數愈多ければ相切すること愈密なり平円式の如きは二次式なり故に微係數二次に止り依て平円と曲線とは第一と第二微係數との如く數相同なれば則ち其相切すること最密なり合吻円と曲線と相合すること甚密なり故に曲率を合吻円を以て之を度るべし

左図の如く曲線アア′二点在り設ひ此二点合吻円に二半径こと こ′を求むるに比例あり



曲率　　曲率

Corvature p : corvature p' :: $\frac{1}{こ}$: $\frac{1}{こ'}$

故に曲線諸点の曲率と合吻円半径と反比例あり

第二則 凡そ曲線中一点の曲率半径 $\frac{\partial s^3}{\partial x \partial^2 y}$ に等しかるべし x y を本点の縦横線とし 之を以て曲線の一段とし

平円式 $(x-a)^2+(y-b)^2=R^2$ 式中 a b ハ円心の縦横線にして x y ハ円周点の縦横線なり R ハ半径なり

微分を求め之を二約し

$$(x-a)dx+(y-b)dy=0$$

dx を常数とし再ひ微分を求む

$$dx^2+dy^2+(y-b)d^2y=0$$

$$\therefore (y-b)=-\frac{dx^2+dy^2}{d^2y}$$

$$(x-a)=\frac{dy}{dx}\cdot\frac{dx^2+dy^2}{d^2y}$$

此二同数を平円式に用ひ同加異減すれは

$$R^2=\frac{(dx^2+dy^2)^3}{(dx,d^2y)^2}$$

$$\therefore R=\frac{(dx^2+dy^2)^{\frac{3}{2}}}{(dx\,d^2y)}$$

若し曲線の一段をzとすれは十一巻第二則に依て

$$dz=\sqrt{dx^2+dy^2}$$

を得べし

故に

$$R=\frac{dz^3}{dx\,d^2y}\cdots\cdots(A)$$

を得るなり

凡そ曲線の曲率半径を本曲線の式を以て二次微分を求めて $\partial x\ \partial y\ \partial^2 y$ の諸同数を得て右R式中に用ひ曲線其点の曲率半径を知らんと欲せば本点の縦横線を以て $x\ y$ に代へ即ち得る

第三則 凡そ円錐曲線各点の曲率半径は各点法線の立方を半通径の平方にて約せるに等し

円錐諸曲線の公式

$$y^2 = mx + nx^2$$

とせよ

故に

$$\partial y = \frac{(m+2nx)\partial x}{2y}$$

$$\partial y^2 + \partial x^2 = \frac{\{4y^2+(m+2nx)^2\}\partial x^2}{4y^2}$$

又

$$\partial^2 y = \frac{2ny\partial x^2 - (m+2nx)\partial x\partial y}{2y^2}$$

$$= \frac{\{4ny^2-(m+2nx)^2\}\partial x^2}{4y^3}$$

$$= \frac{-m^2\partial x^2}{4y^3}$$

此二同数を前則R式中に用ひ分母子共に八除を算し

$$R = \frac{(\partial x^2+\partial y^2)^{\frac{3}{2}}}{\partial x\,\partial^2 y}$$

$$R = \frac{\{4(mx+nx^2)+(m+2nx)^2\}^{\frac{3}{2}}}{2m^2}$$

$$= -\frac{\left\{\sqrt{mx+nx^2+\frac{1}{4}(m+2nx)^2}\right\}^3}{\frac{1}{4}m^2}$$

右式中分子は法線の立方

第巻四則の線微分を用ひ四線を推す法の條

にして其分母を半通径の平方（代数幾何第の附論の末條に）あるなり

右式に準し左に解例三個條を示し后ち設題数條を挙く

一例 若しくの同数 0 に等しきものを則ち $R=\frac{m}{2}$ なり故に円錐曲線長径点に遇ふ所の曲率半径を本通径の半に等し

二例 楕円の短径点に遇ふ曲率半径を求むるものを別に得る $m=\frac{2B^2}{A}$ $n=-\frac{B^2}{A^2}$ $x=A$ を以て三則式中に用ひ化して $R=\frac{A^2}{B}$ なり故に其曲率半径を亦本通径の半にひとし

三例 抛物線に在ては $n=0$ なり故に三則の式変して $R=\frac{(m^2+4mx)^{\frac{3}{2}}}{2m^2}$ となる若し $x=0$ とされは $R=\frac{m}{2}$ を得るを以て抛物線頂点の曲率半径とす

設題

第一 今抛物線内に一点あり其横線九縦線六其曲率半径幾何

第二 今楕円あり半長径五寸半短径三寸長径端の曲率半径幾何

第三 今楕円あり長半径七寸短半径四寸短径端の曲率

半径幾何なる哉

卅四 今双曲線あり任意一点の曲率半径を第二則或ハ第三則に依て求めむことを欲す

卅五 今立方抛物線あり任意一点の曲率半径如何

卅六 今對數曲線あり任意一点の曲率半径を求む如何

卅七 今蘿線あり任意一点の曲率半径を求む如何

卅八 今蜉線あり任意一点の曲率半径を求む如何

卅九 今 $xy = m^2$ なる曲線式あり其任意一点の曲率半径を求む如何

四十 今 $y^2 - a(x-y) + x^2 = 0$ なる曲線式あり其任意一点の曲率半径を求む如何なる哉

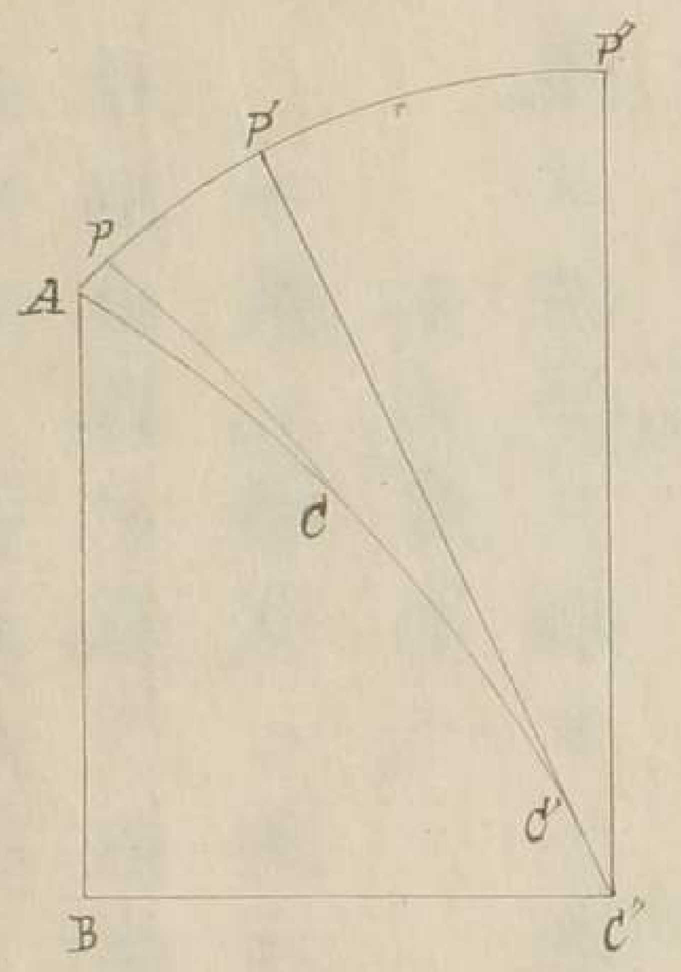
洋算例題續々篇巻之十三終

洋算例題續々篇巻之十四

陸軍大尉福田半編輯

漸伸線

凡そ線曲体に附て曲線を成すに漸々展ひ開かれ其端必す螺線を成す其界曲線を名けて漸伸線と云



上圖の如くA C C′ C″を曲體と以何曲體を論すろ如く理俱に同し線ありて一端をC″点の下に着け而して曲体に附て毋曲線を成すと則ちA端に拉緊、し漸々展ひ開かAよりC″

に至るときは其端必す$APP'P''$所成す子曲線一個の平面内に在り子線何類として母線を視るに異なり子線を母線の漸伸として成る處恒に螺線なり

漸伸線諸例

一 既に曲体を離るゝPCの一段をC点の切線とす
餘之に倣へ

二 母線C点の切線を子線P点の垂線として展てCに至るとしC点に円心を作る為しCPの切線半径とする故に$CC'C''$の三点を$PP'P''$三点曲率の心とするPC $P'C'$ $P''C''$の三線を$PP'P''$三点の曲率半径なり

三 P点の曲率半径PCは母線の一段ACと等し子曲線$APP'P''$の諸点に合吻円を作れは則ち其諸心必す母曲線$ACC'C''$の諸点上に在り故に母曲線の式は即ち子曲線無量段合吻円相聯属たるの式

平円式

$$(x-a)^2+(y+b)^2=R^2 \cdots\cdots (1)$$

a bは円心の縦横線として漸伸線の式所求めんと欲すれは先(1)式中a b相聯属の率を求むる為し蓋しa bを曲率円心の縦横線とすれは即ち

母曲線の縱橫線あり已に得る曲率半圓の式即ち

$$y-b=\frac{-\partial x^2-\partial y^2}{\partial^2 y}\cdots(2)$$

$$x-a=\frac{-\partial y}{\partial x}(y-b)\cdots(3)$$

此に同數を用ひ元を消去せしむ法　螺線式二次の微分を求め ∂y 及ひ $\partial^2 y$ の二同數を得る倶に a b x y の四元あり之を(2)(3)の兩式中に用ゆれは則ち x y 二元を消去を爲し得る處の式僅に a b の二元及ひ諸常數あり即ち漸伸線の式とは

例　今抛物線あり其漸伸線の式を求む如何

本彈線の式

$$y^2=2px$$

とし微分を求む

$$\frac{\partial y}{\partial x}=\frac{p}{y}$$

故

$$\partial y^2=\frac{p^2\partial x^2}{y^2}$$

$$\partial^2 y=\frac{-p^2\partial x^2}{y^3}$$

此二同數前に得ところ(2)(3)の兩式中に用ゆれは化して

$$y-b=\frac{y^3}{p^2}+y$$

故に

$$b^2=\frac{y^6}{p^4}$$

又

$$x-a=-\frac{y^2}{p}-p$$

各

$$y^2=2px$$

を以て變化すれは

$$b^2=\frac{8x^3}{p}$$

$$x=\frac{a-p}{3}$$

$$b^2=\frac{8}{27}\frac{(a-p)^3}{p}$$

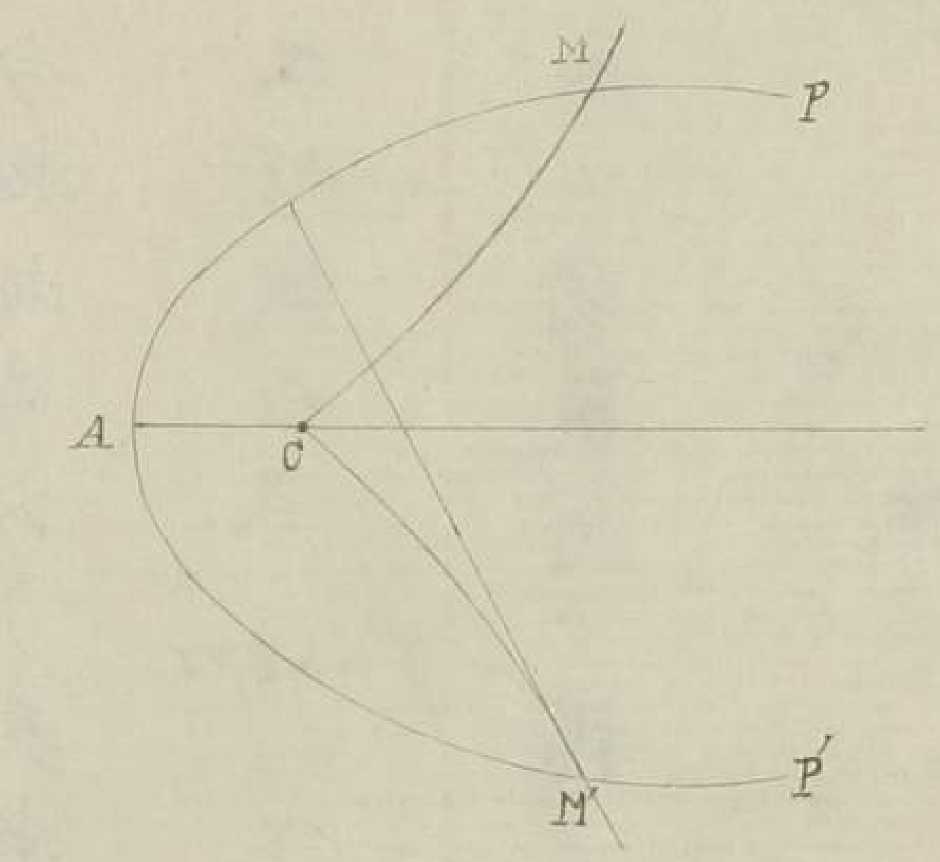
即ち漸伸線の式あり別に半立方抛

物線と成る線得り若し $b=0$ と為し此を $a=p$ と為れ故

に漸伸線と横線と交る点と原点の距ACを必ず

通径の半に等し

若し原点線移してAなりCに至れは則ち前式変して



$b^2=\frac{8}{27p}a^2$ となりて a 各同数相等

しくして正負同しくなるあ

り蓋し横軸線以て準とし拋物

線に二母線あり一線CM螺線

AP′線成す一をCM′螺線AP′

線成すなり

設題

七十一 今楕円あり其漸伸線の式如何

七十二 今双曲線あり其漸伸線の式如何

七十三 今蚪線あり其漸伸線の式如何

七十四 今蘿線あり其漸伸線の式如何

七十五 今 $ay^2=ax^2+b^2$ なる式あり其漸伸線の式如何

七十六 今擺線あり其漸伸線の式如何

洋算例題續々篇巻之十四終

洋算例題續々篇巻之十五

陸軍大尉福田半編輯

諸曲線の理

○凡そ曲線若干次式論する如く代數幾何学中の諸式を用て之か表し而して倶に推求を得る其法自変數の元を以て若干の正負同數か用ひ曲線内の若干点を任意に定むへし

○曲線式の次數甚た多くして此変數を以て彼の変數の公式を得る能はず獨り微分能く之か推求を得へし

○曲線の理を攷察するに先つ曲線内諸獨異点を求

むるし切線と横軸と平行の点、及ひ切線と横軸と正交の点の如く凡そ此類俱に獨異点と名く獨異点なるものは相近諸点と相同しからさる所云ふなり

第一則 凡そ曲線内切線と横軸と平行の点其式の第一次微係数は0に等し

第一次微係数は切線と横軸との交角正切に等し今切線横軸と平行する時は則ち交角は0なり故に正切も亦0なること識知る

第二則 凡そ曲線内切線と横軸と正交の点其式第一次微係数は無窮なり

第一次微係数は切線と横軸との交角正切に等し今交角九十度なるゆへに正切は無窮なり

第一例 平圓周何点の切線横軸と平行する哉又何点の切線横軸と正交する哉を求む

$$x^2+y^2=R^2$$

$$\frac{\partial y}{\partial x}=-\frac{x}{y}$$

$$x=0$$

$$y=\pm R$$

$$\therefore \frac{\partial y}{\partial x}=-\frac{x}{y}=0$$

故に切線横軸と平行するは必す円周縦軸の二点に交るに在り

又

$$y=0$$

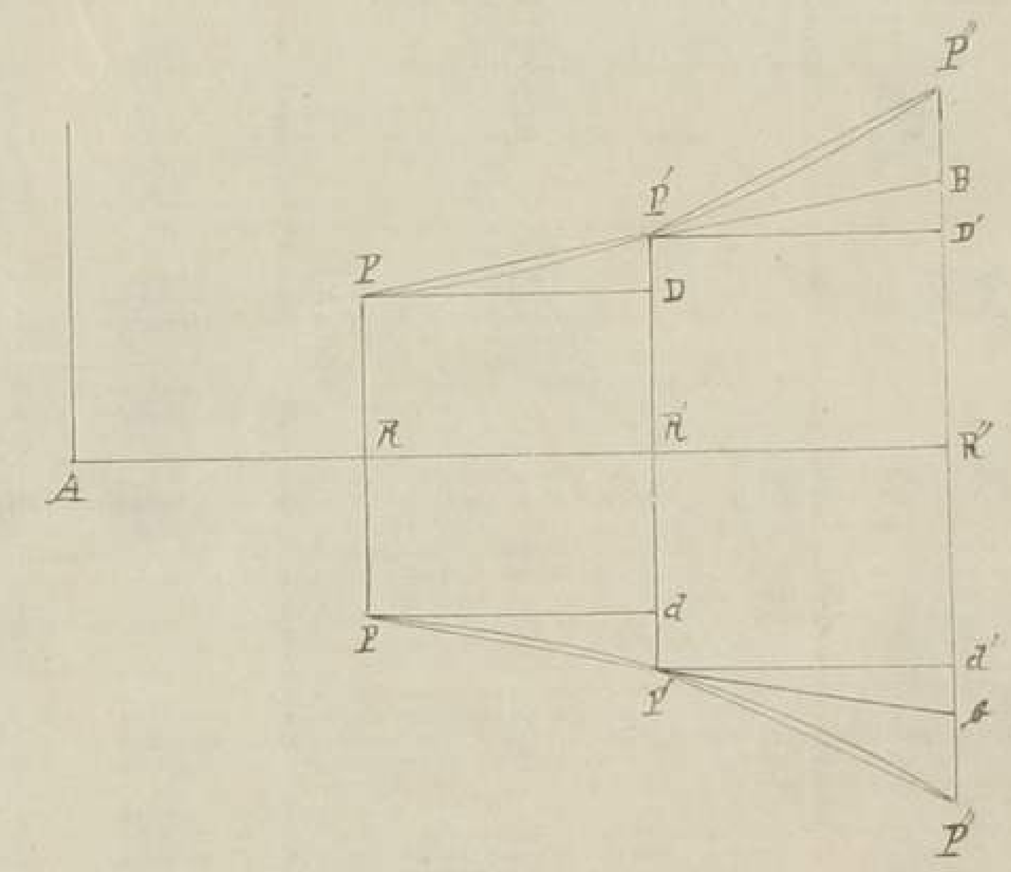
$$x=\pm R$$

$$\therefore \frac{\partial y}{\partial x}=-\frac{x}{y}=\infty$$

故に切線横軸に正交するは必す円周横軸に交る二点に在るなり

第三則 凡そ曲線凸辺を以て横軸に向ふ時は則ち縦

線と第二次微係數と必ず同号なり



上圖の如くPP'P''の曲線凸辺を以て横軸に向ふ今P点の縦横線をx yとし長數h h'を任意に取りhとしxを加へ又h' h'をhに等しく取り$P'R'$ $P''R''$の二縱線及びPP'線を作り之を引長しBに至らしめ又P'P''線を作り而してPD P'D'の二線をARに平行して作るべし

$$PR = y$$

$$P'R' = y + \frac{\partial y}{\partial x}h + \frac{\partial^2 y}{2\partial x^2}h^2 + \cdots\cdots (1)$$

$$P''R'' = y + \frac{\partial y}{\partial x}2h + \frac{\partial^2 y}{2\partial x^2}h^2 + \cdots\cdots (2)$$

$$P'D = P'R' - PR = \frac{\partial y}{\partial x}h + \frac{\partial^2 y}{2\partial x^2}h^2 + \cdots\cdots (3)$$

$$P''D' = P''R'' - P'R' = \frac{\partial y}{\partial x}h + \frac{\partial^2 y}{2\partial x^2} + \cdots\cdots (4)$$

$$BD' = P'D$$

$$\therefore P''B = P''D' - P'D = \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}h^2 + \cdots\cdots (5)$$

hの大小を論せずして(5)式右辺の号必ず左邊の号を以て準とす故に左辺正なれば右辺も亦正な

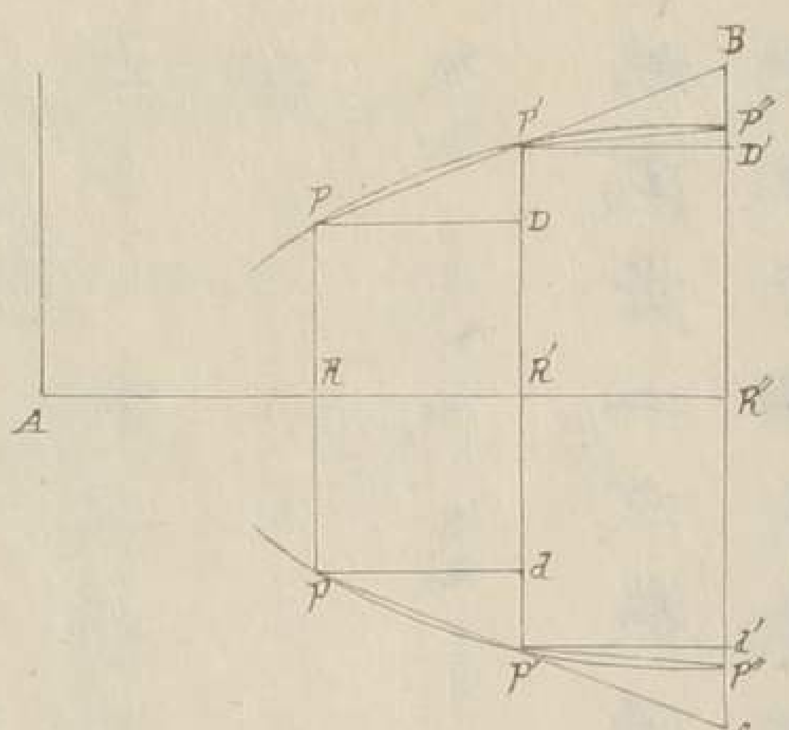
有り即ち第二次微係数ハ正と成而して縦線横軸の上にあり故に必す正なり若し曲線横軸の下にある時ハ即ち

$$-pd = p'd' - pd = \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}h^2 + \cdots\cdots$$

此式の左辺負なれハ右辺も亦負なり即ち第二次微係数も負となる而して縦線横軸の下にありて必す負なり倶に合す

第四則　凡そ曲線凹辺を以て横軸に向ふ時ハ縦線と第二次微係数必す異号なり

左図の如く$PP'P''$の曲線凹辺を以て横軸に向ふにP点の縦横線をx yとし長数のRR'を任意に取り之をhとしxに加へ又$R'R''$をhに等しく取り$P'R'$ $P''R''$の二縦線を作り而してPP'線を作り之を引長しBに至らしめ又$P'P''$を作り而してPD $P'D'$倶にARに平行なれハ則ち左の如き式を得る



$$PR = y$$

$$P'R' = y + \frac{\partial y}{\partial x}h + \frac{\partial^2 y}{2\partial x^2}h^2 + \cdots\cdots (1)$$

$$P''R'' = y + \frac{\partial y}{\partial x}2h + \frac{\partial^2 y}{2\partial x^2}4h^2 + \cdots\cdots (2)$$

$$P'D = P'R' - PR = \frac{\partial y}{\partial x}h + \frac{\partial^2 y}{2\partial x^2}h^2 + \cdots\cdots (3)$$

$$P'D' - P'Z' - PZ = \frac{\partial y}{\partial x}h + \frac{\partial^2 y}{2\partial x^2}h^2 + \cdots\cdots (4)$$

$$ZD' = PD$$

$$\therefore -P'B = P'D' - PD = \frac{\partial^2 y}{2\partial x^2}h^2 + \cdots\cdots (5)$$

hの大小を論せすあれは(5)式の左邉既に負なれは右邉も亦必す負なり即ち第二次微係數を負とす而して縦横横軸の上に在れは正なり若し曲線横軸の下に在れは則ち

$$P'B = P'd' - Pd = \frac{\partial^2 y}{2\partial x^2}h^2 + \cdots\cdots$$

此式第二次微係數を正とし而して縦線横軸の下に在て必す負なり倶に合ふ

二例 平円周線横軸に向ひたるを凹となる哉凸なる哉如何

$$x^2 + y^2 = R^2$$

$$\frac{\partial y}{\partial x} = -\frac{x}{y}$$

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = -\frac{x^2 + y^2}{y^2} = \frac{-R^2}{y^3}$$

若しyを正とすれは此式負なり又yを負とすれは正となる故に円周横軸に向ひたるを必す凹なり

◯曲線横軸の辺に向ひ或は本凹より変して凸となり或は本凸より変して凹となる所を凹凸交界

の点なる無し名帯て曲点と云 一名彎点と云

第五則凡そ曲点式の二次微係数或は0なり或無窮なり

凡そ曲線軸の辺に向ふ凸なれは則ち縦線と二次微係数も同号なり凹なれは異号なり曲点常に凹凸の交界となれは二次微係数此に至て必ず号を易ゆ故に式の正負諸同数の中間に必ず一同数はり或は0なり或は無窮なり而して式の減数

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}=0$$

或は

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}=\infty$$

なるを視れは即ち曲点の横軸を知り得べし

既に曲線内一点の二次微係数0或は無窮に等しく求め得ば即ち稍長数の丸を以て此点の横線に増損し而して其の二次微係数を視て両新同数異号なれは則ち必ず曲点あり

三例 假令

$$y=a+(x-b)^3$$

あり 試に其式に曲点あるや否やを求む

$$y=a+(x-b)^3$$

$$\frac{\partial y}{\partial x}=3(x-b)^2$$

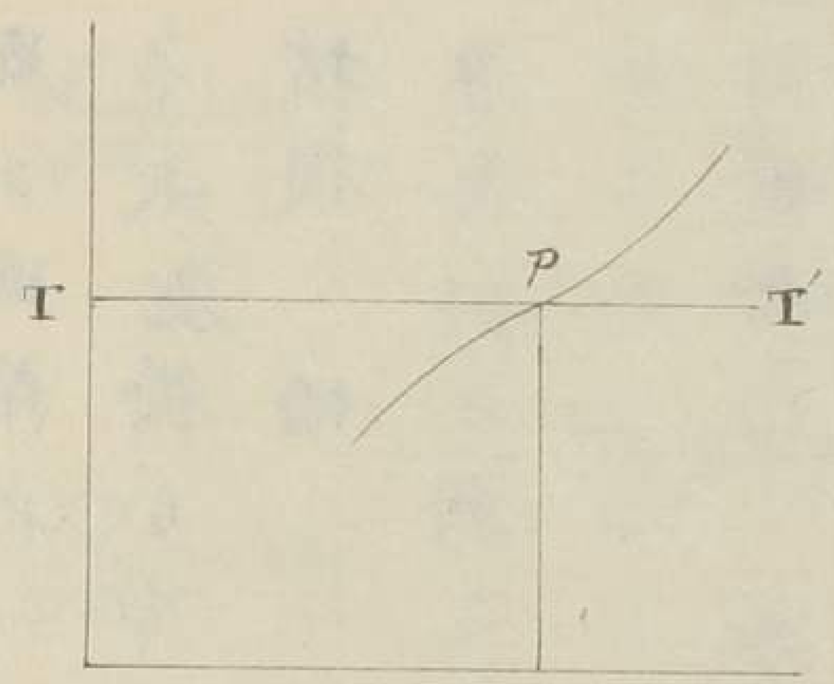
$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}=6(x-b)$$

$$x=b$$

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}=0$$

$$y=a$$

故ニ切線 $x=b$ $y=a$ の点上ニ在て横軸ニ平行を為しx b より小なれハ二次微係数負なり又x bよ
り大なれハ二次微係数正なり故ニ曲線内ニ $x=b$ の点ハ二次微係数此ニ至て必ス號を易ゆ而して此点必ス曲点ナル事を知るなり



上図の如くTT'を切線としP点の左曲線ハ切線の下ニありP点の右曲線ハ切線の上ニ在り故ニP点ハ即ち曲点なり

四例 假令 $y=3x+18x^2-2x^3$ の式あり試ニ其式ニ曲点あるや否やを求む如何

$$y=3x+18x^2-2x^3$$

$$\frac{dy}{dx}=3+36x-6x^2$$

$$\frac{d^2y}{dx^2}=36-12x$$

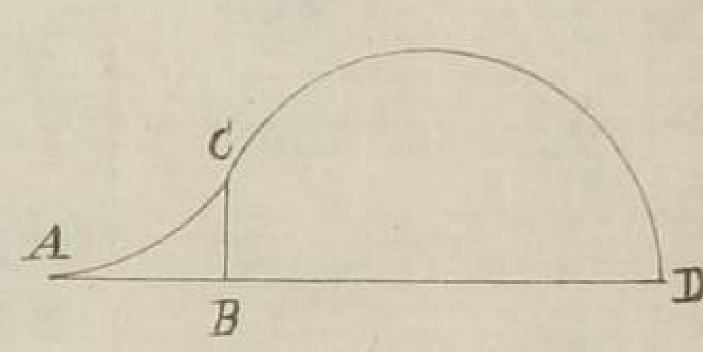
$$x=3$$

$$y=117$$

$$\frac{d^2y}{dx^2}=0$$

故ニ $AB=3$ とし縦横 CB を作れハ C ハ即ち曲点ニ且若しxが0と3との間ニあれハ則ち $36-12x$ ハ正なり

故に曲線ACは一段ABに向へて凸と
なる若し $x>3$ なれは則ち $36-12x$ は負なり故
に曲線C点の右BDに向へて凹なり



○若干の曲線一点に相交るを其交点を倍点と云ふ（一名重層点）

第六則凡そ倍点の一次微係数必す幾個の同数ある
一次微係数は切線横軸に交る角の正切に等し
若干の曲線相交れは若干の正切あり故に微係数
若干の同数なり

凡そ倍点の一次微係数大率ね　とし未定の数
を顕すへし

五例今 $y^2=a^2x^2+x^4$ なる式あり試に其式倍点ある哉否を求

$$y^2=a^2x^2+x^4$$

$$y=\pm x\sqrt{a^2\mp x^2}\cdots\cdots(1)$$

$$\frac{dy}{dx}=\pm\frac{a^2-2x^2}{(a^2-x^2)^{\frac{1}{2}}}\cdots\cdots(2)$$

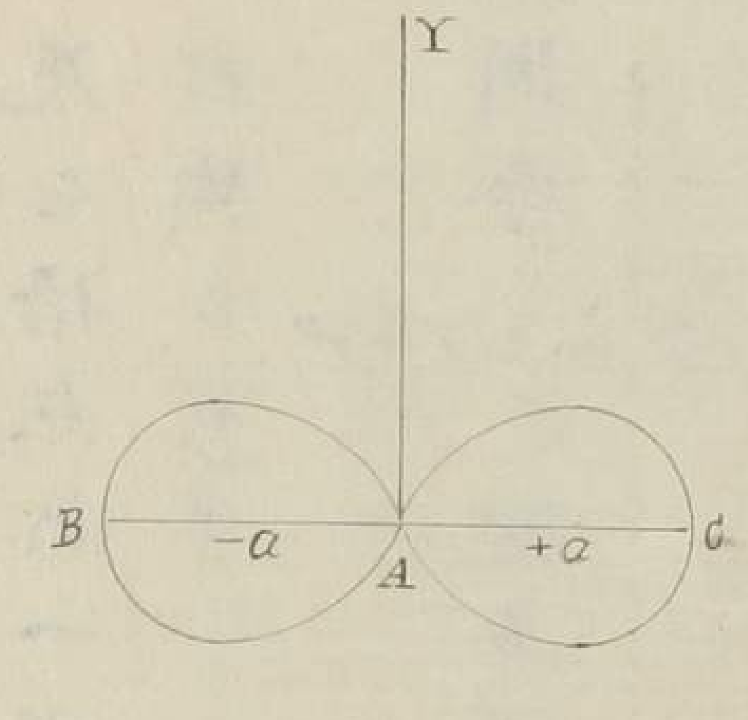
此式の一次微係数正負二同数あり即ち二曲線相

交り横軸に向ふるの勢相似たる所知る

若し(1)式中 $x=\pm a$ とすれば $y=0$ となる故に曲線横軸B

Cの二点に交る一を原点を距ること $+a$ とし一を

原点を距ること $-a$ とし



又若し $x=0$ とすれば $y=0$ となる故に曲線の交点原点Aに在り即ちAを倍点なり(2)式中 $x=0$ とすれば式変して $\frac{dy}{dx}=\pm a$ となる故にA点に二

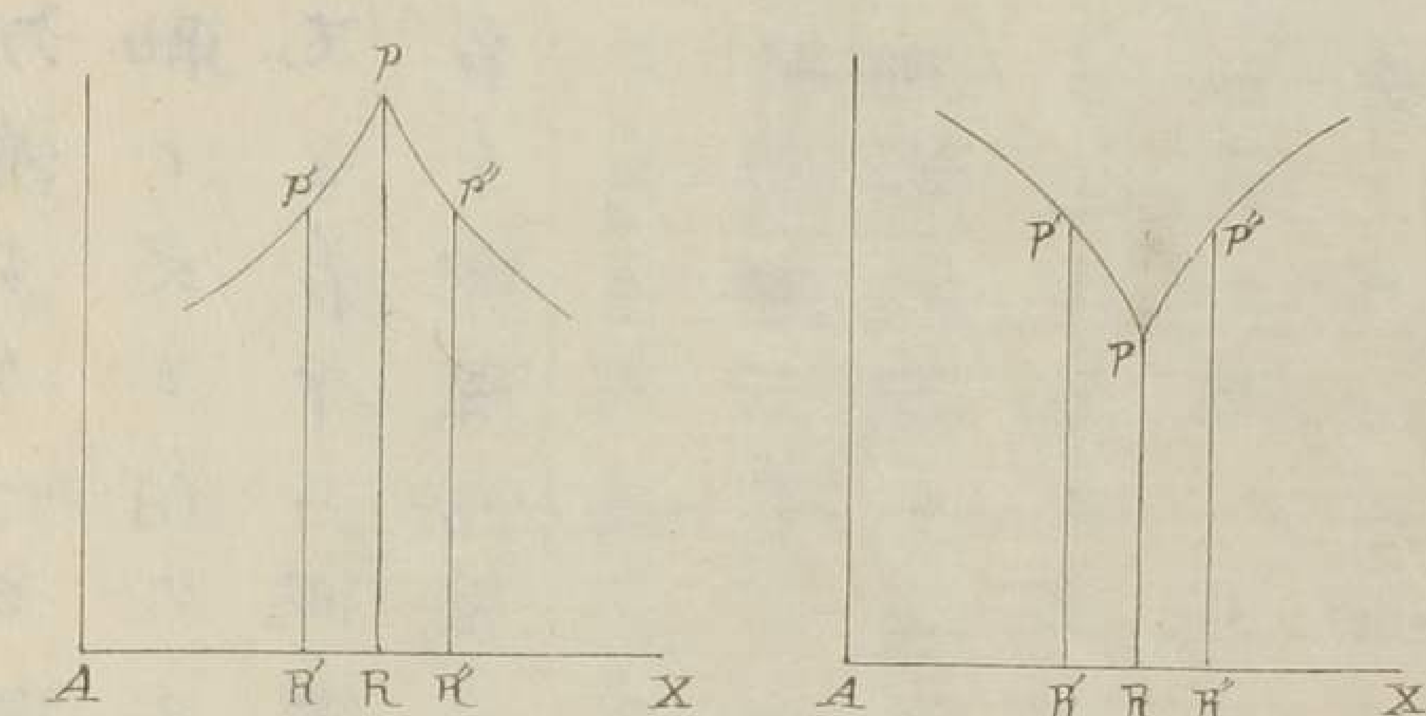
切線あり一を横軸と交る角の正切 $+a$ とし一を横軸と交る角の正切を $-a$ とし

○凡そ若干の曲線公切線の点にあるを岐点(或曲帰点)と名く曲線切線の一辺に在るを一辺岐点と云両辺にあるを両辺岐点と云ふなり

○縦横軸任意に之を作る要し故に以下二則岐点の切線を設け横軸の垂線とす若し切線横軸と平行すれば則ち横線と縦線互に易ふ

第七則曲線　点の切線を如くして横軸の垂線ならしめ定

若し其両辺相近の縦線倶に本点の縦線より大或は小なれば則ち両辺の岐点とし



左図の如くPが曲線の点とし其切線PRが横、軸AXの垂線とし P'R' P''R'' の二縦線甚だPRに近くしてPRより大なれば則ちPは必ず公切線と二曲線相切する点とし若しP'R' P''R''の二縦線PRより小なればPも必ず公切線と二曲線と相切するの点とせ其の如くなれるのP皆両辺点となる前後二図を視て明らかなり

六例 $y=a+2(x-b)^{\frac{2}{3}}$ あり試に其式に両岐点ある哉否を求む

$$y=a+2(x-b)^{\frac{2}{3}}$$

$$\frac{\partial y}{\partial x}=\frac{4}{3(x-b)^{\frac{1}{3}}}$$

$$x=b$$

$$\frac{\partial y}{\partial x}=\infty$$

即ち切線と横軸の交角正切者無窮とし故に切線必に $x=b$ $y=a$ の点上横軸の垂線とし即ち $b+h$ 及び

$b-h$ を用ひ各本式中の x に代へ俱に $y=a+2p^{\frac{2}{3}}$ を得る則

る $x=b$ とする時 y の同数最も小とし此外 x b より

大或は小を論ずるなし y の同数恒に此同数より

大なり故に $x=b$ $y=a$ の点必ず両辺岐点とし

七例 今 $y=a-2(x-b)^{\frac{2}{3}}$ 式の曲線両辺岐点ある哉否を求む

本式中 $b+h$ 及ひ $b-h$ を用ひ次を以て x に代へ俱に

$y=a-2p^{\frac{2}{3}}$ を得る $x=b$ の時 y の同数最大なるべきなり

此外 x b より大或は小を論ずるなし y の同数に

なり是 x は b に等しく y は a に等しき此の点即ち両

辺岐点なり

第八則 曲線岐点の切線をして横軸の垂線とし若し

其一辺相近の横線に二同数あり俱に本点の横線

より大なり或は俱に本点の横線より小なれば則

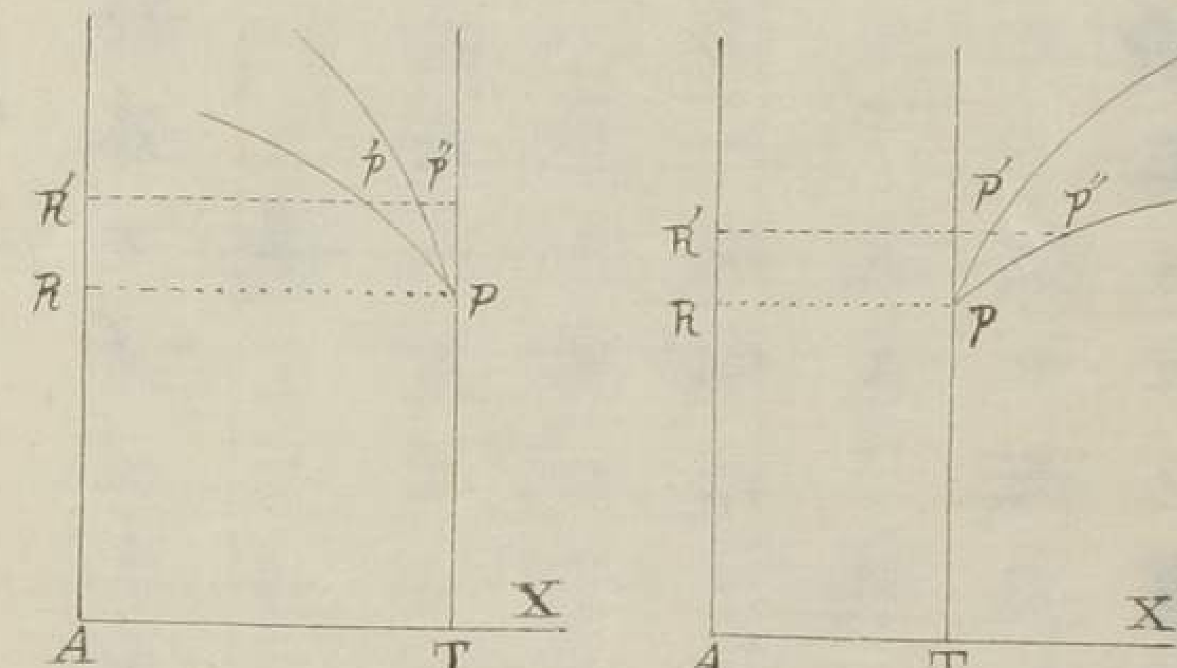
ち一辺の岐点とし

横軸 AX の垂線とし其横線を PN なり 相近の横

八例

$x=y^2\pm y^{\frac{5}{3}}$

式の曲線に一辺岐点あるや否を求む



線P′R′P″R″の二同数あるを設け俱にPRより大なれば則ちP必ず公切線と二曲線と相切するの点となる若しP′R′P″R″俱にPRより小なれば亦必ず公切線と二曲線と相切するの点となる此の如きは皆一辺岐点なれば前後二図を視て自ら明かなり

$$x=y^2\pm y^{\frac{5}{3}}$$

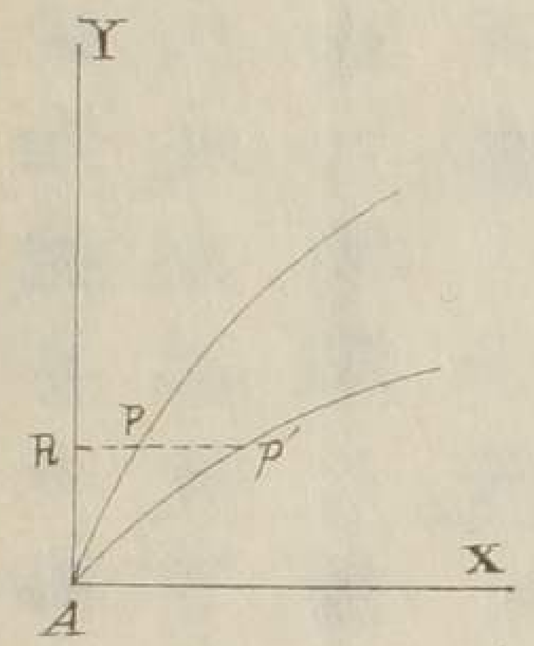
$$\frac{\partial y}{\partial x}=\frac{1}{2y\pm\frac{5}{3}y^{\frac{2}{3}}}$$

$$y=0$$

$$x=0$$

$$\therefore\ \frac{\partial y}{\partial x}=\infty$$

故に二曲線俱に原点を過ぐるなり縦軸は即ち公切線なり若しyを負とすれば則ちxは虚となる曲線横軸の下に至らざるものなり若しyを+とすれば則ち$x=y^2\pm y^{\frac{5}{3}}$となる若しyの同数一より小なれば$y^{\frac{5}{3}}$はy^2より小なり而してxに二正数あり一はPR一はP′Rなり故にA一辺の岐点とす



公切線を二軸の斜線となるその同法にて之を求む故へ岐点亦定む然し
点と曲線の諸点を相連なるもの無きあり而して其縦横線と曲線との式合するを特点と名く

第九則 特点の一次微係数は恒に虚常数に等しく特点と曲線諸点と相連なるもの無きは本点切線ある能はず故に一次微係数必ず虚数なる然し

九例 今

$$y^2=x(a+x)^2$$

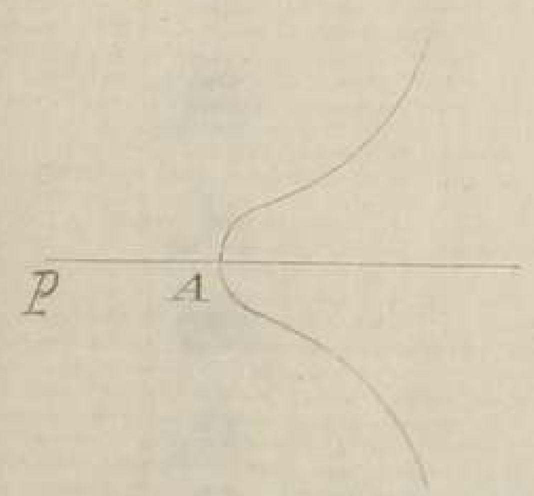
なる式の曲線特点あるや否やを求む如何

$$y^2=x(a+x)^2$$

$$y=\pm(a+x)\sqrt{x}$$

故にxを負とすれば則ちyは虚となる

又xを0とすればyも亦0となる故に曲線原点を過ぐる又若しxを正とすればyは必ず二実同数あり故に二曲線あり一は横軸の上にあり一は横軸の下にあり原点より起り倶に右辺に向て行く又若しxを$-a$とすればyは0に等し故にP点の横線を$-a$とすれば此点と曲線の他点と相連なるもの無くして式亦合す即ち特点なり



設題

第一 擺線あり何点の切線底辺と平行する哉又何点の切線底辺と正交する哉如何

第二 今 $y=a-(x-b)^3$ あり此式曲点ある哉否如何

第三 今蚌線あり其線に岐点ある哉否哉求む 但しa b相等し

第四 今 $y^2=(x-a)^2(x-b)$ あり其式に倍点ある哉如何

第五 今蘿線あり其線に曲点及ひ岐点ある哉否を求む

第六 今蚌線あり其線に曲点ある哉否哉求む如何

第七 今 $y^2=x^3$ あり其式曲点ある哉否如何

第八 今 $ax^2=a^2y+x^2y$ あり其式曲点ある哉否如何

第九 今 $x^2y^2=a^2(ax-x^2)$ あり其式曲点ある哉否如何

第十 今 $y^2=px+qx^2$ なる式の曲線横軸に向ひて凸を成と試凹を成と試如何

洋算例題續々篇巻之十五終

洋算例題續々篇巻之十六

陸軍大尉福田半編輯

混淆問題二

第一 今 $y=e^{\sin x}$ あり馬氏の術に依て級数を作る如何

第二 今 $2y=c(e^{\frac{x}{c}}+e^{\frac{x}{c}}$ 此式とせる曲線の法線式を求む如何

第三 今拋物線より頂点より線外或点を通し過ぐる線曲線と交る角をして最大ならしめんと欲せる点の

位置如何

卅四 $y = a\log(x^2 - a^2)$

なる式の切線次切線の和は $\frac{x^2}{a}$ なりと云ふ

證如何

卅五 今円外擺線あり此線の切線及ひ法線を得る式を求む如何但しa b相等し

卅六 今径の一端を原点とする處の円あり即ちAは原点PTは切線PNは縦線APは通弦なりと云然る時は其通弦と切線と交り成す角はTPN角の半に等し其證如何

卅七 今 $y^2 = x^4 - 4x^3 - 18x^2$ なる式といふ曲線の縦横軸原点に於いて曲率半径を求む如何

卅八 今已知の正方形内に正方形を造り其積をして最小ならしめんと欲する其造る所の正方形の位置如何なる哉

卅九 今 $y = ax + bx^2 + cx^3$ なる式といふ曲線の曲点の位置如何なる哉

四十 今 $x^3 - y^3 + axy = 0$ なる式とする曲線に漸近線ある哉

四十一 今中心を原点とする楕円に於てPなる点より中心点へ直線を畫きP点の法線と角を成すを号てθとし又法線横軸に交り成す所の角e及ひ半長径

半短径を已知とし而してe角を得る式如何

十二　今$y^2x=(a-x)\sqrt{a-x}$を式とする曲線あり其切線横軸に交る角を問ふ

十三　今或曲線に於て或点の次法線を$2a^2x^3$に等しと云然る時は此曲線の次切線を得る式如何

十四　今中心同しき二曲線あり相交て角を成すを一と双曲線一を平円なり此平円の半径$2a$とする時は二曲線の交角如何

十五　今ABPなる不等辺三角形あり其B角をしてA角の二倍度ならしむる時Pに依而画ける曲線の漸近線を引くことを問ふ

十六　今中心を原点とする楕円の線内に或一点を設くるなり其点の法線と其点より中心まで引ける線との交角をして最大ならしめんと欲す其点の位置如何

十七　今立楕円に円錐を容るあり長中径十四寸八分之一短半径九寸最大なる其錐積幾何なる哉　乃至（円周率百十三分之三百五十五を用ゆ）

十八　今A点を頂点とする擺線内に一点Pを設け而して母輪の周頂点と底辺に切する時縦線と交る点をQとしてP点の切線AQなる通弦と平行すと云證如何

十九 今 $y=\frac{a}{2}\left(e^{\frac{x}{a}}+e^{-\frac{x}{a}}\right)$ を式とする曲線の法線及ひ曲率半径を求む如何

二十 今 $y=ae^{\frac{x}{a}}$ なる對數曲線あり其漸伸線の式を問

廿一 今中心を原点とする所の楕円の周に一点Pを設く其点の法線長径と相交り成す角を以てP点の曲率半径を求む如何

但しeを用ゆることを要する

廿二 今中心を原点とする所の平円より曲率半径を求む如何

廿三 今 $y(ax+b^2)=c^3$ を式とする曲線あり其漸近線の式を問ふ

廿四 今 $ay^2=x(x+a)^2$ を式とする曲線横軸に交り成す角及ひ其点を問ふ

廿五 今 $y^2=\frac{x^3}{2a-x}$ を式とする曲線あり或点の切線横軸に交り成す角及ひ此曲線に曲点ある哉否問ふ

廿六 今亜奇氏螺線あり或点の切線帯径と交り成す角を問ふ

廿七 或地の緯度及ひ地平線に平行なる二圏を知て或天象其一圏より他の一圏にまて径過する距時最小ならしむる時は其赤緯を得る式を求む如何

廿八 等脚三角内に楕円を容るに其短径三角の底辺と平行なるあり中勾六寸最大楕円の長径如何

二十九 今 $y=x^{1-\log x}$ なる式あり若しひ極大なれハxの同數幾何

三十 等脚三角形内ニ最大の拋物線面が容かる其底辺と三角底辺相合ハ三角の高四寸問ふ拋物線面の高さ如何

三十一 今不等辺三角錐あり其底の各辺 a、b、c 及ひ正高ハ既知て最小の表面積を求む如何

三十二 今 $y^{\frac{2}{3}}=a^{\frac{2}{3}}-x^{\frac{2}{3}}$ が式とする曲線の原点より切線横軸ニ交る点ニ至る距が得る式を求む如何

三十三 今楕円の原点長径の端ニあれハ其式 $y^{2}=\frac{x^{2}}{a^{2}}(2ax-x^{2})$ なり然る時ハ或点の次切次法の両線相乗し得る所の者ハ其点の縦線の平方ニ同しと云其證如何

三十四 今Aなる原点短径の端ニある楕円線内ニ一点Pが設ヶ其点より原点ニ至るの距離をして最大ならしめんと欲ハ半長径五寸半短径三寸なり最大なるAPの距離を求む如何

三十五 今 $y^{\frac{1}{2}}=a^{\frac{1}{2}}-x^{\frac{1}{2}}$ が式とする曲線の原点より或点の切線ニ垂線ニしめんとする線の長が求如何

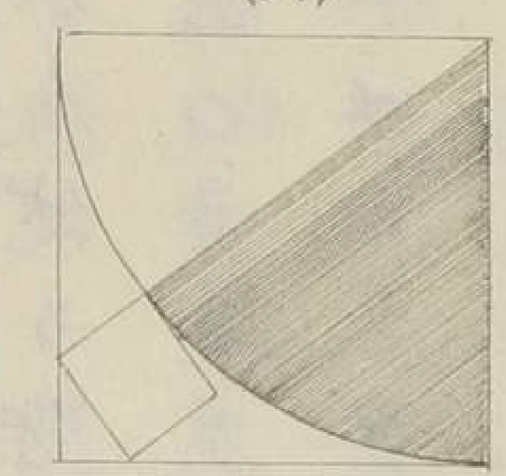
三十六 尤畠の如く正方内ニ弧背（正方の一隅が心とする）及ひ小方が容るあり其黒積をして至て大ならしめんと欲ハ

大方辺一寸ニ小方辺幾何なる哉

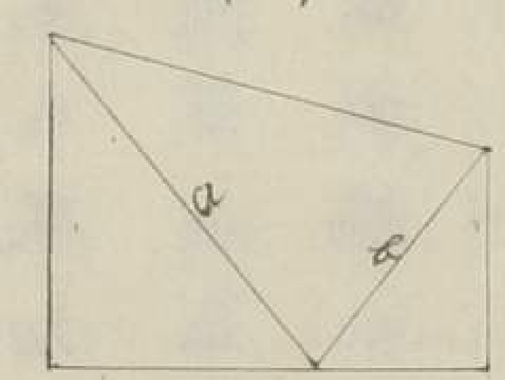
卅七 左図の如く半規内ニabの二斜を設るありa斜及b斜を題し半規の積最も大ならしめんと欲する所の濶を得る術如何

卅八 左図の如く半規内ニabの二斜を設るありa斜三寸b斜四寸にして半規の積至て大ならしめんと欲する所の濶幾何なる哉

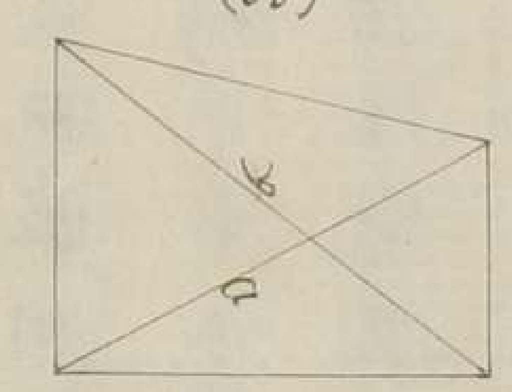
(36)



(37)



(38)



卅九 今円の径AB内ニC点を取り而して或弦AP及び縦線PN又APニ平行しPNをQニ截てCQを引きQの母点を以て成る所の曲線如何

卌 今PQの直線Aなる定点を通して過ぎ而して其一端Qは已知の円周内面を廻くれは他端Pを以て成せる曲線如何して其式を求むる哉

卌一 今BACなる三角形あり其Aは直角なり今Cなる定点を通し一直線を動かせば其一端をして恒にBA線に着せ往かしむれば直線の他の一端に依て画せる曲線は如何なる形を成せる哉而して其曲線の次切線の式を求む

三二 楕円の中心より切線上に引ける垂線をPとし又中心より此切点に引ける線をrと号けれは即ち $p^2=\frac{a^2b^2}{a^2+b^2-r^2}$ を得る其證如何

三三 楕円に於て若しAを原点とすれは其式あり又Sを極としASP=θ及びSP=rとすれは其極式 $r=\frac{a(1-e^2)}{1\pm e\cos\theta}$ を得ると云證如何

三四 抛物線に於て極式を求め而して極点Sより切線に至るの垂線Pを求む如何

三五 今 $r=a(1+\cos\theta)$ なる極式あり切線に至る垂線Pを求む如何

三六 今BACなる直三角あり其Aを直角とし今AC線内にP点を取り其点よりB角に至るの線を劃しBP角をして最大ならしめんと欲すAP及びPCの距を題しABの距を得る術如何

三七 今Cを楕円の中心としPNを或縦線とする時若し此縦線内にR点を設けCRをして恒にNPに同しからしめは此R点を以て成る曲線の漸近線の位置を問ふ

三八 今 $y^3+2axy^2-x^3=0$ を式とする曲線を原点に於て三倍点（三度曲線の相重なる点を云）を有すを其證如何而して切線の位置を問ふ

卌七 今 $y=\frac{a^2x}{ab+x^2}$ を式とする曲線に三個の曲点を有す而して $x=\sqrt{ab}$ なる時は切線は軸に平行なると云ふ其證如何

卌八 擺線の屬線と名付くる曲線の式は $x=a(1-\cos\theta)\ y=a\theta$ なり今此曲線の曲点を求む