筭學教程講本

平面幾何二

筭學教程講本巻之二

平面幾何學之部第二

第二十教

定説

ABの直線をC點に於て二分し其ACBCの各分の比若し設使ば五と三の比に等しき時は此直線は此點に於て五と三の二數に比例せる各分に分たるゝと謂ふ但し此數は常に整數と定むる者なり

ABの直線を設くる所の二數五及び三に比例せるACCBの二分に分つ事は惟一様のみなり其故は此區分を行ふ爲めにはABの直線を5+3即ち八個に等分し而してACの爲めにはAより起り首の五分を取りCBの爲めには其残

り即ち三分を取れはなり此C點を求むる事はABの直線上に於てA及びBの二點までの距離五及び三の二數に比例せる一點を求むる事に歸せり此意に因て考ふれは此問題は更に第二の解法に適當すへし其故は若しABの距離を5-3即ち二個に等分して

ABの引長線に於て此一分の三倍に等しきBDの長さを取る時はADの直線は此一分の2+3即ち五倍を有つ而してD點よりABの直線のA Bの二端までの距離DA DBは五及び三の二數の比に等し之に因て此D點は猶亦此題意に合れる者なり

又此D點はA點の右方に在りと注意すへし其故は設くる所の比は一より大なれはなり若し又此比一より小なる時は則ちD點は其左に在るへし而して一般に此C及びDの二點はABの直線を比例せる各分に分つと謂ふ又之に反してA及びBの二點はCDの直線を比例せる各分に分つ其故は $\frac{CA}{CB}=\frac{DA}{DB}$ の相等式よりして直に $\frac{AC}{AD}=\frac{BC}{BD}$ を得れはなり

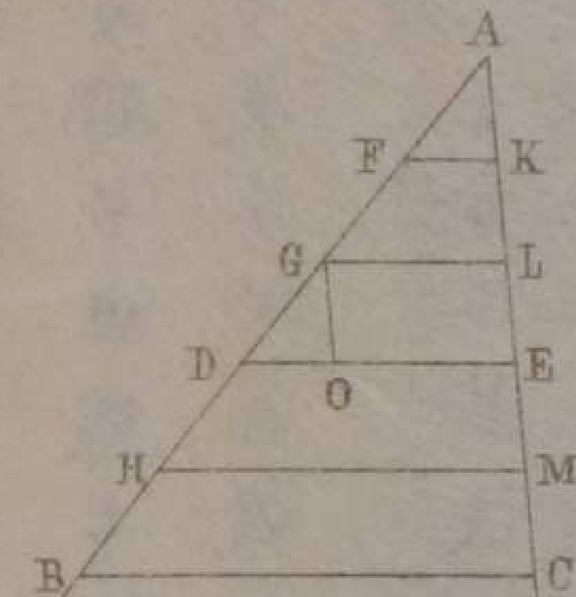
ABの直線をC點に於て五及び三の如き二數に比例せる各分に分ち而して此AB上に於てCBに等しきAC′を取る時はCB AC の二距離は相等し而してC′點はABを五及び三の二數と反比を為せる $\frac{AC'}{C'B}$ の二分に分つ其故は $\frac{AC'}{C'B}$ の比は $\frac{5}{3}$ に等しき $\frac{AC}{BC}$ の比を轉倒せる者なれはなり

第一設論

三角形の三邊中の一個に平行せる直線は他の二邊を比例せる各分に分つ

ABCの三角形のBCの邊に平行してDEの直線を作る時は此直線はDEの二點に於て他の二邊ABACに交はり之を比例せる各分に分つ

今之を證明するにはADとDBとの比を$\frac{3}{2}$に等しと定む



之に因てADDBの二直線はADの內に三倍DBの內に二倍を有てるAFの公度を有つ而して此FGDHの四點を以てABの邊をAFに齊しき3+2即ち五個の等分に分つ所の點とし此各點よりしてBCに平行せるFKGLDEHMの各線を作る時は此各線は猶亦ACの邊を五個に等分するなり

ABの直線の分點の一個設使はG點よりしてACに平行せるGOの直線を作る時はAFKDGOの三角形は相等し其故はAFGDの二邊は設想に因り相等しく又FAKDGOの二角并にAFKGDOの二角は應角なる故に相等し之に因て此二個の三角形のAKGOの二邊は相等し然るにGOELの四邊形は平行邊形なる故にGOの邊は之に對せるELの邊に等し而してACの直線のAKELの二分は相等し

又同様にACの邊の他の各分とAKとの相等しき事を證明する事を得へし之に因てAKの直線はAEECの二直線の公度にしてAEの內に三倍ECの內に二倍を有つ事知

るへし故にAEとECとの比は$\frac{3}{2}$に等しく即ちADとDBとの比に等し

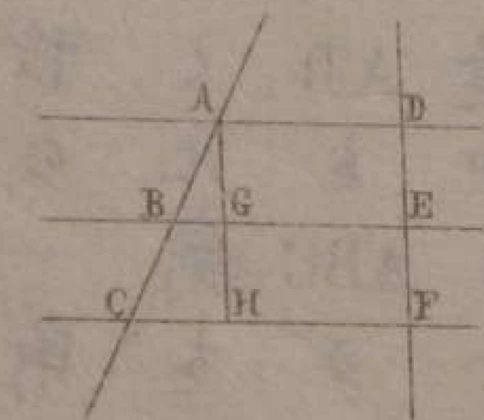
第一推論

ABの邊と其一分設使はADとの比はACの邊とADに應する一分AEとの比に等し其故は前の設想に因り此比の各は$\frac{5}{3}$に等しけれはなり

第二推論

AD BE CF等の數個の平行線は此各線に交はるAC DFの二直線上に於て之を比例せる各分に截斷す

A點よりしてDFに平行せるAHの直線を作り而してBE CFの二線に交はらしむる時はACHの三角形のCHの邊に平行せるBGの直線はAC AHの二邊を比例せる各分に分つ即ちABとBCとの比はAGとGHとの比に等し然るにAG DEの二直線は相等し其故はADEGの平行邊形に於て此二邊は互に相對すれはなり又GH EFの二直線に於ても同理なり



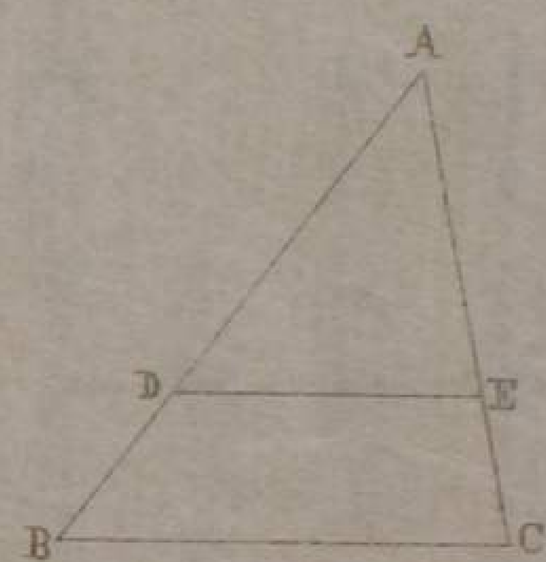
故に$\frac{AB}{BC}=\frac{DE}{EF}$を得因て又$\frac{AB}{DE}=\frac{BC}{EF}$なり

第二設論

ABCの三角形のAB ACの二邊を比例せる各分に分てるDEの如き凡ての直線は第三の邊BCに平行す

DEの直線はABCの三角形のAB ACの二邊に交はる所の點をD Eとも今ADとDBとの比をAEとECとの比に等しと定

むる時は此DEの直線は此三角形の第三の邊BCに平行なるなり

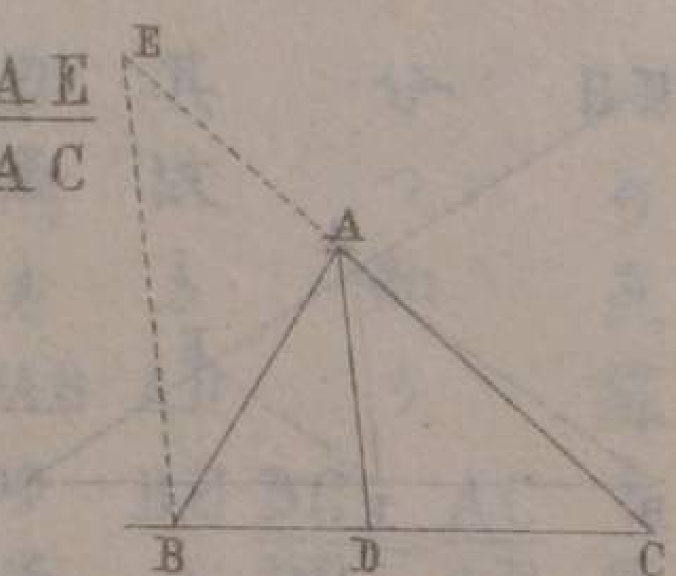


D點よりBCの直線に平行線を作る時はACの邊をAD及びDBに比例せる各分に分つ故に此線はE點を過ぎDEと合す其故はA點より起てACをAD及びDBに比例せる各分に分つ事は惟一樣のみなればなり

第三設論

三角形の一角の平分線は其對邊を二分に分ち此各分は各傍邊と比例を為す

ADはABCの三角形のBACの角の平分線にして今此角の二邊中の一個即ちABの端界BよりADの直線に平行線を作り之を引長して他の一邊ACとEに於て交はらしむ然る時はBCEの三角形の一邊BEに平行せるADの直線は（第一設論）他の二邊CB CEを比例せる各分に分つ即ち



$$\frac{BD}{DC}=\frac{AE}{AC}$$

の如し然るにABEの三角形は二等邊なり其故はAD EBの平行線に關係して應角なるを以てAEBの角はDACの角と相等しく即ちBACの角の半なり又同し平行線に關係して內錯角なるを以てABEの角はDABの角に等しく即ちBACの角の半なり故にABEの三角形の二角AEB ABEは相等し因て此二角の各對邊AB AEは猶亦相等しく而して

$$\frac{BD}{DC}=\frac{AB}{AC}$$

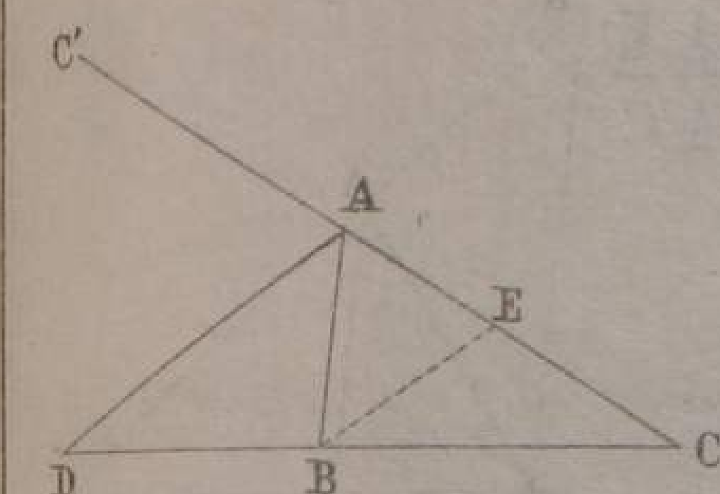
を得るなり

推論

此設論の反言は明了なり其故はBCの直線をAB ACの各傍邊に比例せる各分に分つ事は惟一様のみなれはなり

第四設論

三角形の外角の平分線は其對邊に交わり其交點より此邊の二端までの距離は各傍邊と比例を為す



ADはBACの三角形の外角BAC'の平分線にして今BACの角の二邊中の一個即ちABの邊の端界BよりADの直線と平行線を作りE點に於て他の一邊ACと交わらしむ然る時はACDの三角形の一邊ADと平行せるBEの直線は(第一設論)他の二邊CA CDを比例せる各分に分つ即ち $\frac{DC}{DB}=\frac{AC}{AE}$ の如し然るにABEの三角形は二等邊なり其故はAD BEの平行線に關係して內錯角なるを以てABEの角はDABの角に等しく即ちBAC'の角の半なり又同じく平行線に關係して應角なるを以てAEBの角はDAC'の角に等しく即ちBAC'の角の半なり故にABEの三角形の二角ABE AEBは相等し因て此二角の各對邊AE ABは猶亦相等し而して $\frac{DC}{DB}=\frac{AC}{AB}$ を得

推論

此設論の反言も明了なり其故は $\frac{DC}{DB}$ の比は一より大

にしてD點のB點と近つくり或は遠ざかるに從ひ或は増大し或は減小する故にCBの邊の引長線上に於てC及ひBの二點までの距離AC ABの各傍邊と比例せるDの如き點は惟一個より外成立せさると能はさるなり

以上二個の設論の注意

三角形の一角の平分線及ひ其隣接外角の平分線は其對邊を比例せる各分に分つ

第五設論

ABの直線DEの二點に因て比例せる各分に分たるゝ時は此直線の半は其中央よりDEの二點までの距離の中率となる又之を反言せへし

設想に因て

$$\frac{AE}{AD}=\frac{BE}{BD}$$

を得是きより二個の等比の性質

に從ひ

$$\frac{AE+BE}{AD+BD}=\frac{AE-BE}{AD-BD}$$

を得然るにM點はABの中央なる故AE+BEの和はMEの二倍に等し又之に等しくAD+BDは2MDに等しくAE−BEは2MBに等しくAD−BDは2MDに等し故に前の相等式中之を代へ且つ其各項を2にて約し以て

$$\frac{ME}{MB}=\frac{MB}{MD}$$

を得即ち此設論を證明せる者なり

反言　若しABの直線の半此線の中央M點より此M點の一傍に於て此線の方向上に設くる二點DEまでの距離の中率となる時は此DEの二點はABの直線を比例せる各分に分つ

設想に因て相等式 $\frac{ME}{MB}=\frac{MB}{MD}$ を得然る後前に説きたる二個の等比の性質に從ひ以て $\frac{AE}{AD}=\frac{BE}{BD}$ を得故にDEの二點はABを比例せる各分に分つ

問題

一　三角形の二邊の中央を聯接せる直線は第三の邊に平行し而して此邊の半に等し

二　四邊形の相連各邊の中央を聯接せる直線は平行邊形を作る而して如何なる場合に於て此平行邊形は矩形斜方形正方形となるべきや

三　三角形の各角の平分線にて其對邊上に作さる各分を $0^{m}001$ に於て計算する事を求む但し其三邊は 12^{m} 15^{m} 18^{m} なり

第二十一第二十二款

定説

同し邊數を有つ二個の多角形若し其各角互に相等しく且つ此等角に隣接せる各邊比例を為し而して同し順序に置かる時は之を相似形と名く

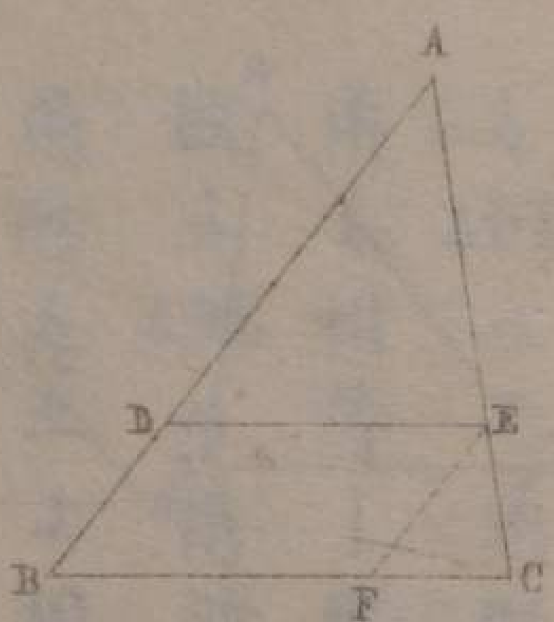
二點二線二角二個ノ相似諸形ニ於テ相當ノ位置ヲ領セル時ハ之ヲ相當ノ點線角ト名ク故ニ相等二角ノ角頂ハ相當ノ點ニシテ又相當ノ各角頂ニテ決定セル各對角線ハ相當ノ線ナリ

二個ノ多角形ニ於テ各相當二邊ノ一定ノ比ヲ此二個ノ多角形ノ等比ト名ク此比若シ一ニ等シキ時ハ此二個ノ多角形ハ相等シ其故ハ若シ之ヲ相重ヌル時ハ其邊及ヒ角ハ互ニ相等シク且ツ同シ順序ナルヲ以テ全ク相合セヘケレハナリ

第一設論

三角形ノ各邊中ノ一個ト平行セル線ヲ以テ此三角形ヲ截ル時ハ原形ト相似形ナル第二ノ三角形ヲ成ス

B



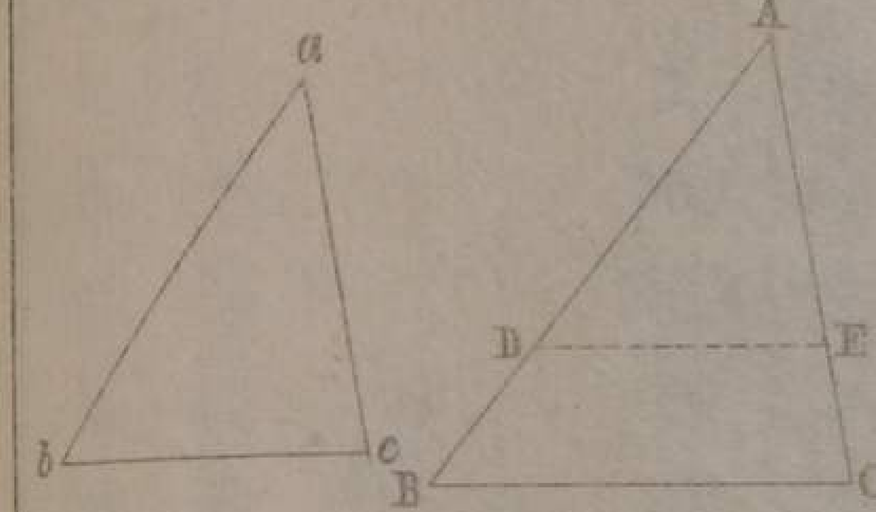
DEノ直線ハABCノ三角形ノBCノ邊ニ平行セル者トセハ然ル時ハADEノ三角形ハABCノ三角形ト相似形ナリ

此二個ノ三角形ハAノ公角ヲ有チ而シテABC ADEノ二角ハBC DEノ二平行線ニ關係シテ應角ナル故相等シク又ACB AEDノ二角ニ於テモ同理ナリ又DEノ直線ハACニ平行セルヲ以テADトABトノ比ハ（第二十數第二設論）AEトACトノ比ニ等シ今又此AEトACトノ比DEトBCトノ比ニ等シキ事ヲ證セルニハE點ヨリEFノ直線ヲABノ邊ト平行ニ作ルナリ然ル時ハ此線ハ他ノ二邊AC BCヲ比例セル各分ニ分チ而シテAEトACトノ比ハBFトBCトノ比ニ等シク即チDEトBCトノ比ニ等シ其故ハBF

BF、DEの二線はBDEFの平行邊形の相對二邊なるを以て相等しけれはなり故にADE、ABCの二個の三角形は互に相等しき各角を有ち且つ比例せる相當邊を有ちて即ち相似形なり

第二設論

二個の三角形互に相等しき三角を有つ時は相似形なり



ABC、abcの二個の三角形に於て其一個のabcの三角は他の者のABCの三角に等しき者とも然る時は此二個の三角形は相似形なり

ABの上に於てabに等しきADの長さを取り此D點よりDEの直線をBCと平行に作る時はADEの三角形は(第一設論)相似形にしてADE、ABCの相當二角は相等し然るにABCの角は設想に因りabcの角に等し故にADEの角は猶亦abcの角に等し故にADE、abcの二個の三角形は互に相等しき二角に隣接せる等しき邊を有ち而して相等し因てabcの三角形はABCの三角形と相似形なり

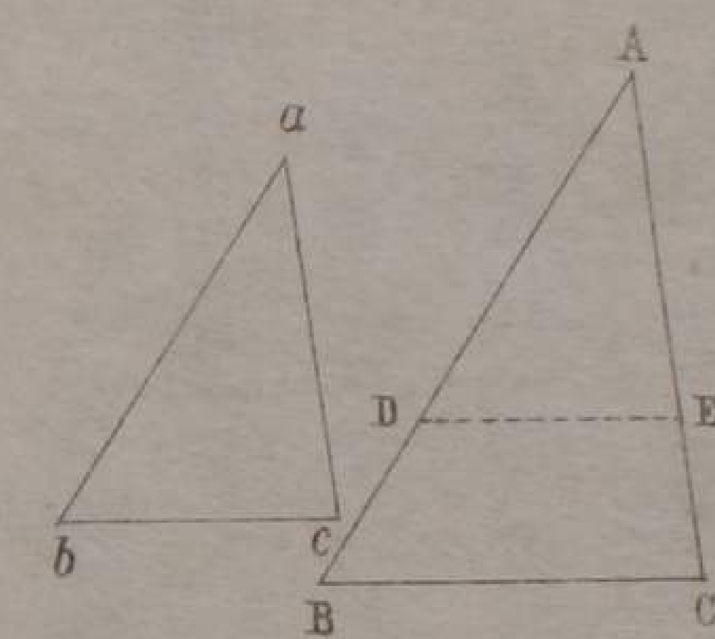
推論

二個の三角形互に相等しき二角を有つ時は相似形なり其故は此三角形の第三の角は(第九教第三設論の推論)相等しけれはなり

第三設論

二個の三角形比例せる二邊の間に等しき角を有つ時は相

似形ナリ



ABC abc ノ二個ノ三角形ニ於テA及ヒaノ二角相等シクAB ACノ二邊ガab acノ二邊ニ比例セル者トモ然ル時ハ此二個ノ三角形ハ相似形ナリ

ABノ上ニ於テabニ等シキADノ長サヲ取リ此D點ヨリDEノ直線ヲBCト平行ニ作ル時ハADE ABCノ二個ノ三角形ハ(第一設論)相似形ナリ而シテ其各相當邊ハ比例ヲ為ス然ルニabcノ三角形ノab acノ二邊ハ設想ニ因リABCノ三角形ノAB ACノ二邊ト比例ヲ為ス故ニ亦ADEノ三角形ノAD AEノ二邊ト比例ヲ為ス而シテ

$$\frac{ab}{AD}=\frac{ac}{AE}$$

ヲ得

AE

然ルニADハabニ等シキ故~~ab~~ハacニ等シ而シテADE abcノ二個ノ三角形ハ相等シ其故ハ互ニ相等シキ二邊ノ間ニ等シキ角ヲ有テバナリ故ニabcノ三角形ハABCノ三角形ト相似形ナリ

第四設論

二個ノ三角形比例セル各相當邊ヲ有ツ時ハ相似形ナリ

ABC abcノ二個ノ三角形ニ於テAB AC BCノ三邊ab ac bcノ三邊ト比例ヲ為ス者トモ然ル時ハ此二個ノ三角形ハ相似形ナリ

ABノ上ニ於テabニ等シキADノ長サヲ取リ此D點ヨリDEノ直線ヲBCト平行ニ作ル時ハ(第一設論)ADE ABCノ二個

の三角形は相似形なり而して其各相當邊は比例を爲す然るにabcの三角形の各邊は設想に因りABCの三角形の各邊と比例を爲す故に猶亦ADEの三角形に於ても同様なり即ち

$$\frac{ab}{AD}=\frac{ac}{AE}=\frac{bc}{DE}$$

の如し

然るにADはabに等しき故AEはacに等しくDEはbcに等しき故にADEabcの二個の三角形は互に相等しき三邊を有す而して相等しきに因てabcの三角形はABCの三角形と相似形なり

推論

以上三個の設論に於て證明せし二個の三角形の相似形の三個の場合は第三教に説明せし等形の三個の場合と相應す

第五設論

ABC A'B'C'の二個の三角形其各邊互に平行し或は直立せる時は相似形なり

A及ひA'の二角は其各邊互に平行し或は直立せる故(第九教第一第二設論)相等しきか或は並角を作す又是きはB B'及ひC C'の各角に於ても同理なり之に因て左の如き四個の設想を爲す

1° $A+A'=2\,dr$
$B+B'=2\,dr$
$C+C'=2\,dr$

2° $A+A'=2\,dr$
$B+B'=2\,dr$
$C=C'$

3° $A+A'=2\,dr$
$B=B'$
$C=C'$

4° $A=A'$
$B=B'$
$C=C'$

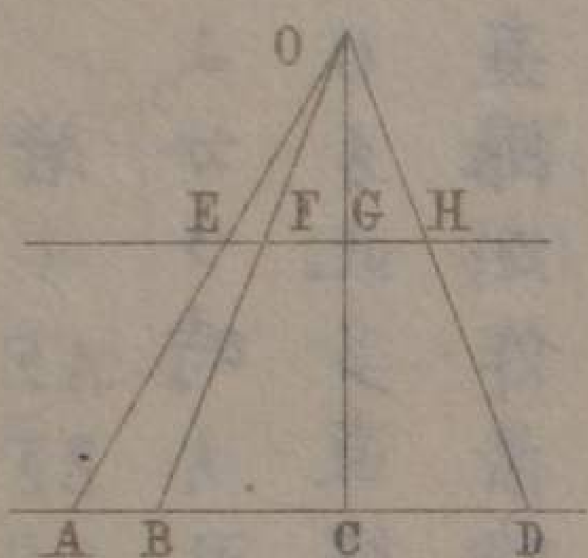
最初二個の各は理に合ふも其故は ABC $A'B'C'$ の二個の三角形の六個の角の和は（第九教第三設論）四直角に等しけれはなり又第三の設想に於ては A 及ひ A' の二角は必ふも直角なりと解せへし其故は ABC $A'B'C'$ の二個の三角形は二個の等角を有つ故に此第三の角は（第九教第三設論の推論）彼の第三の角に等しからさるへけれはなり然る時は此設想は第四の設想に異ならされ而して惟此第四のみ真實なる者なり故に ABC $A'B'C'$ の二個の三角形は互に相等しき三角を有す而して（第二設論）相似形なり

注意 ABC $A'B'C'$ の相似三角形の各相當邊は或は相平行し或は相直立す

第六設論

同し一點より分出せる多直線は二個の平行線上に於て之を比例せる各分に截断せ又之を反言せへし

AD EH は二個の平行線にして今某點 O より OA OB OC OD の各割線を作る時は此各線は AD 及ひ EH の上に於て之を比例せる各分に截断す



EF の直線は OAB の三角形の AB の邊と平行なる故 OEF OAB の二個の三角形は（第一設論）相似形なり而して EF と AB との比は OF と OB との比に等し又之に等しく OFG OBC の二個の三角形は相似形なり而して FG と BC との比は猶亦 OF と OB との比に等し故に $\frac{EF}{AB}=\frac{FG}{BC}$ を得又同理を以て $\frac{FG}{BC}=\frac{GH}{CD}$

を得

故に此O點より分出せる多直線はEHADの二平行線を比例せる各分に分つ

反言　若しAEBFCGDHの多直線ADEHの二平行線を比例せる各分に分つ時は此多直線は同し一點に於て交截す

Oは此多直線中の二個設使はBFDHの交點とし今OGの直線を作る時は其引長線は必すもCを過く

O點より分出せるOFOGOHの多直線は前の設論に從ひFHBDの二平行線を比例せる各分に分つ故にOGの線を引長されは設想に因りFGとGHとの比に於てBDの直線を分つ所のC點を過くるなり其故はBDを以て其B端より起りFG及ひGHの比に分つ事は惟一様のみなれは

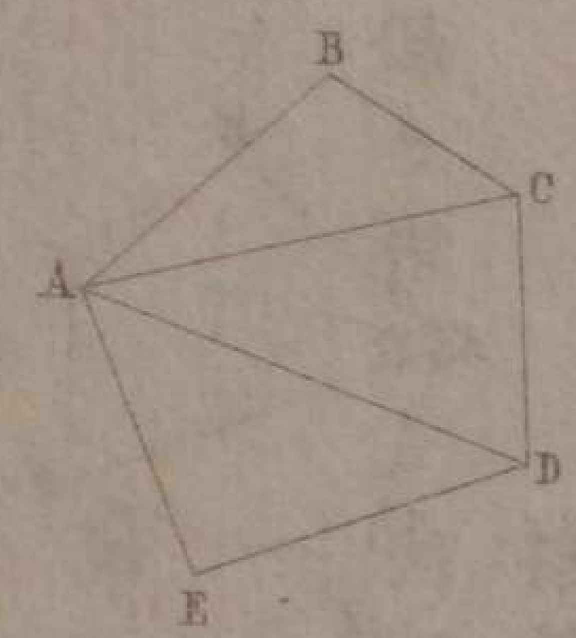
なり

又同理を以てAEの直線の引長線は亦O點を過くる事を證明し得るなり

注意　O點はADEHの二平行線の間に在る事を得へし

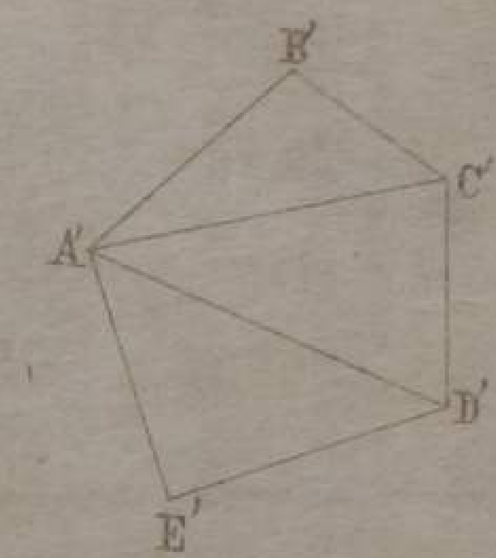
第七設論

二個の相似多角形は同數の相似三角形に分解さる事を得



設使はABCDE A'B'C'D'E'の二個の相似多角形に於て AA'の相當の二角項よりAC A'C' AD A'D'の相當の各對角線を作る時は此各線は此多角形を相當の同數の三角形に分つ而して此各三角形は二個つゝ相似形なり

之を證明せんには先つABC A'B'C'の二個の三角形は比例せる二邊の間に等角を有つ其故は此二個の多角形は相似形なる故ABとA'B'との比はBCとB'C'との比に等しく且つB B'の二角は設想に因り相等しければなり



因て(第三設論)此二個の三角形は相似形なり又ACD A'C'D'の二個の三角形は亦相似形なり其故は比例せる二邊の間に等角を有てはなり即ちACDの角はBCD BCAの二角の差にして又BCDの角は設想に因りB'C'D'の角に等しくBCAの角はABC A'B'C'の相似の二三角形に於て相當なる故B'C'A'の角に等し因てACDの角はB'C'D' B'C'A'の二角の差即ちA'C'D'の角に等しきなり又ABC A'B'C'の二個の三角形の相似形なるに因りACとA'C'との比はBCとB'C'との比に等し而してBCとB'C'との比は設想に因りCDとC'D'との比に等し因てAC A'C'の二邊はCD C'D'の二邊に比例をなすなり而して(第三設論)ACD A'C'D'の二個の三角形は相似形なる事を證し得べし

故にABCDE A'B'C'D'E'の二多角形は相似にして且つ相當なる同數の三角形に分解せる事を得るなり

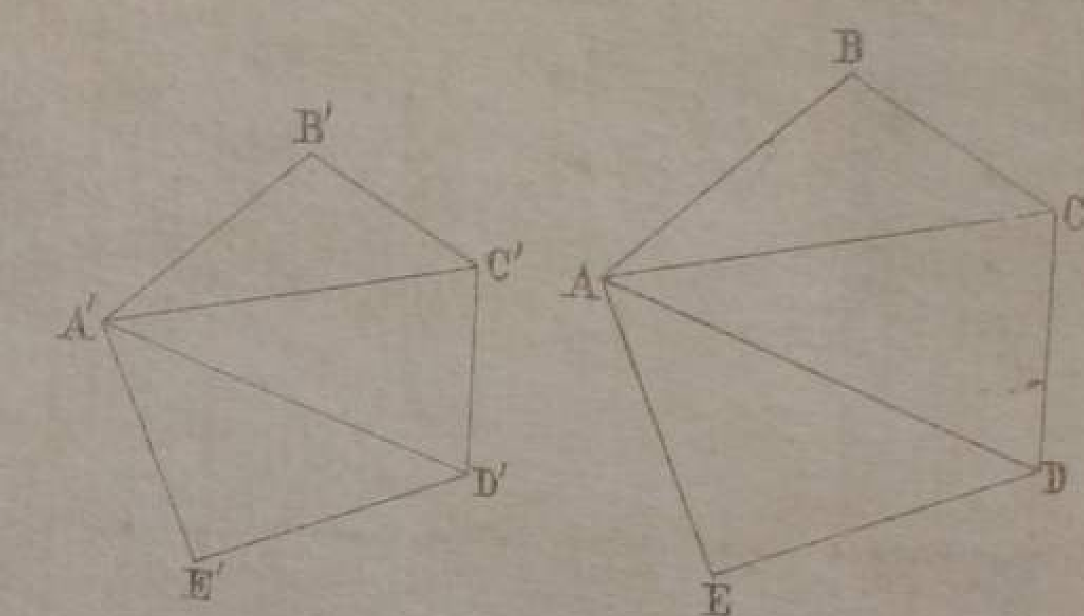
推論

二個の相似多角形の相當の對角線は相當の各邊と比例を為す

第八設論

反言 二個の多角形相似形にして且つ相當せる同數の三

角形より成る時は相似形なり



ABCDE A'B'C'D'E' の二個の多角形は相似形にして且つ相當せる同數の三角形より成る者とせる然る時は此二個の多角形は相似形なり

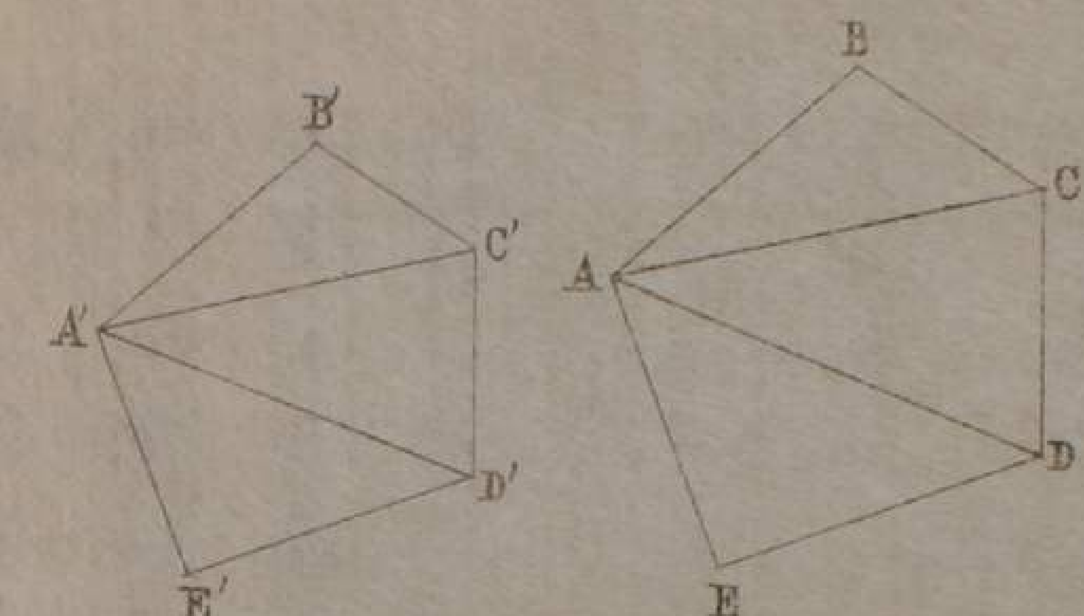
ABC A'B'C' の二個の三角形の等比は $\frac{AC}{A'C'}$ に等し故に又 AC A'C' を以て相當の邊とせる ACD A'C'D' の二個の三角形の等比も相等し又 ACD A'C'D' の二個の三角形の等比及び ADE A'D'E' の二個の三角形の等比も亦相等し其故は此各は共に $\frac{AD}{A'D'}$ に等しければなりこれに因て ABCDE A'B'C'D'E' の二個の多角形は比例せる相當の各邊を有つ又其各角は互に相等し其故は或は二個の等三角形の相當の角に因り或は其數個の等角より成る者なればなり設使は B 及び B' の二角は ABC A'B'C' の等三角形の相當の角なるを以て相等しく又 BCD の角は BCA ACD の二角の和に等しふして BCA ACD の二角は B'C'A' A'C'D' の二角に等しき者なり然るに B'C'D' の角は B'C'A' A'C'D' の二角の和に等し故に BCD の角に等し

之に因て ABCDE A'B'C'D'E' の二個の多角形は互に相等しき各角を有ち且つ比例せる相當の各邊を有つ故に相似形なりと知る

第九設論

A'

ABCDE A'B'C'D'E' の二個の相似多角形の周邊は相當の各邊と比例を為す



此二個の多角形は相似形なる故其相當の各邊は比例を為す即ち $\frac{AB}{A'B'}$ $\frac{BC}{B'C'}$ $\frac{CD}{C'D'}$ 等の比は相等しく而して數個の等比に關係せる數學の設論に從ひ

$$\frac{AB+BC+CD\ etc.}{A'B'+B'C'+C'D'\ etc.}=\frac{AB}{A'B'}$$

を得然るに分子 AB+BC+CD etc. は ABCDE の多角形の各邊の和にして分母 AB+BC+CD etc. は A'B'C'D'E' の多角形の各邊の和なり故に此二個の多角形の周邊は AB A'B' の相當の二邊と比例を為す

問題

一 ABC の三角形あり其 AC 邊より AA' の隨意長を減し BC 邊に之と等しき BB' の長さを增す時は此 A'B' の新邊を AB の舊邊にて截り AC BC の原二邊と交比を為すと謂ふ此證を求む

二 半圓形内或は三角形内に正方形を容るゝ事を求む

三 圓形内に二等邊三角形を容るゝ事を求む但し其底と高さの和或は差は設くる者とす

四 三角形の三角頂より其對邊の中央に作る直線は一個の同點に於て交截し而して此點は此三直線を各角頂より起りて二と一との比に分つ

五 若し三個の直線同し一點を過くる時は其内一個の直線上の某一點より他の二直線までの距離の比は常數なり

六 直交せる二直線上に於て三角矩の斜邊の二端を滑走せしむる時は其直角頂にて作る線は如何

七 設くる所の一點を過きて圓周に多直線を作り此各直線を設くる所の二長m及びnの比に分つ時は此分點の幾何地は如何

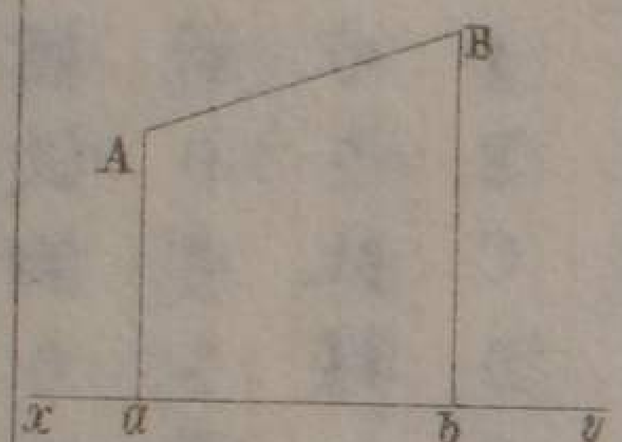
八 三角形に外切せる三角形を作る事を求む但し是を他の設くる所の三角形と相似形にして且つ最大ならしむる事を要す

第二十三第二十四教

定説

一點Aより無界直線xyの上に作る垂線の底aを此線上に於ける此A點の畫形影と名く

若しABの直線のA及びBの二端より無界直線xyの上に垂線を作る時はA及びBの二點の畫形影の距離abをxyの上に於けるABの線の畫形影と名く



次の諸設論の語を簡にせんか為めに同じ一を以て測りたる二線の度を標せる數の相乘を此線の相乘と名け又此數の二方を此線の二方と名く

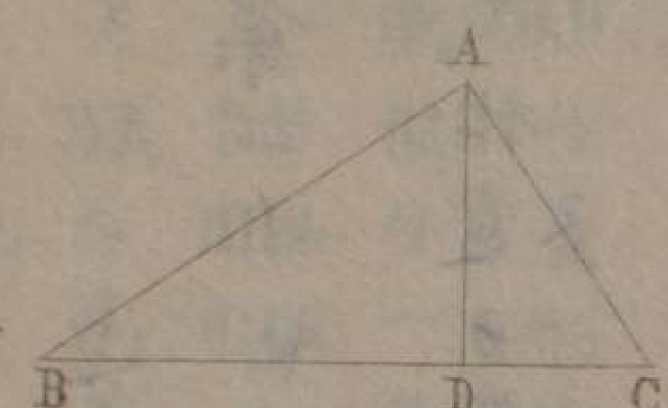
若しＡＢＣＤの四數に於て第一第二の比 $\frac{A}{B}$ 第三第四の比 $\frac{C}{D}$ に等しき時は此諸數中の最後數Ｄは之を他の三數ＡＢＣの第四率と名く

若しＢ及びＣの二個の中數相等しき時は $\frac{A}{B}=\frac{C}{D}$ の相等式は $\frac{A}{B}=\frac{B}{D}$ となり而して第四率のＤは之をＡ及びＢの二數の第三率と名く而してＢの中數はＡ及びＤの二數の中率なり

之に因て前の相等式より $B^2=A\times D$ を得故に此Ａ及びＤの二數の中率Ｂは此二數の相乘の平方根に等し

第一設論

ABCの直三角形の直角頂ＡよりＢＣの斜邊上に垂線ＡＤを作る時は第一直角の各邊は斜邊及び此直邊に隣接せる各分の中率なり第二垂線ＡＤは斜邊の二分ＢＤ ＤＣの中率なり

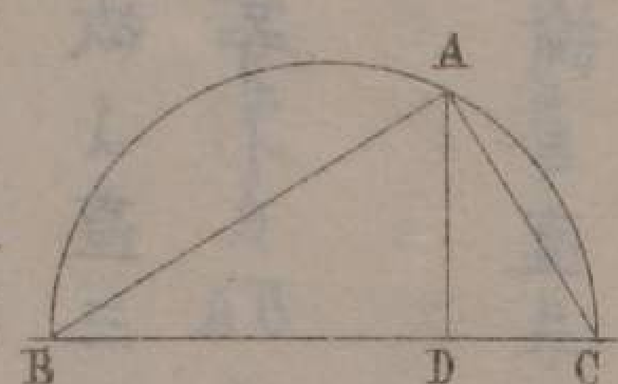


第一ABDの三角形は(第二十一款第二設論)ABCの三角形と相似形なり其故は其三角互に相等しければなり即ち此二形は共に直三角形にしてＢの公角を有ち又BADの角はACDの角に等し此相似三角形の相等の各邊を比較し以て $\frac{BC}{AB}=\frac{AB}{BD}$ を得故に直角の一邊ＡＢはＢＣの斜邊とＡＢに隣接せ

る BDの分との中率なり
ADC ABCの二個の三角形ハ猶亦相似形なり其故ハ其三角互に相等しけれハなり因て其相當の各邊を比較して以てACの邊ハBC CDの中率なる事を證明し得るなり
第二 ABD ACDの二個の三角形ハABCの三角形と相似形にして相當の等角を有つ故に互に相似形なり故に $\frac{BD}{AD}=\frac{AD}{CD}$ を得因て垂線ADハ斜邊の二分BD CDの中率なり

推論

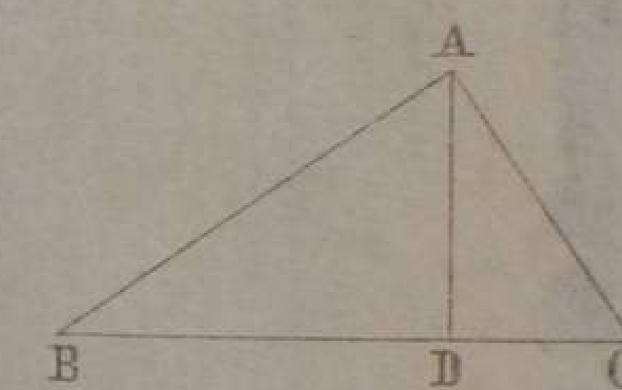
ABCの直三角形のBCの斜邊上に於て之を中徑として圓周を作る時ハ此圓周ハ(第十五教第四設論の推論)BACの直角のAの角項を過ぐ之に因て前の設論を左の如く改唱せる事を得るなり



第一 ABの通弦ハ其一端を過ぐるBCの中徑と此中徑上に於けるBDの畫形影との中率なり
第二 圓周の一點AよりBCの中徑上に作れる垂線ADハ中徑の各分BD CDの中率なり

第二設論

ABCの直三角形のBCの斜邊の二方ハ他の二邊AB ACの二方の和に等し
ADハ直角の角項Aより斜邊上に作れる垂線にして此



直角の各邊は(第一設論)斜邊及ひ之に隣接せる各分との中率なる故

$AB^2=BC\times BD$

及ひ

$AC^2=BC\times DC$

の相等式を得此各邊を相加へ

$AB^2+AC^2=BC\times(BD+DC)$

即ち

$AB^2+AC^2=BC^2$

を得るなり

故に直三角形の斜邊の二方は他の二邊の二方の和に等し

注意

此設論は直三角形の二邊を知て他の一邊を計算するに用ゆへき者なり

第一 設使は AB を 4^m AC を 3^m とせは

$BC^2=16+9=25$

なる故

$BC=5^m$

なり

第二 若し BC を 13^m AC を 5^m とせは

$169=AB^2+25$

よりして

$AB^2=169-25=144$

となり因て

$AB=12^m$

を得るなり

第一推論

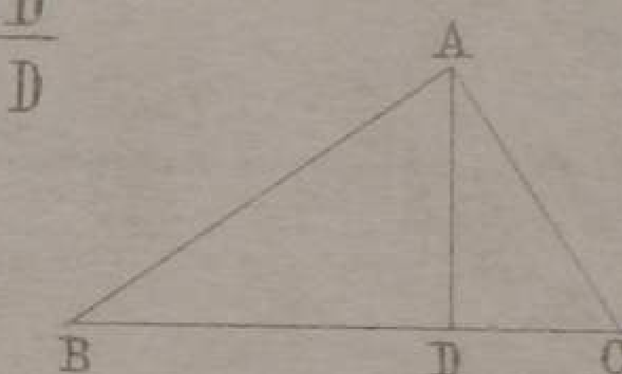
直三角形の直角の二邊の二方は斜邊上に於ける此二邊の畫影と比例を為す

ABCの直三角形のAの角頂より其斜邊上に垂線ADを作る時は第一設論

$AB^2=BC\times BD$

$AC^2=BC\times CD$

を得因て



$\dfrac{AB^2}{AC^2}=\dfrac{BD}{CD}$

なり

第二推論

直三角形の~~斜邊の二方及ひ~~直角の一邊の二方は斜邊上に於ける此直角邊の畫形影と斜邊と比例を為す

と斜邊の二方

其故は $AB^2=BC\times BD$ の相等式の二邊を BC^2 にて除し以て

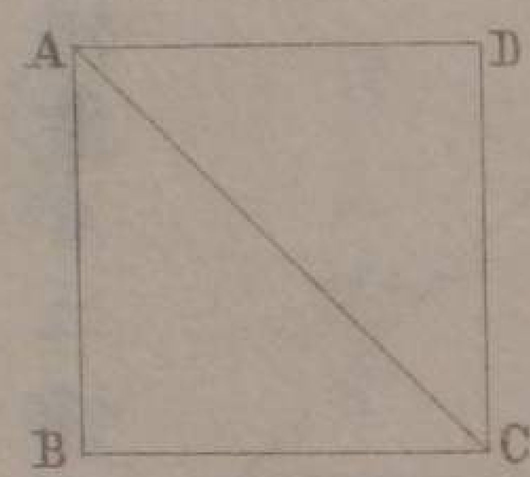
$\dfrac{AB^2}{BC^2}=\dfrac{BD}{BC}$

を得

きはなり

第三推論

ABCDの正方形のACの對角線とABの一邊との比は$\sqrt{2}$に等し



ABCの三角形は直三角形にして且つ二等邊なるが故

$AC^2=AB^2+BC^2$

$=2AB^2$

を得是きより

$\dfrac{AC}{AB}=\sqrt{2}$

を得るなり」

凡そ整數或は分數の二方數の二に等しき者の成立せさる事は數學に於て已に之を解明せり之に依て左論を生す

正方形の對角線及ひ一邊は互に度り盡すへからさる二線

なり

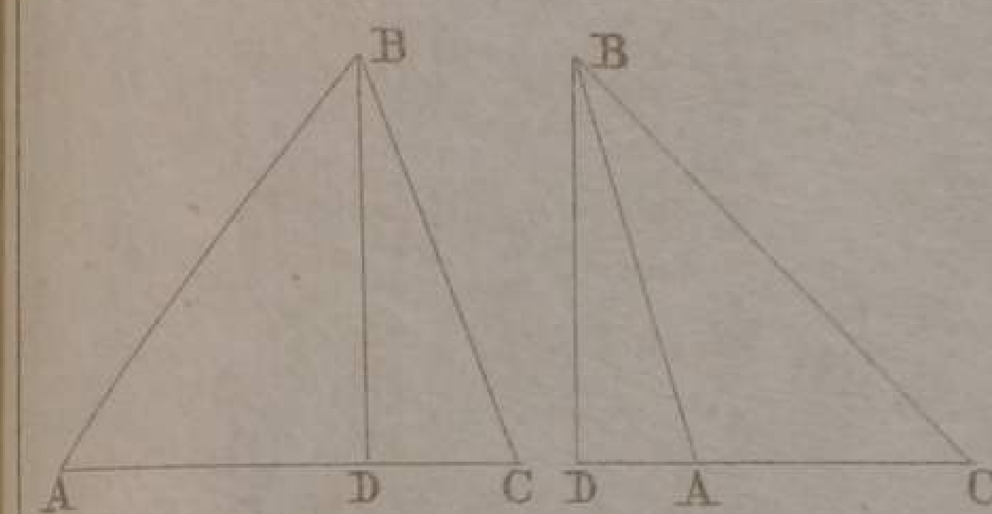
第三設論

三角形に於て鋭角の對邊の二方は他の二邊の二方の和より此二邊中の一個と此邊上に於ける他の一邊の畫形影との相乘の二倍を減せし者に等し

此設論及ひ次の設論を證明するには次の如き數學の設論を既に知りたる者と注意すへし

第一 二數の和の二方は此各數の二方の和に其相乘の二倍を加ふる者に等し

第二 二數の差の二方は此各數の二方の和より其相乘の二倍を減する者に等し



設使はABCの三角形に於てABの邊はCの鋭角に對する者なり今此邊の端界Bより其對邊ACの上に垂線を作るときは此垂線はBACの角の鋭角或は鈍角なるに從ひ此三角形の内方或は外方に在り然れとも此二個の場合に於てABDの三角形は直三角形にして(第二設論) $AB^2=BD^2+AD^2$ を得而して若しBACの角鋭角なる時はADの直線はACの邊と此ACの上に於けるBCの邊の畫形影DCとの差 AC−DC に等し又之に反して若しBACの角鈍角なる時はADの直線は

BCの畫形影ACより大なる故DC−ACに等し然るに此二個の

設想に於てADの二方は皆 $AC^2+DC^2-2AC\times DC$ に等し故に $AB^2=BD^2+AC^2+DC^2-2AC\times DC$ を得是れBAC

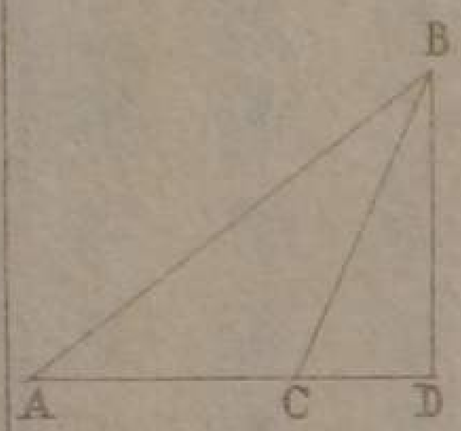
の角の大小如何に關せざる者なり又BCDの三角形は

直三角形なる事を注意し前のABの式に於て BC^2 を以て

BD^2+DC^2 に代用し遂に $AB^2=BC^2+AC^2-2AC\times DC$ を得るなり

第四設論

三角形に於て鈍角の對邊の二方は他の二邊の二方の和に此二邊中の一個と此邊上に於ける他の一邊の畫形影との相乘の二倍を加へし者に等し



設使ばABCの三角形に於てABの邊はACBの鈍角に對せる者なり今此邊の端界Bより其對邊ACの上に於て垂線BDを作る時はABDの

三角形は直三角形なる故第二設論 $AB^2=BD^2+AD^2$ を得然るにADの

直線はACの邊と此ACの上に於けるBCの邊の畫形影との和 $AC+CD$ に等し其故は垂線BDはABCの三角形の外方に在れはなり故にADの二方は $AC^2+CD^2+2AC\times CD$ に等し因て

$$AB^2=BD^2+AC^2+CD^2+2AC\times CD$$

を得るなり

又BCDの三角形は直三角形なる事を注意し前の AB^2 の式に於て BC^2 を以て BD^2+CD^2 に代用し遂に

$$AB^2=BC^2+AC^2+2AC\times CD$$

を得るなり

推論

以上三個の設論よりして左論を生す

三角形の一角は之に對せる一邊の二方他の二邊の二方の和より小なるか或は等しきか又は大なるかに從ひ鋭角直角鈍角なる者なり

三角形の三邊の測度を知る時は以上の諸設論は他の

二邊上に於ける一邊の畫形影を計算し因て又一個の角頂より其對邊上に作れる垂線を計算するに用ゆへき者なり設使は ABC の三角形に於て $AB=4^m$ $BC=3^m$ $AC=2^m$ なる時 BD の高さを計算せんとせるには先つ最初に AB の對角 ACB の鈍角なる事を注意すへし其故は AB の二方即ち 16 は BC 及ひ AC の二方の和即ち 9+4 より大なれはなり故に

$$AB^2=BC^2+AC^2+2AC\times CD$$

即ち

$$16=9+4+4\times CD$$

の相等式を得因て

$$CD=\frac{16-13}{4}=0^m,75$$

を得るなり是に於て BCD の三角形に於て（第二設論）

$$BD^2=BC^2-CD^2$$

即ち

$$BD^2=9-0,5625=8,4375$$

を得因て

$$BD=\sqrt{8,4375}=2^m,905$$

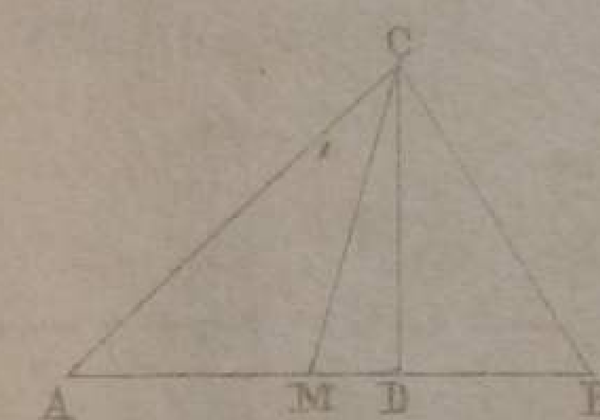
を得但し是れは半密理米突以下の差に於て算せる者なり

第五設論

三角形の二邊の二方の和は第三邊の半の二方と此邊の中

央を其對角頂に聯接せる直線の二方との和の二倍に等し

設使ABCの三角形に於てABの邊の中央をMとせよCMの直線にて此三角形をACM BCMの二個の三角形に分つ而して此各三角形のAMC BMCの二隣角は並角を為す今ABの邊の對角頂Cより此直線上に垂線CDを作る時はACMの三角形のACの邊はAMCの鈍角に對せるを以て(第四設論)



$AC^2=AM^2+CM^2+2AM\times MD$

の相等式を得又BCMの三角形のBCの邊はBMCの鋭角に對せるを以て(第四設論)

$AC^2=AM^2+CM^2-2BM\times MD$

の相等式を得此二個の相等式の各邊を相加ふる時はBMの直線はAMの直線に等しき故之を約して

$AC^2+BC^2=2AM^2+2CM^2$

を得是れ即ち此設論

B B

を證明せる者あり

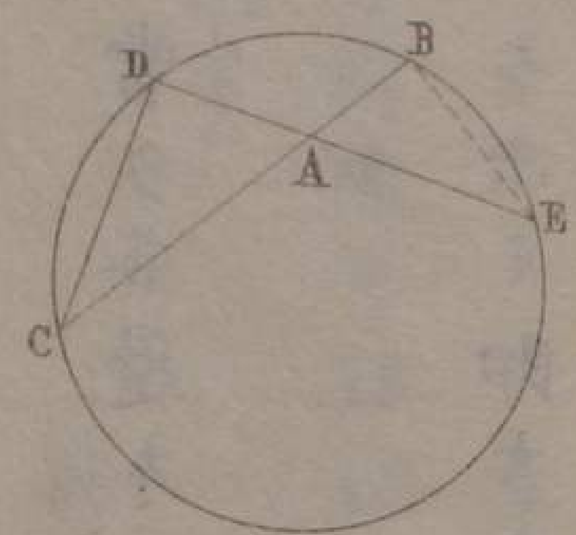
注意

此設論は三角形の三邊の測度を知りたる時或る角頂を其對邊の中央に聯接せる直線を算するに用ゆへき者あり通常此直線を三角形の中央線と名く

第六設論

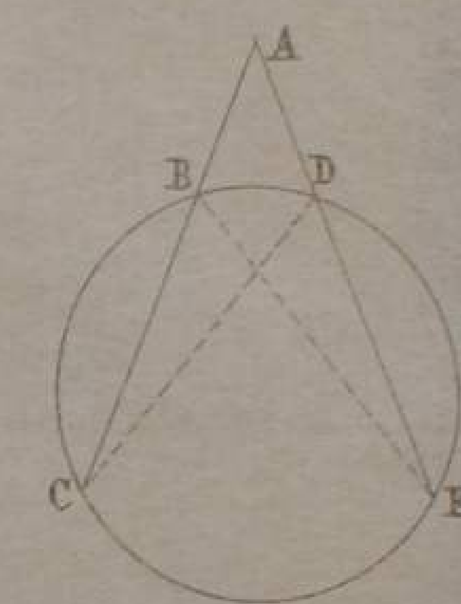
圓形の平面上に設くる一點Aより諸割線を作る時は此點より各割線と圓周との各交點までの距離の相乘は常數なり

此A點は圓形の内方或は外方に在る事あり今先つ此點を内方に在る者と定め此點より AB AD の某直線を作る時は一はD及びEの二點一はB及びCの二點に於て此圓周を截る是に於て BE CD の二通弦を作る時は ABE ACD の二個の三角形は(第二十一教第二設論)相似形なり其故は BAE DAC の二角は頂に於て相對し ABE ADC の二角は(第十五教第四設論) CDBE の同し圓分内に容るゝを以て相等しけれはなり此相似三角形の相當の各邊を比較し



以て相等式 $\frac{AB}{AD}=\frac{AE}{AC}$ を得是れより $AB\times AC=AE\times AD$ を得因て此證とす

若し又此A點圓形外に在る時は AC AE の二割線を作る



に一はD及びEの二點一はB及びCの二點に於て圓周を截る是に於てBE及びCDの二通弦を作る時はABE ACDの二個の三角形は相似形なり其故はAの公角を有ち又AEB ACDの二角は(第十五款第四設論)BCEDの同し圓分内に容るゝを以て相等しけれはなり此相似三角形の相當の各邊を比較して以て相等式

$$\frac{AB}{AD}=\frac{AE}{AC}$$

を得因て

$$AB\times AC=AD\times AE$$

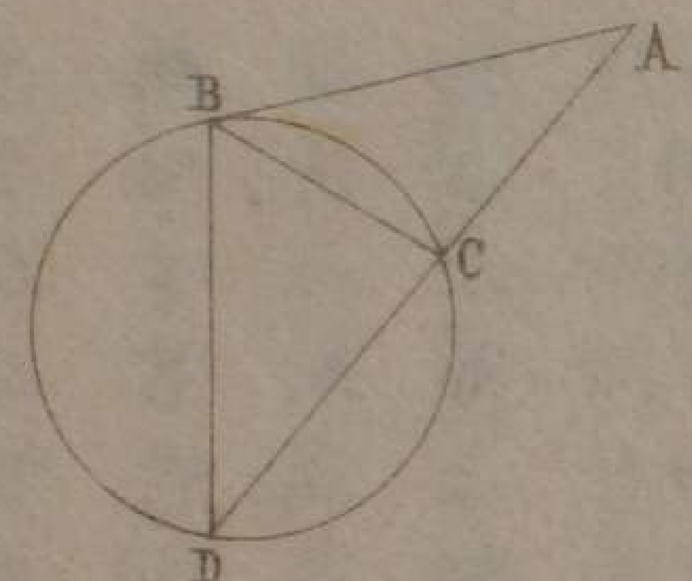
なる事を決せ即ち此設論を證明せる者なり

注意

ACの割線のAB ACの各分はAEの割線のAD AEの各分と反比例を為す

第七設論

圓形外に在る一點Aより此圓形に切線AB及び其割線ADを作る時は此切線は此割線と此割線の外分ACとの中率を為す

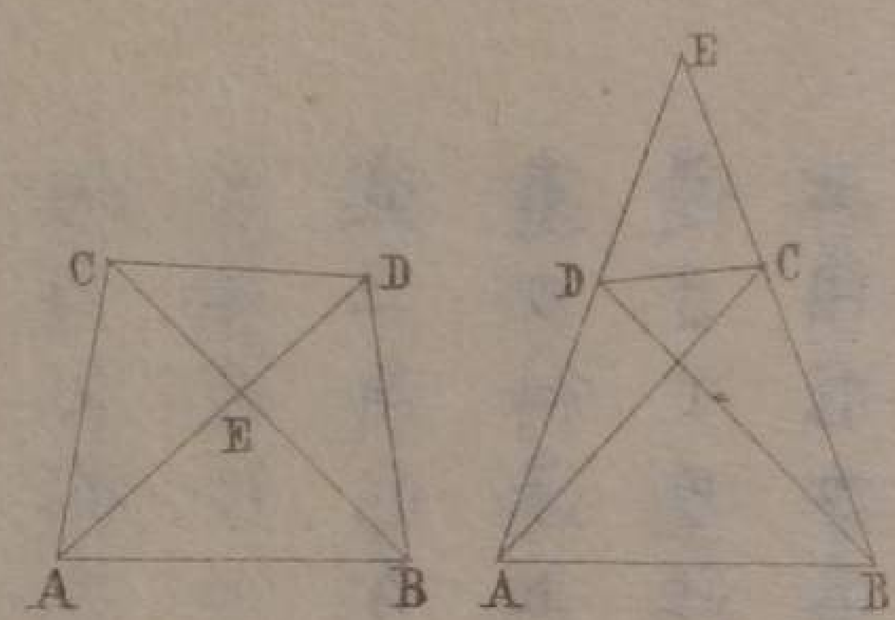


此設論は前の設論の推論となし得へし其故は切線ABは一個の割線にして其圓周との二交點相合せる者と考ふる事を得れはなり故に次の方法を以て直に之を證明し得るなり先つBC及びBDの二通

弦を以てBの切點を割線と圓周との交點C及びDに聯接せる時はABC ABDの二個の三角形は相似形なり其故はAの公角を有ち且つABC ADBの二角は(第十五教第四設論)其二邊の間に函めるBCの同じ孤の半を以て測る故に相等しければなり是によりして $\frac{AD}{AB}=\frac{AB}{AC}$ を得因て此證とす

第八設論

AD BCの二直線或は其引長線Eの一點にて相交り AE×DE=BE×CE を為せ時はAD BCの各端は同じ圓周上に在り



相等式 AE×DE=BE×CE の二邊を BE×DE の相乘にて除し以て $\frac{AE}{BE}=\frac{CE}{DE}$ を得之に因て ACE BDE の二個の三角形は比例せる二邊の間にEの公角を有つ故に(第二十一教第三設論)相似形なり而して CAE BDE の相當の二角は相等し故に若しCDの直線上に於て CAD の角を容るべき圓分を作る時は此圓分の孤はBの角頂を過ぐ因てA B C Dの四點は同じ圓周上に在り

數上の問題

一 半徑の長さ$0,^{m}5$及ひ$1,^{m}5$なる二圓形相交り其交點中の一個に作れる各切線相直交せる者に於て其二中心の距離を求む

二 二個の同心圓形の半徑36^{m}及ひ20^{m}なるあり今此大圓形内に於て小圓形に切する通弦を作り此通弦の長さを求む

三 直三角形の直角の二邊16^{m}及ひ24^{m}なる者あり此各直邊の斜邊上に於ける畫形影及ひ此直角頂より其對邊までの距離を算する事を求む

四 三角形の三邊16^{m} 25^{m} 39^{m}なる者に於て其各高各中央線及ひ各角の平分線を算する事を求む

五 12^{m}及ひ15^{m}の半徑の二圓形に於ける公通弦の長さを算する事を求む但し二中心の距離ハ18^{m}なり

圖上の問題

一 圓形の平面上に設くる一點より互に直交せる二割線を作る時ハ此點より圓周及ひ各割線との四個の交點までの距離の二方の和ハ常數なり

二 或る二定點までの距離の二方の和ハ常數なる所の各點の幾何地ハ一個の圓周にして其中心ハ此二點を聯接せる直線の中央と相合す

三 三角形の二邊の二方の差ハ其第三邊に此邊の中央線の其方向上に於ける畫形影を乘せし者の二倍に等し

二個の定點までの距離の二方の差常數なる所の各點の幾何地は此二定點を聯接せる直線に直立せる直線なり

四　設くる所の二點を過きて一個の圓周を作り設くる所の圓周を二個に等分せしむる事を求む

五　設くる所の二點を過き且つ設くる所の直線に切せる圓周を作る事を求む

六　設くる所の一點を過きて一個の圓周を作り設くる所の二直線に切せしむる事を求む

七　設くる所の二點を過きて一個の圓形を作り設くる所の直線或は圓形に切せしむる事を求む

八　二個の圓形の各中心を聯接せる直線上に於て二點を求む但し此二點より各圓形の中心までの距離の相乘は此圓形の半徑の二方に等しき者なり

九　一點A及び直線並に圓形を設け而して此直線上に於て一點Bを求む但し此B點を過きて作る圓周の切線はBAの距離に等しからしむるなり

十　二邊平行なる形の各對角線上に於て之を中徑として作る圓形は一個の公通弦を有す而して此公通弦は此形の平行せさる二邊の交點を過ぐる者なり

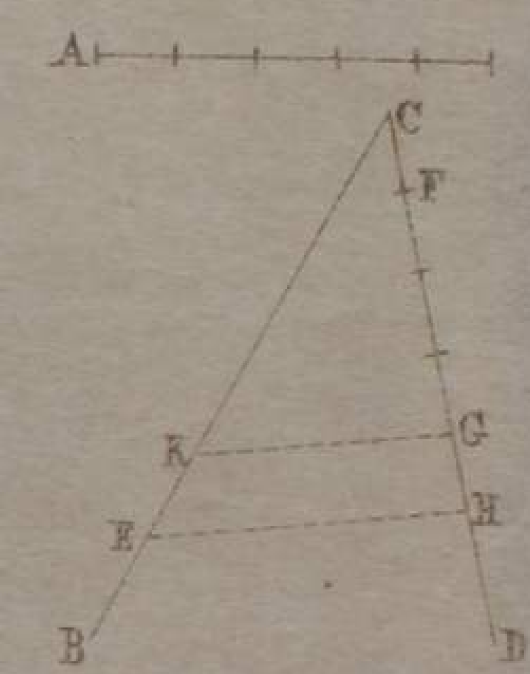
第二十五第二十六教

第一問題

直線を若干數に等分する事を求む

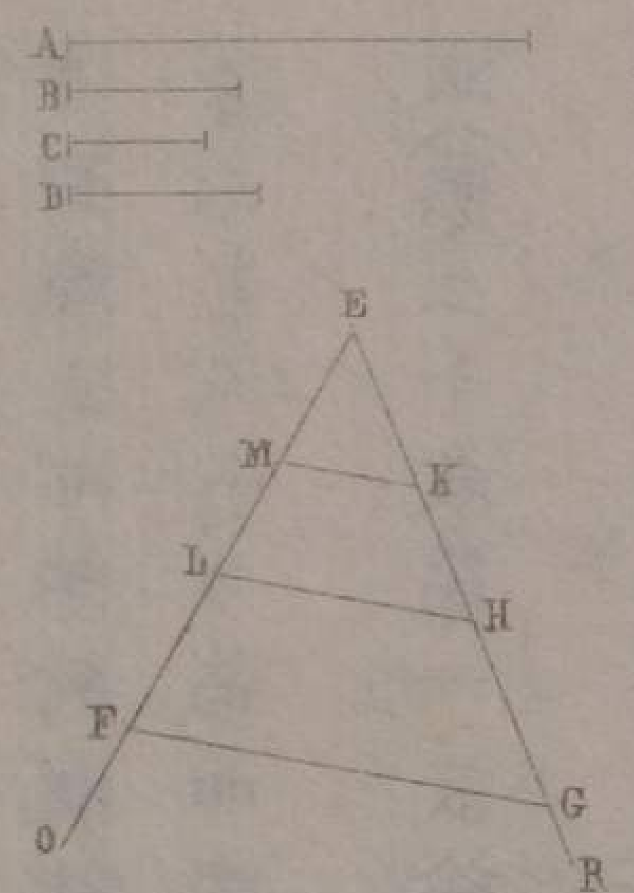
設使はAの直線を五個に等分せんとするにはBCDの某

角のBCの邊上に於てAに等しきCEの長さを取り他の邊CDの上に於て隨意の長さCFを五次逐次に取るなり而してGを其第四の分點Hを第五の分點となせ是に於てEHの線を作りGKを作るなり然る時は此GKの直線は(第二十款第一設論)CEHの三角形のCE CHの二邊を比例せる各分に分つ其故は此直線は第三邊に平行せればなり然るにGHの分は設想に因りCHの邊の五分の一なり故にEKの分は猶亦CEの邊の五分の一即ちAの直線の五分の一なり故に此Aの直線を五個に等分せるには此線上に於てEKの長さを五次逐次に取れば可なり



第二問題

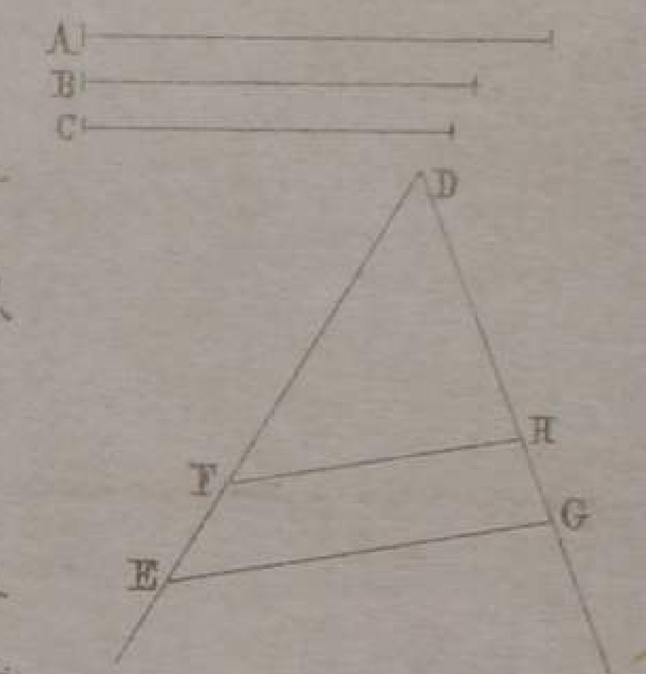
Aの直線を設くる所の三長B C Dに比例せる各分に分つ事を求む



OERの某角のOEの邊上に於てAに等しきEFの長さを取り他の邊ERの上に於て設くる所の三線B C Dと互に相等しきEK KH HGの長さを取り然る後FGの線を作りH及びKの各點より平行線HL KMを作るなり然る時は此各平行線は(第二十款第一設論の推論)EF即ちAの直線をEK KH HGの各線即ち設くる所の三線B C Dと比例せる各分に分つ

第三問題

ABCの三線に比例せる第四率線を求む



EDGの某角のDEの邊上に於て設くる所の直線ABと互に相等しきDE DFの長さを取り他の邊上に於てCに等しきDGの長さを取り然る後EGの直線を作りF點より平行線FHを作る然る時は此DHの直線は求むる所の第四率線なり其故はFHはEGに平行せる故(第二十教第一設論)

$$\frac{DE}{DF}=\frac{DG}{DH}$$

即ち

$$\frac{A}{B}=\frac{C}{DH}$$

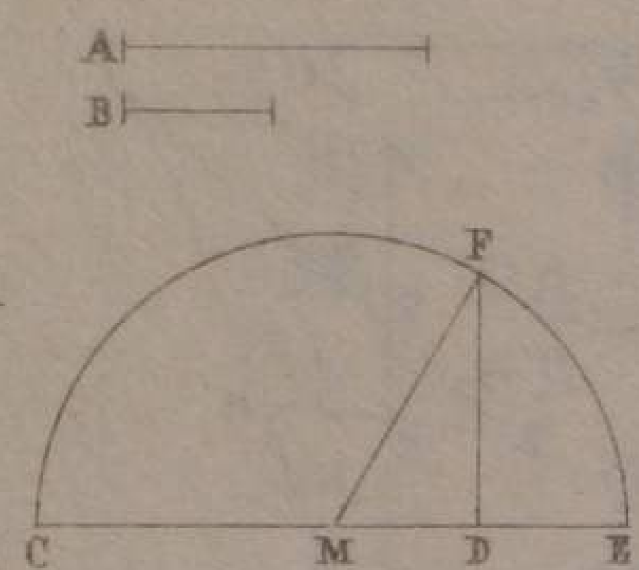
を得ればなり

注意

若しB及びCの二線相等しき時はDHはA及びBの二線の三率線なり

第四問題

設くる所の二直線A及びBの中率線を作る事を求む



無界直線上に於てA及びBと互に相等しきCD DEの二長を取り然る後CEの上に於て之を中径として半圓周を作りD點よりCEの上に垂線を作り之をF點まで引長して圓周と相遇せしむ然る時は此垂線は即ち求むる所の線なり其故は此線は(第二十三教第一設論の推論)CEの中径のCD DEの各分即ち設くる所の二線A及びBの中率線なればなり

注意

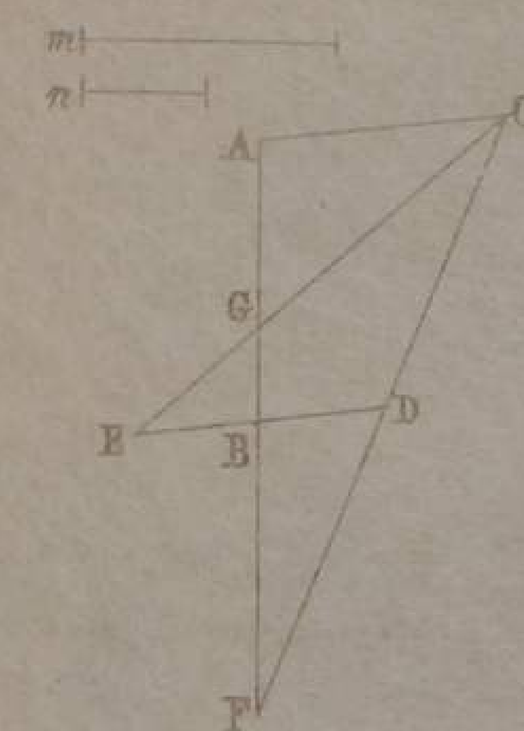
CD DEの二線の中率線DFは此二線の半和MFより小なる者な

り

第五問題

ABの直線を設くる所の二線m及ひnに比例せる各分に分つ所の二點を作る事を求む

ABの端界Aよりmに等しきACの某直線を作り他の端界BよりACに平行線を作りB點の各傍に於てnに等しきBD BEの長さを取り然る後CD CEの二直線を作る時はABとG及ひFの二點に於て相交はる而して此二點は此ABの線をm及ひnの二線に比例せる各分に分つ者なり



AC EBの二線は相平行なる故ACG BEGの二個の三角形は（第二十一款第一設論）相似形なり而して其二邊比例を為す事

$$\frac{GA}{GB}=\frac{AC}{BE}$$

の如し

又同理を以てACF BDFの三角形は相似形なる故

$$\frac{FA}{FB}=\frac{AC}{BD}$$

を得

然るにBD BEの二線は相等しき故

$$\frac{GA}{GB}=\frac{FA}{FB}=\frac{m}{n}$$

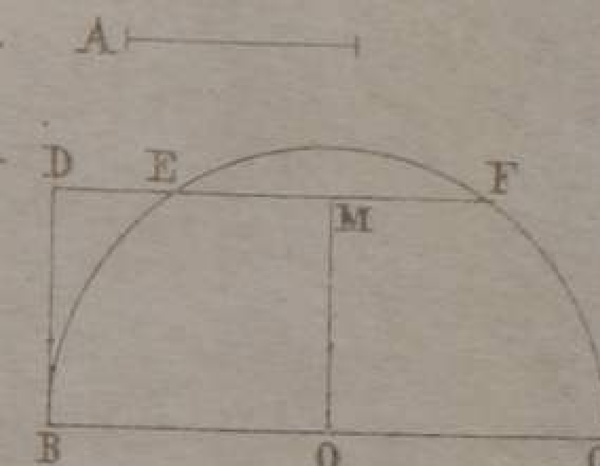
を得るなり

第六問題

二直線の積及ひ其和を知て此二線を作る事を求む

設使はBCを求むる所の二線の和となし其積は設くる所の直線Aの二方に等しき者ともし此BCの上に於て之

~~$AE=AD+DE$~~ ~~$AB^2=(AC+AD)AC$~~
~~$AD=AC$~~ ~~$AB^2=AE^2+AD^2$~~
~~$DE=AB$~~



を中径として半圓周を作りB點より此中径上に垂線BDを作り此線上に於てAに等しきBDの長さを取り然る後此D點よりBCに平行してDEの直線を作る時は此線はE及びFの二點に於て圓周を截る而して此DFの全割線及び周外に在るDEの一分は即ち求むる所の二線なり其故は其相乗は(第二十三款第七設論)切線BDの二方即ちA^2に等しく又其和はBCに等しければなり

蓋し中心Oより此割線上に垂線OMを作る時は此EFの通弦を二個に等分して DE+DF の和はMDの二倍即ちOBの半径の二倍即ちBCの中径に等しければなり

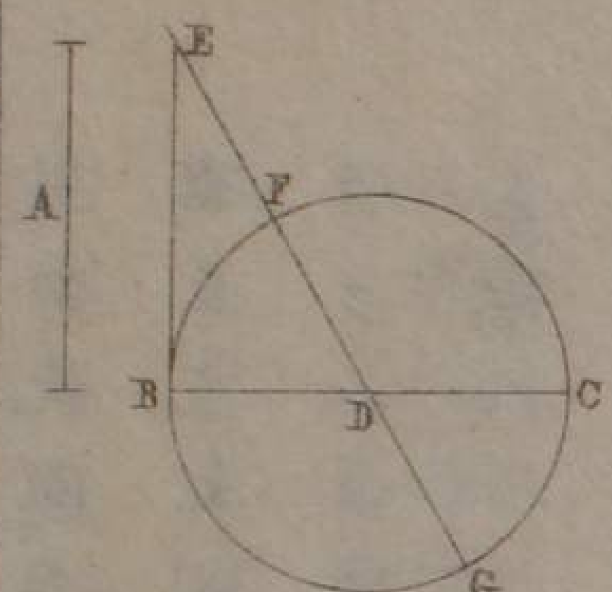
注意

BDの長さ半径より小なる時に非ざれば此DEの直線は圓周に交はらざるなり故に此問題は若し設くる所の直線A二線の和BCの半より小なるか或は大なりとも之に等しき時に非ざれば理に合はず

第七問題

二直線の差及び其積を知て此二線を作る事を求む

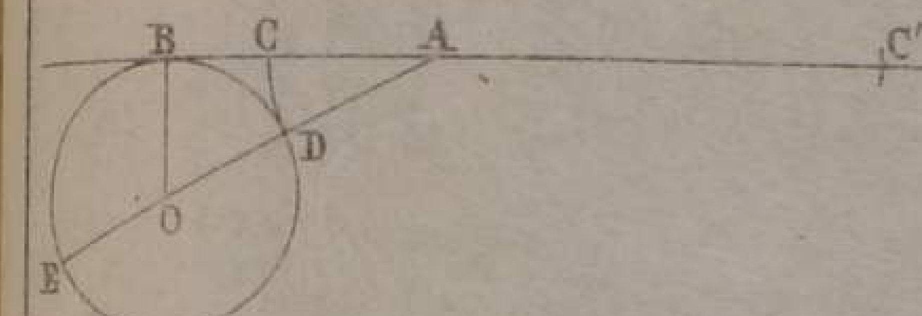
設使はBCを求むる所の二直線の差となし其積は設くる所の直線Aの二方に等しき者とも此BCの上に於て之を中径として圓周を作りB點より此中径上に垂線を作り此線上に於てAに等しきBEの長さを取り然る後E點



EF

及ひ此圓周の中心Dニ因てEGの割線を作ルナり然ル時ハ此全割線及ひ周外ニ在ルEFの一分ハ則ち求むル所の二直線ナり其故ハEG ~~FG~~ の差ハBCニ等しく又其積ハ(第二十三教第七設論)BE^2即ちA^2ニ等しけれハナり

第八問題



設くル所の直線を連比例ニ分つ事を求む

即ちACBCの二分ニ分ち其大分ACハ小分BCとABの全線との中率ナらしむル事を求むルナり

此問題ハ先つ已ニ解けル者と定めCを求むル所の點とナも然ル時ハ $\frac{AB}{AC}=\frac{AC}{BC}$ を得

是ニ於て諸等比の性質を此相等式ニ適用し $\frac{AB+AC}{AC+BC}=\frac{AB}{AC}$ ナり

と決も然ルニABの直線ハACBCの二直線の和ナル故 $(AB+AC)AC=AB^2$

を得

此新相等式を見れハC點を得ルニハAB+AC及ひACの二線即ち其差ハABニ等しく其積ハAB^2ニ等しき所の者を作り然ル後ABの上ニ於てA點より起りて此二線中の小

なる者に等しき長さを取れは可なる事知るへし是れ
よりして左の法を生す
AB の直線上 B 點に於て AB の半に等しき垂線 BO を作り
此 O 點より之を中心となし OB の半徑を以て圓周を作
り A 點及ひ圓形の中心とに因て AE の割線を作るなり
然る時は此 AE の全割線及ひ周外に在る AD の一分は即
ち其差 AB に等しく其積（第二十三款第七設論）AB^2 に等し
き二線なり故に此 AB の上に於て AD の線に等しき AC の
長さを取り以て此 C 點を得へし即ち此 C 點は AB を連
比例に分つ者なり

推論

a を以て AB の直線の長さとせは AOB の直三角形に於
て $AO^2=AB^2+BO^2$ 即ち $AO^2=a^2+\frac{a^2}{4}=\frac{5a^2}{4}$ を得るなり
然るに AC は AO−BO に等しき故 $AC=\frac{a\sqrt{5}}{2}-\frac{a}{2}=\frac{a(\sqrt{5}-1)}{2}$ なり又 AB の直線の他の
一分 BC は $\frac{a(3-\sqrt{5})}{2}$ に等し

注意

此問題は左の如き問題の一個の格段なる場合に過ぎず

設くる所の二點ABを過ぐる直線上に於て一點Cを求む但し此C點よりA點までの距離とB點までの距離とABの線との中率ならしむるを要す

前の法に因て得たるC點は明らかに此新題の性質に合せる事知るへし然るにABの直線の引長線の上に於て等しき性質を有つ所の他の點の成立せる事有り而して此點はB點の左方には在らざるなり其故は此點よりA點までの距離はB點までの距離とABの全長とより共に大なればなり故にA點の右方に於て求めざるへからず今C'を以て其位置となす時は$\frac{BC'}{AC'}=\frac{AC'}{AB}$を得因て$\frac{BC'-AC'}{AC'-AB}=\frac{AC'}{AB}$なり然るにABの直線はBC'及びAC'の二線の差に等し故に$(AC'-AB)AC'=AB^2$を得

此新相等式を見れば此C'點を得るには前の問題に於けるが如く其差ABに等しく其積AB^2に等しき所の$AC'-AB$及

びAC'の二線を作り次にABの上に於てA點の右方に於て此二線中の大分即ちAEの割線に等しき長さを取れば可なり

故に此新題は同じ方法にて得る所の二個の答解を有つ其故は二個の未知線AC' ACの差はABに等しく其積はAB^2に等しければなり又前の推論に於ける如くABの長さをaとすれば

$$AC'=\frac{a(1+\sqrt{5})}{2}$$

$$BC'=\frac{a(3+\sqrt{5})}{2}$$

を得

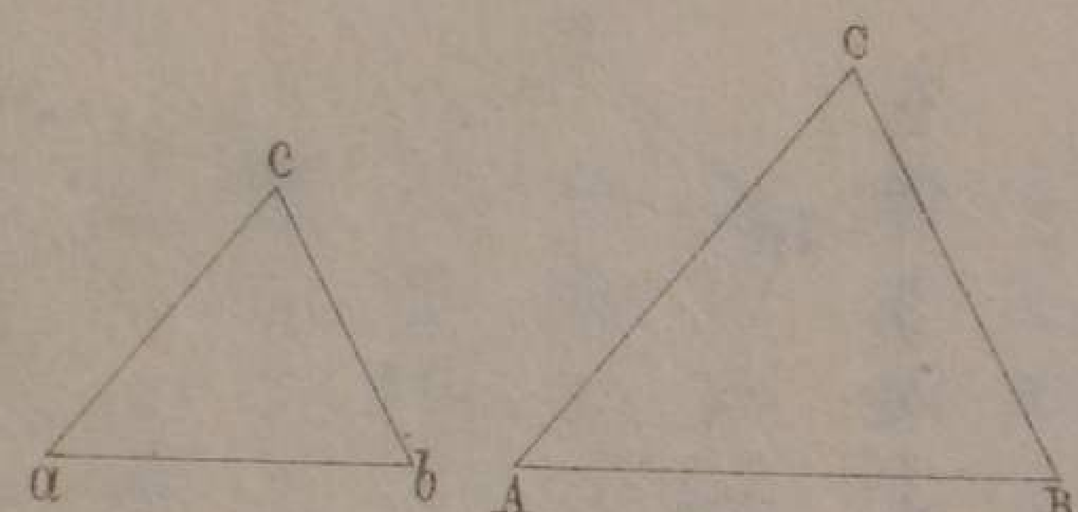
此AC BC AB BC'の各分の式は記憶する事最も要用なり其故は諸問題の解法中に於て屢之を用ゆる事あればなり

第九問題

設くる所の直線上に於て設くる所の三角形或は多角形と相似形なる三角形或は多角形を作る事を求む

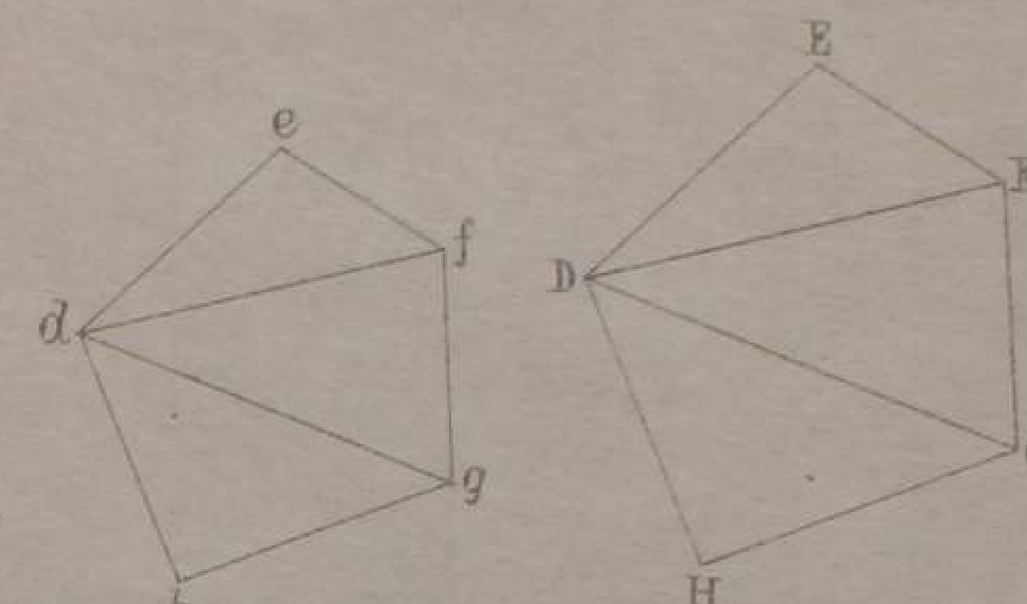
第一 abの直線上に於てABCの三角形と相似形なる三角形を作るには此abを以てABと相當の邊なりと定めBACの角に等しきbacの角並にABCの角に等しきabcの角を作るなり

然る時はabcの三角形は(第二十一教第二設論)ABCの三角形と相似形なり其故は互に相等しき三角形を有てばなり



第二 deの直線上に於てDEFGHの多角形と相似形なる多角

dfg



形を作るには此deを以てDEと相當の邊なりと定め而してDの角頂よりDF DGの對角線を作りDEFGHの多角形を三角形に分解せるなり然る後deの上に於てDEFの三角形と相似形なるdefの三角形を作り次にdfの上に於てDFGの三角形と相似形なるdefの三角形を作り次にdgの上に於てDGHの三角形と相似形なるdghの三角形を作るなり然る時はdefghの多角形はDEFGHの多角形と相似形なり其故は(第二十二款第八設論)此二個の多角形は相似形にして且つ相當せる同數の三角形より合成せらるなり

問題

一 角の平面に設くる一點を過きて直線を作り此直線を此點及ひ角の二邊或は其引長線にて設くる所の比に分つ事を求む

二 角の平面に設くる一點を過きて直線を作り此點及ひ角の二邊にて此直線を二分せる各分の相乘をして設くる所の線の二方に等しからしむる事を求む

三 圓形内に三角形を容れ其二邊或は其引長線をして設くる所の二點AとBを過きしめ且つ此二邊にて此圓周上に截斷せる弧の通弦をしてABの直線と平行ならしむる事を求む

四　圓形の中徑ABの端界Aを過きて割線を作り此A點より割線と圓周との交點までの距離と中徑のB點に作る切線との交點までの距離の和或は差をして設くる所の線に等しからしむる事を求む

五　設くる所の多角形と相似形にして且つ其周邊は設くる所の直線に等しき所の多角形を作る事を求む

六　設くる所の平行邊形と相似形なる平行邊形を作り其各邊或は其引長線は設くる所の直線を設くる所の四點に於て截らしむる事を求む

七　設くる所の二點を過きて二個の平行線を作り設くる所の二個の平行線と共に一個の平行邊形を作り而して此平行邊形の各邊はm及びnの二線に平行せしむる事を求む

八　三角形の平面上に於て直線を作り此三角形の各角頂より此直線までの距離をして設くる所の三線m n pに比例をへらしむる事を求む

九　二個の圓形を作る事を求む但し是れは互に相切し且つ一個の直線と設くる所の二點に於て切し又其各半徑の和或は差をして設くる所の線に等しからしむる事を求む

第二十七教

定説

凡そ多角形等邊等角なる時は之を正多角形と名く等邊三角形及び正方形は即ち正多角形なり

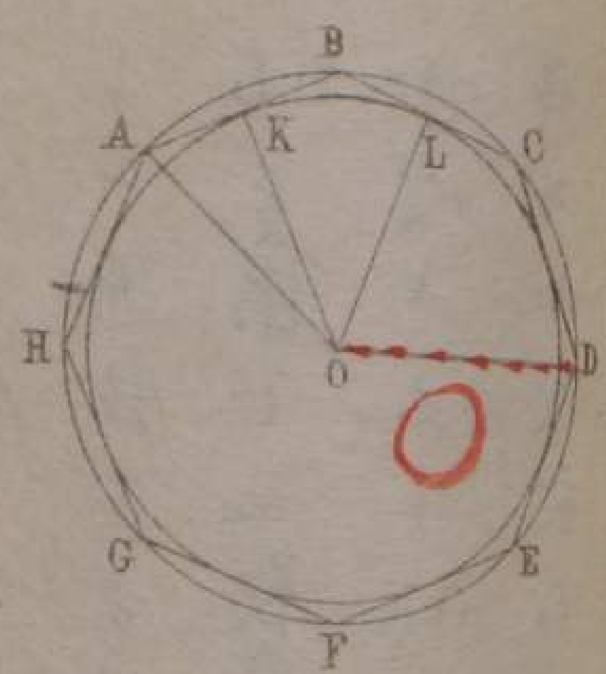
多角形の各角頂圓周上に在る時は之を此圓形に内容すと謂ふ又反言して此圓形は此多角形に外切すと謂ふ
多角形の各邊圓周に切する時は之を此圓形に外切すと謂ふ又此圓形は此多角形に内容すと謂ふ
一個の變度あり或る定度と無窮に接近し遂に相等しき能はさる時は此定度を以て變度の限と名く

第一設論

凡そ ABCD…… の正多角形は圓形に内容し又は之に外切する事を得

第一 ABC の相連三角の各頂を過きて作る圓周は必らす次の角頂Dを過くるなり

虚線ヲ引ク



此正多角形の AB BC の二邊の中央K及びLより AB 及び BC の上に於て垂線を作る時は此各垂線はA B Cの三點に因て決定せる圓周の中心Oに於て相交はるなり今 OD の直線此圓周の半徑 OA と相等しき事を證明せんには OL の直線に循て OLBA OLCD の四邊形を折り重ぬるなり然る時は OLB OLC の二直角は相等しき故 LC の邊は LB の方向を取りC點はB點の上に重なるなり蓋しLは BC の中央なれはなり又之に等しく此正多角形の LCD LBA の二角并に CD BA の二邊は相等しき故 CD の直線は BA の方向を取りD點はA點の上に重なるへし然る

にOD OAの二直線は其各端界相合し而して相等し故にO點より之を中心となしOAの半徑を以て作れる圓周はDの角頂を過ぐるなり

又同法を以て此圓周は此正多角形の他の各角頂を過ぐる事を證し得べし故に此正多角形は圓形に内容せる事を得るなり

第二 ABCD……の正多角形のAB BC等の各邊は外切圓形の等しき通弦なる故中心Oより此通弦上に作れる垂線OK OLは(第十三教第一設論)猶亦相等し故にO點より之を中心となしOKの半徑を以て作れる圓周はAB BC等の各邊の中央KL等を過ぎ而して(第十三教第二設論)此各線に切するなり故にABCD……の正多角形は圓形に外切する事を得るなり

注意

O點は内容外切の二圓の中心にして之を正多角形の中心と名く

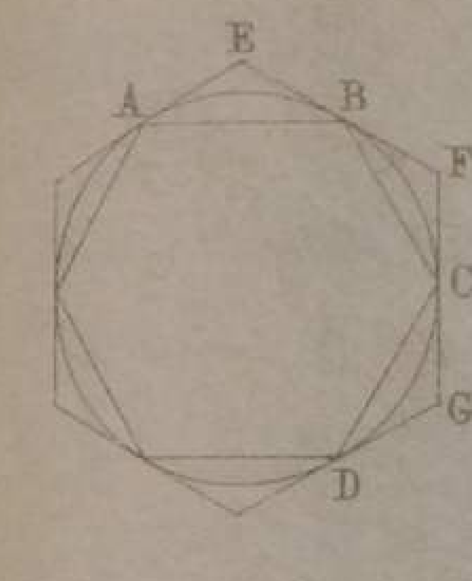
又外切圓形の半徑を此正多角形の半徑と名け内容圓形の半徑を此正多角形の中心距と名く

OA OBの相連二半徑の角を此正多角形の中心角と名く而して各中心角は(第十五教第一設論)相等し其故は外切圓周上に於て等しき弧を截斷せるなり故に此各角と一直角との比は$\frac{4}{n}$に等し但しnは此多角形の邊數なり

第二設論

圓周をAB BC CD等の若干數の等弧に分つ時は第一此各弧の通弦は此圓周に内容せる凸正多角形を成し第二此各分點に於て作れる各切線は猶亦此圓周に外切せる凸正多角形を成す

第一 AB BC CD等の各弧は相等しき故(第十一教第三設論)其各通弦も亦相等し故に ABC…… の内容多角形は等しき各邊を有つ



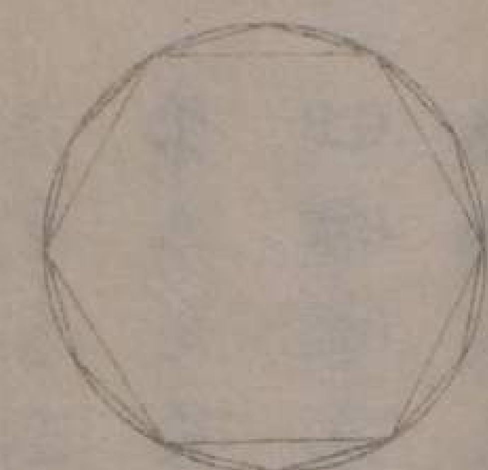
然るに其各角も亦互に相等し其故は ABC の内容角は(第十五教第四設論)其二邊の間に函める AD DC の二弧の半和を以て測度となし又同樣に BCD の内容角は其二邊の間に函める BA AD の二弧の半和を以て測度となせ然るに DC BA の二弧は相等しき故 ABC の角は BCD の角に等し又之に等しく他の各角の相等しき事を證し得へし故に此多角形は正なりと知る

第二 A B C等の各點に於て此圓形に作れる切線にて成る EFG…… の多角形は猶亦正なり其故は EAB FBC等の各三角形は圓外の一點より作れる各切線の(第十九教第六設論)相等しきに因り二等邊なり而して此各三角形は互に相等しき二角に隣接せる等しき一邊を有つを以て相等し設使は EAB GCD の二個の三角形に於て AB CD の二邊

は設想に因り相等しく又EABの角は(第十五款第四設論の推論)ABの弧の半を測度とせる者にしてCDの弧の半を測度とせるGCDの角に等し又EBA GDCの二角に於ても同様なり故に此二個の三角形は相等し是れよりして下の二件を決す即ち第一此多角形のEFG等の各角の相等しき事第二EB FB FC GC等の各切線の相等しきに因り此多角形のEF FG等の各邊の相等しき事因て此多角形は正なりと知る

注意

設くる所の圓形内に凸正多角形設使は正六角形を容れ然る後其邊數二倍つゝ多き諸多角形即ち十二二十四四十八等の多角形を容るゝ時は此諸多角形の周邊は漸次に増大し此諸多角形を内容せる圓周と無窮に接近す而して遂に之よりは小なり又同様に其表面に於ても此圓形との差漸次に微少となり故に左の一說を生す



圓周及ひ圓形は内容正多角形の邊數無窮に増加せし時其周邊及ひ表面の達すへき限なり

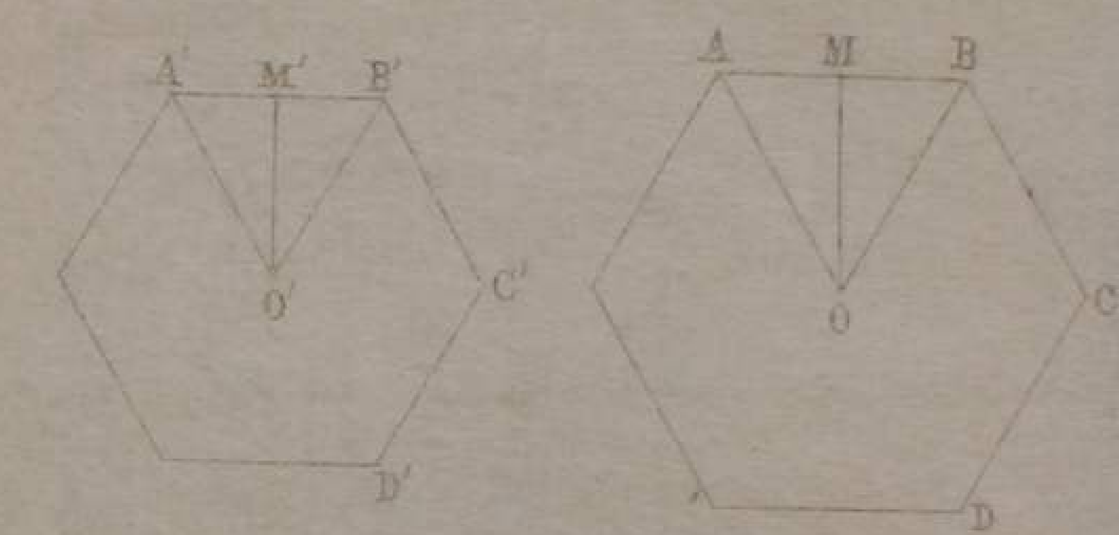
第三設論

第一　等しき邊數を有つ二個の正多角形は相似形なり

第二　此二個の多角形の周邊の比は其半徑或は中心距の比に等し

設使は ABC…… A′B′C′…… の二個の正多角形に於て第一此二形は相

似形なり
ABCの正六角形の各角の和は第九教第四設論2×4即ち八直角に等しく之に因て此正多角形の各角は一直角の$\frac{8}{6}$に等し又A'B'C'の正六角形の各角に於ても同理なり故にABC A'B'C'の二個の多角形は互に相等しき各角を有つ又其各邊は相比例せり其故は$\frac{AB}{A'B'}$ $\frac{BC}{B'C'}$等の比は設想に因り相等しければなり故に此二個の多角形は相似形なり



第二O及びO'はABC A'B'C'の二個の六角形の中心なり今OA OB O'A' O'B'の各半徑及びOM O'M'の各中心距を作る時は此各多角形は相似形なる故其周邊は第二十一教第九設論

の
而して

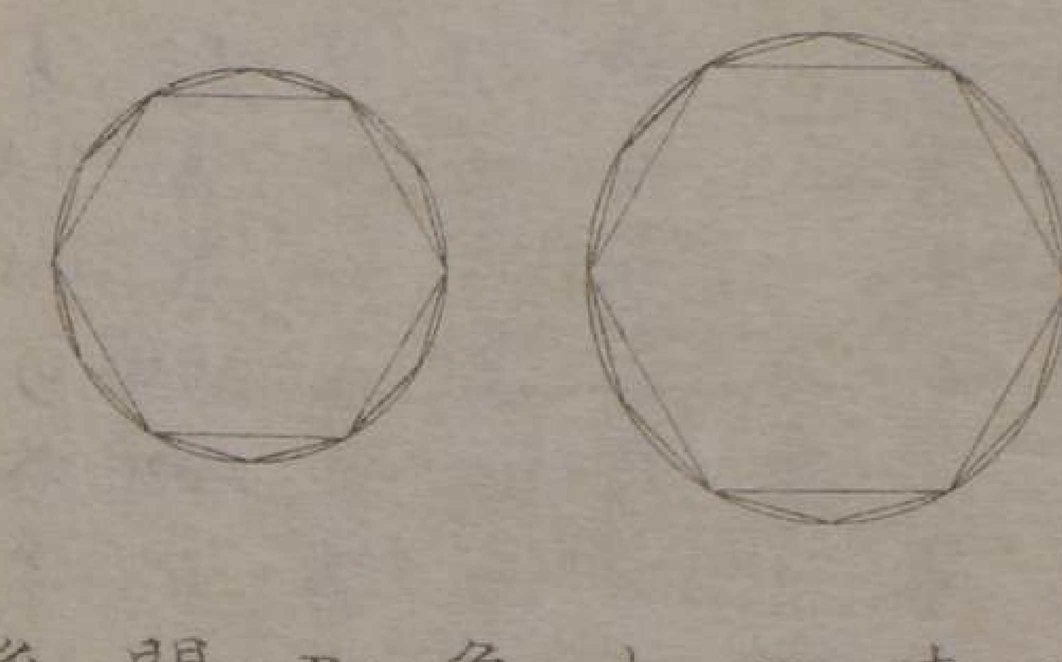
相當の二邊設使はAB A'B'と比例を為せり又OAB O'A'B'の二個の二等邊三角形は比例せる二邊の間に函める0 0'の相當角を有つ故に第二十一教第三設論相似形なり而してABとA'B'とはOAとO'A'との比に等し因てABC A'B'C'の各周邊はOA O'A'の各半徑と比例を為せり又OAM O'A'M'の二個の直三角形は其AOM A'O'M'の各鋭角はAOB A'O'B'に等しき各中心角の半にて第二十一教第二設論相似形なり然るにOA O'A'の各半徑の比はOM O'M'の各中心距の比に等し故にABC A'B'C'の各周邊は猶亦OM O'M'の各中心距と比例を為す

第四設論

二個の圓周は其半徑と比例をなす

各半徑R及びrなる二圓周内に於て等しき邊數を有

てる正多角形設使は正六角形を容るゝ時は此各多角形の周邊の比は(第三設論)R及ひrの各半径の比に等し然る後若し其邊數二倍なる正多角形即ち正十二角形を容るゝ時は其各周邊の比は猶亦R及ひrの各半径の比に等し而して此關係は各多角形の邊數及ひ其長短に論無く常に此の如し故に其限に於ても亦



然り即ち二圓周の比は其各半径の比に等し

第一推論

圓周と其中径との比は常數なり

其故は各圓周は各半径或は各中径と比例を為す故某圓周Rと其中径2Rとの比はrなる他の都ての圓周と其中径2rとの比に等しければなり

此常數の比は通常希臘の文字πを以て之を指示せる者にして即ち

3.14159265358979……

に等し而して此數は不盡根なり然れども此幾何學中に於ては其證解を為すを能はざれ西暦紀元前二百五十年に於てアルシメード氏初めて此πは

$3\frac{10}{70}$と$3\frac{10}{71}$との二數の間に在る事を發明せり而して一般に其大數$3\frac{1}{7}$を用ゆ是れはπより大なる事僅に百分の一の半なり又一千六百年代に於てメチユス氏此比の甚近値として$\frac{355}{113}$なる數を發明せり是れはπに異なる事百万分の一の半に過ぎず而して135の三個の奇數より成るを以て最も記憶に易き者とす

此圓周と中徑との比は常數なる事よりして左の規則を生す

中徑を知る所の圓周の長さを筭するには此中徑にπを乘ずれば可なり又反言して圓周を知る者の中徑を筭するには此圓周をπにて除すれば可なり此二個の規則は左式に因て之を顯はす事を得

$$\text{Circ. R} = 2\,\text{R} \times \pi$$

即ち

$$\text{Circ. R} = 2\pi\text{R}$$

第二推論

n度の弧の長さを算する事を求む但し其半徑Rを知る者なり

Rの半徑を以て作れる圓周は$2\pi\text{R}$に等しきを以て一度の弧は其三百六十分の一にして$\frac{2\pi\text{R}}{360}$即ち$\frac{\pi\text{R}}{180}$を測度とす故にn度の弧は$\frac{\pi\text{R}}{180}$のn倍即ち$\frac{\pi\text{R}n}{180}$を測度となす之に因て$l=\frac{\pi\text{R}n}{180}$の式を得此式に$l$ R nの三件の内

$l'=$

二個を知る時ハ他の一個を算するに用ゆへき者なり」

第五設論

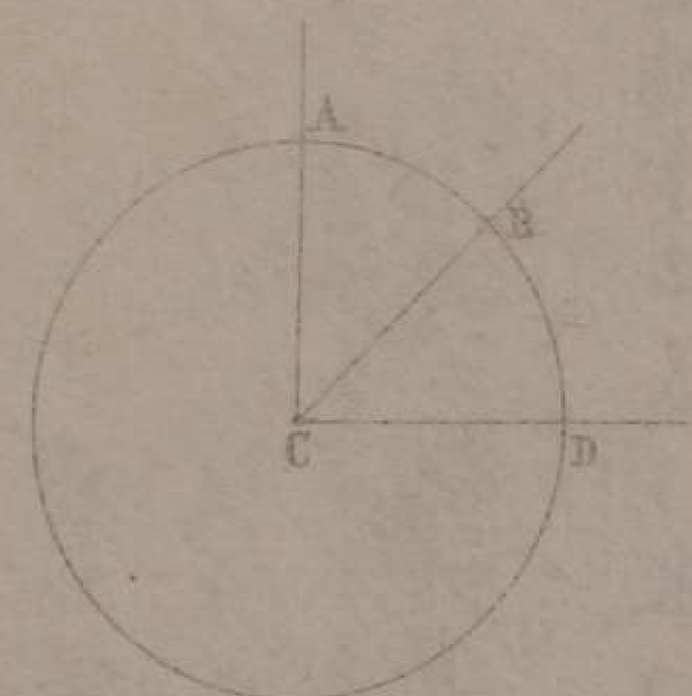
相似の二弧即ち各異の圓周上に於て等しき度數を有てる二弧ハ各半徑と比例を為す

R及びR'ハ其度數nなる相似二弧の半徑にしてl及びl'ハ其各弧の長さとす然る時ハ(第四設論)$l=\frac{\pi Rn}{180}$及び$l'=\frac{\pi R'n}{180}$を得

此各相當式の二邊を相除し以て$\frac{l}{l'}=\frac{R}{R'}$を得以て其證とす

第六設論

BCDの其角の角頂より之を中心となし其半徑CBを以て圓周を作り半徑に等しきABの弧を截斷する所のACBの中心角を以て一と為す時ハBCDの角ハ其二邊の間に函めるBDの弧とCBの半徑との比を以て測度となす



(第十五款第二設論)$\frac{BCD}{ACB}=\frac{BD}{AB}$を得然るにABの弧ハ設想に因りCBの半徑に等しきに因り$\frac{BCD}{ACB}=\frac{BD}{CB}$を得此相等式ハ即ち此設論を證明する者なり其故ハ$\frac{BCD}{ACB}$の比即ち其相等比の

$\frac{BD}{CB}$ は ACB の角を一とするを以て BCD の角の測度を標示すれはなり

第一注意

前の一を以て値せる BCD の角の測度を a となし OB の半徑を R となし BD の弧の長さを l とすれは此三件は $l=aR$ の關係にて連結するなり且つ此式は三角術に於て甚た要用なる者なり

第二注意

角の一即ち ACB の内に有てる度數を算するには(第四設論の推論) $l=\frac{\pi Rn}{180}$ の式に於て l を R と等しと定め然る後其式より n の値を求むれは可なり而して

$$n=\frac{180}{\pi}=57^{\circ}17'44''$$

を得るなり

數上の問題

一 $0^{m}.5$ なる邊の正方形の對角線を半徑とせる圓周を對數の助けを用ひすして密理米突以下の差に於て計算し而して要する所の容率を得たる事を証すへし

二 地球の圓周の半徑を吉羅米突に於て算する事を求む

三 半徑に等しき弧の度數を秒に於て算する事を求む

四　$25°15'$の弧の長さ8^m50なる者の半徑を算する事を求む

五　0^m25及ひ0^m18なる半徑を以て等しき長さの二弧を作り其一弧$15°20'$なる時は他の者の度數は幾何

圖上の問題

一　設くる所の二圓周の和或は差に等しき圓周を作る事を求む

二　相似の二多角形同し圓周に於て一は内容し一は外切する時は此圓周は第一の多角形に内容せる圓周と第二の多角形に外切せる圓周との中率となる

三　一個の圓形を半徑二倍なる他の圓形内に於て常に相切する如し轉走する時は此旋轉せる圓形の周圍の一点は固定せる圓形の中徑を作るなり

四　n邊の正多角形の相連各邊にて成せる各内角の和は$n-2h$の内に有てる一の個數に等しく二直角を倍する者に等し但しhは此多角形の各邊にて張れる弧の内に於て外切圓周のn分の一を函める倍數なり

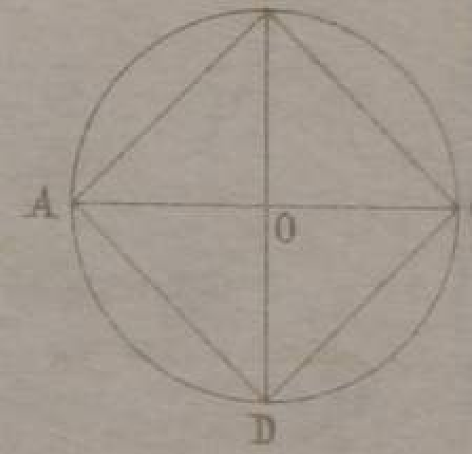
五　前題の各邊及ひ其邊の引長線にて成せる各外角の和は$4h$直角に等し

第二十八第二十九教

第一問題

設くる所の圓形OAの内に正方形を容るゝ事を求む

直交せる二中径ACBDを作り其各端をABBCCDDAの各通弦にて聯接するなり然る時は



ABCDの四邊形は（第二十七款第二設論）即ち正方形なり其故はAOB BOC COD DOAの四個の中心角は直角にして相等しき故（第十五款第一設論）此圓周を四等分すれはなり

ABの邊とAOの半径との比を算するにはABOの三角形は直三角形なる事を注意し而して

$$AB^2=AO^2+BO^2=2AO^2$$

とすれは可なり即ち是れよりして $\frac{AB}{AO}=\sqrt{2}$ を得るなり

此相等式は正方形の一邊と外切圓形の半径との比は不盡根なる事を顯はす者なり而して此式は此二線中の一個を知る時他の者を算するに用ゆへき者なり

推論

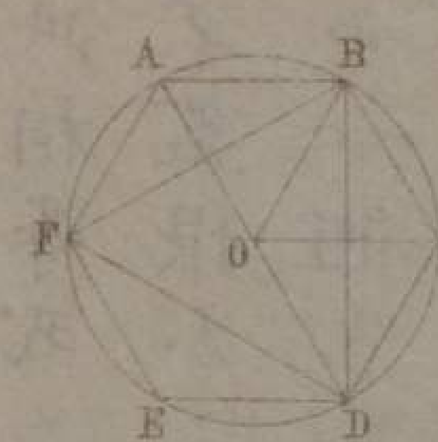
若しABCDの正方形の各邊にて張れる弧を二個に等分する時は此各分点及ひ正方形の各角頂にてOAの圓周を八個に等分すへし故に此各弧の通弦を作る時は即ち正八角形を内容する事を得

十六角の正多角形を内容するには此正八角形の各邊

にて張れる弧を二個に等分し而して此各半弧の通弦を作るなり餘之に倣ふ

第二問題

設くる處の圓形OAの内に正六角形等邊三角形を容るゝ事を求む



第一　ABをOAの圓形内に容るゝ正六角形の一邊となす而して是れ其半徑に等し

OABの二等邊三角形のAOBの角は（第二十七教第一設論）一直角の$\frac{4}{6}$即ち$\frac{2}{3}$に等し其故は此六角形の中心角中の一個なれはなり故に此三角形のABの二角の和は二直角より其$\frac{2}{3}$を減しゝる者即ち一直角の$\frac{4}{3}$に等し然るに此二角は相等し故に其各は一直角の$\frac{2}{3}$に等し而してOABの三角形は等邊なり之に因て此正六角形のABの邊はOAの半徑に等し故に此正六角形を作るには此圓形内に於て半徑に等しき六個の相連通弦を作れは可なり

第二　BDFの等邊三角形を内容するには此正六角形の各角頂を二個つゝ聯接せるBD DF FBの各通弦を作るなり其故はBDFの三点は明らかに此圓周を三個に等分すれはなり

BDの邊とOAの半徑との比を算するにはADの中徑を作るへし然る時はBADの三角形のABDの角は直角なるを以て（第十五教第四設論の推論）左式を得るなり

$$BD^2=AD^2-AB^2=4AO^2-AO^2$$

即ち

$$BD^2=3AO^2$$

因て

$$\frac{BD}{AO}=\sqrt{3}$$

なり

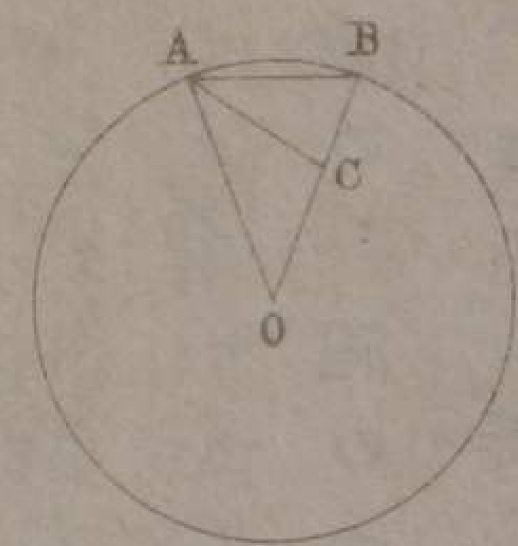
此相等式は等邊三角形の一邊と外切圓形の半徑との比は不盡根なる事を顯はす者なり而して此二線中の一個を知る時は他の者を算するに用ゆへき者なり

推論

OAの圓形内に於て十二、二十四、四十八角等の正多角形を容るゝには内容正六角形の各邊に於て張れる弧を二四八等に等分し而して各新弧の通弦を作れは可なり

第三問題

設くる所の圓形OAの内に正十角形を容るゝ事を求む



ABをOAの圓形内に容るゝ正十角形の一邊とす而して此邊は其半徑を連比例に分てる大分に等し

OABの二等邊三角形のAOBの角は正十角形の中心角なる故（第二十七教第一設論）一直角の$\frac{4}{10}$即ち$\frac{2}{5}$に等し故に此三角形の他の二角ABの和は二直角より其$\frac{2}{5}$を減しゝる者即ち一直角の$\frac{8}{5}$に等し然るに此二角は相等し故に其各は一直角の$\frac{4}{5}$即ちAOBの角の二倍に等し

C

是に於てACの直線を以てBAOの角を二個に等分する時は此線は（第二十數第三設論）OABの三角形のOBの邊を其各隣邊に比例せる二分に分つ即ち $\frac{AO}{AB}=\frac{CO}{BC}$ なり

然るにOACの三角形のCOA CAOの二角は皆一直角の $\frac{2}{5}$ になるを以て相等し故に此各角の對邊CO CAは相等し又ABCの三角形に於てACBの角はOACの三角形の外角にしてAOC CAOの二個の内角の和に等し即ちABCの角の如く一直角の $\frac{4}{5}$ に等し故にABの邊はACに等しく因て又OCに等し故に前の相等式に於てAO ABの二邊を之と互に相等しきOB OCに代ふる時は $\frac{OB}{OC}=\frac{OC}{BC}$ を得因て此C點はOBの半徑を連比例に分つ而して内容正十角形のABの一邊は此半徑の大分OCに等し

注意

設くる所の圓形のOAの半徑をRとする時は内容正十角形のABの邊は（第二十五數第八設論）$\frac{R(\sqrt{5}-1)}{2}$ に等し

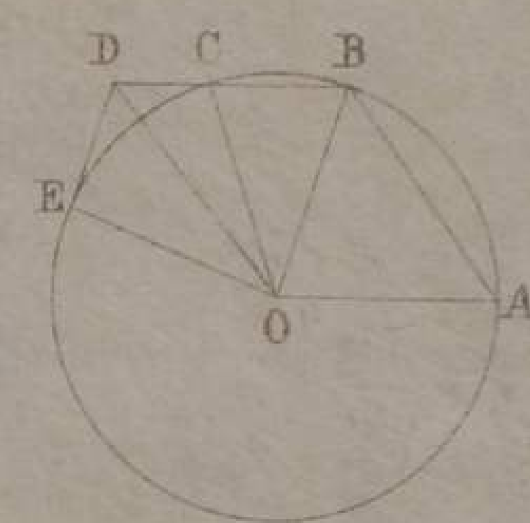
第一推論

正十角形の各角頂を直線にて一つ置きに結合する時は正五角形を内容する事を得へし其故は此多角形の各邊は圓周の $\frac{2}{10}$ 即ち $\frac{1}{5}$ に等しき弧を張ればなり

此五角形の一邊と外切圓形の半徑との比を算するには左の設論を用ゐ而して先つ之を証明する事左の如

し

正五角形の一邊の二方は正十角形の一邊の二方と其半徑の二方との和に等し



AB及びBCをOAの圓形に内容せる正五角形及び正十角形の一邊とす然る時は以上の論に因りOBCの二等邊三角形のCBOの角は一直角の$\frac{4}{5}$に等し故に此五角形のAOBの中心角に等し然るに此各角はOA BCの二直線に關係して内錯角なる故に此二線は平行なり

又O点よりABの直線に平行線を作り而して此線とBCの直線との交点DよりOAの圓形の切線を作る時はABDO

又切線DEハ正十角形の一邊BCニ等シ

の四邊形は平行邊形なるを以てBDの邊はOAの半徑に等しくODの邊はBAに等し其故は此二線の各はDBの割線と此割線の外分DCとの中率なればなり故にODEの直三角形のOD DE OEの三邊はOAの圓形に内容せる正五角形及び正十角形の一邊並に此圓形の半徑と各相等し

而して $OD^2=OE^2+DE^2$ の相等式中に於てOE及びDEの各線を半徑を以て顯せる値に代ふる時は

$$OD=\sqrt{R^2+R^2\frac{(\sqrt{5}-1)^2}{4}}$$

即ち

$$OD=\frac{R}{2}\sqrt{10-2\sqrt{5}}$$

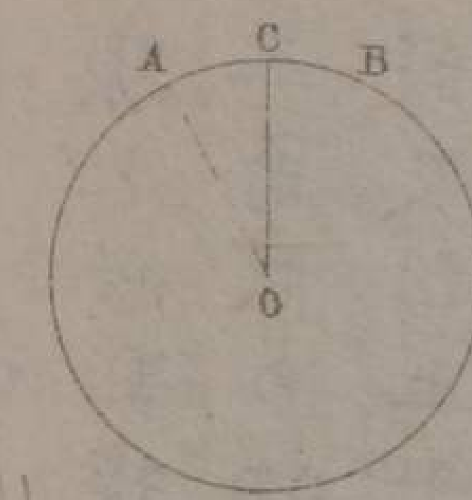
を得るなり

第二推論

OAの圓形内に二十、四十、八十角等の正多角形を容るゝには此内容正十角形の各邊にて張れる弧を二、四、八等に等分し而して各新弧の通弦を作れは可なり

第四問題

OAの圓形内に正十五角形を容るゝ事を求む



ABの弧をOAの圓周の六分の一に等しくし之より此圓周の十分の一に等しきBCの弧を減するなり然る時は餘す所の弧ACは即ち圓周の十五分の一なり其故は分數$\frac{1}{6}$と$\frac{1}{10}$との差は$\frac{1}{15}$なれはなり之に因てACの弧の通弦は求むる所の十五角形の一

等し而して $AE=\sqrt{AB^2-\frac{BC^2}{4}}$ を得

又求むる處の多角形のBDの邊は（第二十三款第一設論の推論）DFの中徑と此徑上に於ける其畫形影DEとの中率なる支を注意し以て此邊を得るなり然るにDFは2ABに等しくDEはAB−AEに等し因て $BD=\sqrt{2AB(AB-AE)}$ を得是れ即ち設くる所のABの半徑と既に算し得たるAEの中心距とを以てBD

の邊を知らしむる所の式なり

注意

以上二式の活用を容易にする爲に設くる所の圓形のABの半径をR設くる所の多角形のBCの邊をC此多角形の内容せる圓形の中径即ちAEの中心距の二倍をd求むる所の多角形のBDの邊をC'とする時はAEの中心距の値を決定する所の式は $\frac{d}{2}=\sqrt{R^2-\frac{C'^2}{4}}$ 即ち $d=\sqrt{4R^2-C'^2}$ (a) となる又BDの邊の長さは $C'=\sqrt{R(2R-d)}$ (b) の式にて之を得へし

第六問題

圓周と中径との比を算する事を求む

邊なり

推論

三十、六十、百二十等の正多角形を内容するには此十五角形の各邊に於て張れる弧を二四八等に等分して此各新弧の通弦を作れば可なり

以上四個の問題の注意

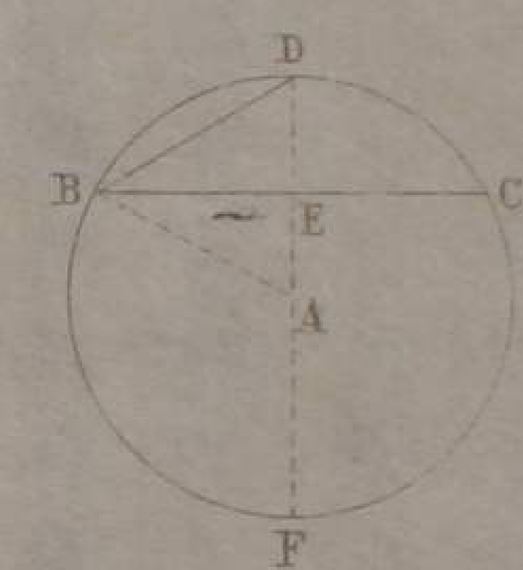
設くる所の圓形外に正多角形を容るゝには此圓形内に等しき邊數の正多角形を容れ而して(第二十七款第二議論)其各角頂より切線を作れば可なり

第五問題

圓径の半径ABと此圓形内に容るゝ正多角形の一邊BCを知りて此邊數より二倍多き内容正多角形の一邊を算する事

を求む

〇



設くる所の多角形のBCの邊ニ直立せるDFの中径及ひBDの通弦を作る時ハ此通弦ハ即ち求むる所の多角形の一邊ナり其故ハBDの弧ハ（第十二教第一設論）BCの弧の半ナれハナり今先つ設くる所の多角形のAEの中心距を算する事より始しむ

ABEの三角形ハ直三角形ナるを以て

$$AE=\sqrt{AB^2-BE^2}$$

を得然ニBEの直線ハ（第十二教第一設論）BCの邊の半ナる故BEの二方ハBCの二方の四分の一ニ

此問題の十分ニして且つ實用ナる解法ハ高等筭學の教程ニ屬す故ニ今此幾何教程ニ於てハ只以下説く所の方法ニ因て亦能く此數を筭用し得る事を示すのミ

今半径一米突ニ等しき所の圓周の長さを求めんとすニハ此長さを示す所の數を二ニて除し圓周と中径との比の値を得へし其故ハ此圓径の中径ハ二米突ニ等しけれハナり圓周ハ内容正多角形の邊数無窮ニ増加し時の界限ナる故若し半径一米突ニ等しき圓形ニ内容せる四、八、十六角等の正多角形の各周邊を筭する時ハ此各周邊と圓周との差ハ逐次ニ減少而して此各周邊中の一個を圓周として取る時ハ注意すべき所の多角形其邊数を多く有つニ從ひ此誤差ハ逐

次ニ減少スル事知ルヘシ

故ニ設使ハ $c\ c'\ c''\ c'''$ 等ヲ半径一米突ニ等シキ圓形ニ内容セル四、八、十六角等ノ正多角形ノ各邊トナシ $d\ d'\ d''\ d'''$ 等ヲ此各多角形ニ内容セル圓形ノ中径トスレハ（第一問題）$c=\sqrt{2}$ ヲ得而シテ第五問題ノ(a)及ヒ(b)式ヨリシテ逐次ニ $c'\ c''$ 等及ヒ $d'\ d''$ 等ノ各数ノ値ヲ得ル事左ノ如シ

$$c=\sqrt{2}$$
$$c'=\sqrt{2-d}$$
$$c''=\sqrt{2-d'}$$
$$c'''=\sqrt{2-d''}$$

. . . . . .

. . . . . .

. . . . . .

$$d=\sqrt{4-c^2}$$
$$d'=\sqrt{4-c'^2}$$
$$d''=\sqrt{4-c''^2}$$
$$d'''=\sqrt{4-c'''^2}$$

. . . . . .

. . . . . .

. . . . . .

此計算ヲ行ヒ以テ左ノ各数ヲ得

9

$c=1,41421356$
$c'=0,76536686$
$c''=0,39018064$
$c'''=0,19603428$
$c^{IV}=0,09813535$
$c^{V}=0,04908264$
$c^{VI}=0,02454308$

$d=1,41421356$
$d'=1,84775907$
$d''=1,96157056$
$d'''=1,99036945$
$d^{IV}=1,99759091$
$d^{V}=1,99939764$
$d^{VI}=1,99984940$

之ニ因テ半径一米突ニ等シキ圓形ニ内容セル四、八、十六、三十二、六十四、百二十八、二百五十六角ノ正多角形ノ周邊ハ左ノ如シ

$4c=5,65685$
$8c'=6,12293$
$16c''=6,24289$
$32c'''=6,27310$
$64c^{IV}=6,28066$
$128c^{V}=6,28255$
$256c^{VI}=6.28303$

此計算ニ於テハ二百五十六角ノ正多角形ノ周邊ハ外

切圓周の長の容率なる事を顯はす者にして若し此圓周を $6,^{m}28303$ に等しとする時は此圓周と中徑との比は $6,28303$ の半即ち $3,141515$ に等し今此數をπ即ち $3,1415926535\ldots\ldots$ と比較する時は一萬分の一に於ては差なき事を知る

注意

前の計算を d' d'' d''' 等の中徑と止めんと欲する所の c^{vi} の邊とを求むる事に化する事を得るなり即ち若し $d'=\sqrt{4-c'^2}$ の式に於て c' の邊を $\sqrt{2-d}$ の値に代ふる時は $d'=\sqrt{2+d}$ を得之に因て各中徑は其前の中徑をもって算する事を得故に

$$d=\sqrt{2}$$
$$d'=\sqrt{2+d}$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$d^{v}=\sqrt{2+d^{iv}}$$

を得又

$$c^{vi}=\sqrt{2-d^{v}}$$

を得るなり

此終りの二式は即ちπの數の式を得べき者なり其故は半徑一米突の圓形に内容せる 2^k 邊の正多角形の中心距の二

倍は $\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\text{etc}}}}$ にして其根號の數は $K-1$ なる者なり之に因て此同し圓形に内容せる 2^{K+1} 邊の正多角形の一邊は $\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\text{etc}}}}}$ に等し而して其周邊の半は $2^{K}\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\text{etc}}}}}$ を以て式となせ

若しKの數を無窮に増加せると想像する時は此終りの多角形の邊數 2^{K+1} も亦無窮に増加し而して

$$\pi = \text{limite}\ 2^{K}\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2+\text{etc}}}}$$

を得へし但し此式に於て用ゆる所の根號の數はKに等し

數上の問題

一　正八角形の一邊及ひ其中心距を半径を以て算せる式を求む

半径を$4^{m}50$と定め以て此式を活用すへし

二　正二十角形の一邊及ひ中心距を半径を以て表はせる式を求む

半径を$1^{m}50$と定め以て此二式の活用を為すへし

三　圓周と中径との比は3及ひ4の二數の間に在る事を證明する事を求む但し惟此圓周の内容正六角形と外切正方形との考へを以てせる事を要す

四　一個の同一圓形に内容せる正方形及ひ等邊三角形の各邊の和は此圓周の半より大なる事半径の百分の一の半より小なる事を證明すへし

圖上の問題

一　一個の圓周及ひ一點あり此點を過きて割線を作り此圓周を11及ひ13の二數に比例せる二弧に分つ事を求む

二　一個の圓形に外切せる等邊三角形の一邊は此圓形に内容せる等邊三角形の一邊の二倍なり

三　一個の圓形に内容せる正六角形の中心距は同し圓形に内容せる等邊三角形の一邊の半に等し

四　直角に交截せる二圓周の中心の距離其半径中の一個の二倍に等しき時は其公通弦は其二圓形中の一個に内容せる正六角形の一邊にして又他の圓形に内容せる等邊三角形の一邊なり

五　一個の圓周を作り此圓周に内容せる正方形の周邊を設くる所の圓周に外切せる等邊三角形の周邊に

等しからしむる事を求む

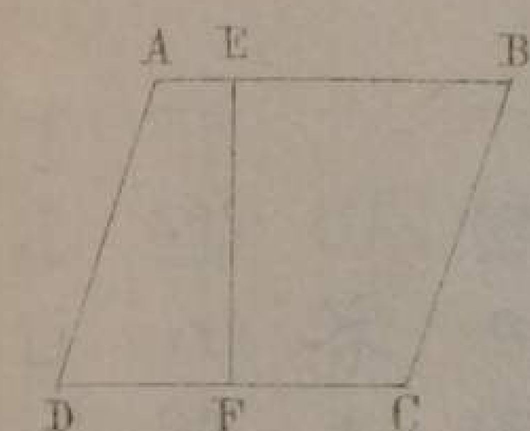
六 一個の斜方形を作り其邊を設しる所の長さふして且つ二對角線の中率ふらしむる事を求む

七 對角線及び一邊の和或ハ其差を知て正方形を作る事を求む

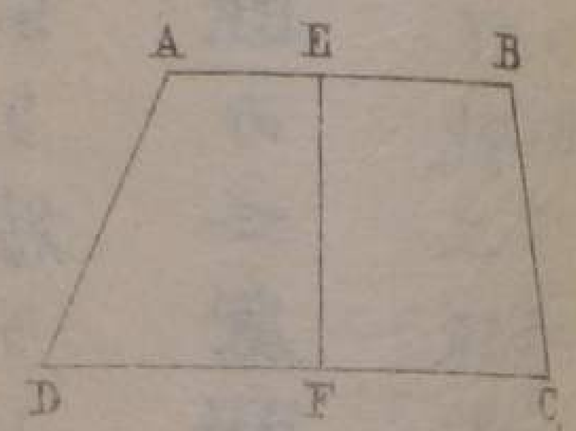
第三十第三十一教

定說

ABCDの平行邊形ハ此形のDCの如き或ハ一邊を以て底とふす而して此DCの底より其對邊ABまでの距離を測るへき垂線EFを以て此形の高さと名く



二邊平行方形ハ相對二邊平行せる四邊形なり ABCDの二邊平行方形ハAB CDの二平行邊を二底とし此二底の距離を測るへき垂線EFを高さとなす



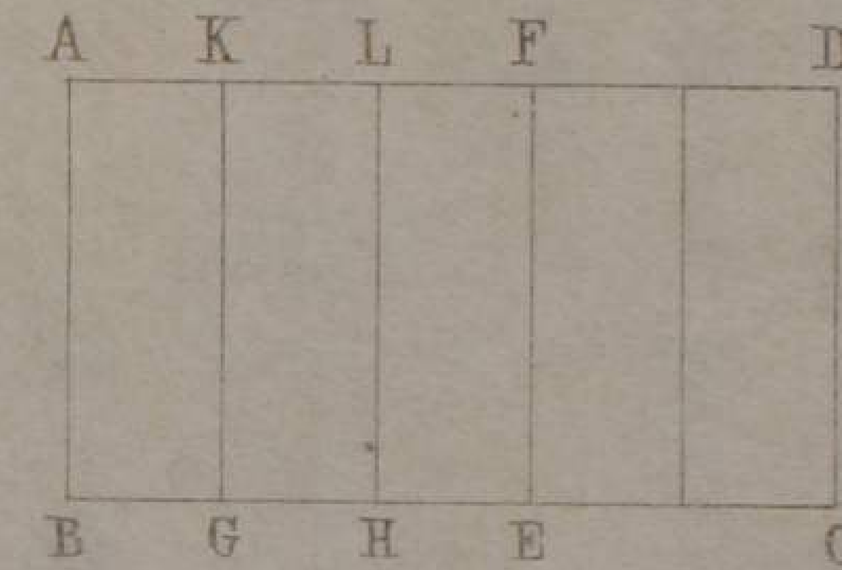
其形の表面の廣さを面積と名く

第一設論

ABの等高を有てるABCD ABEFの二個の矩形ハBC BEの各底と比例を為す

BC BEの比を(第十五教定說)$\frac{5}{3}$ニ等しと定むる時ハ此二線ハBCの內ニ五倍BEの內ニ三倍を函めるBGの公度を有つ今

BCを五個に等分せる所のGH等の各點より此直線上に垂線を作る時は此各垂線ハ



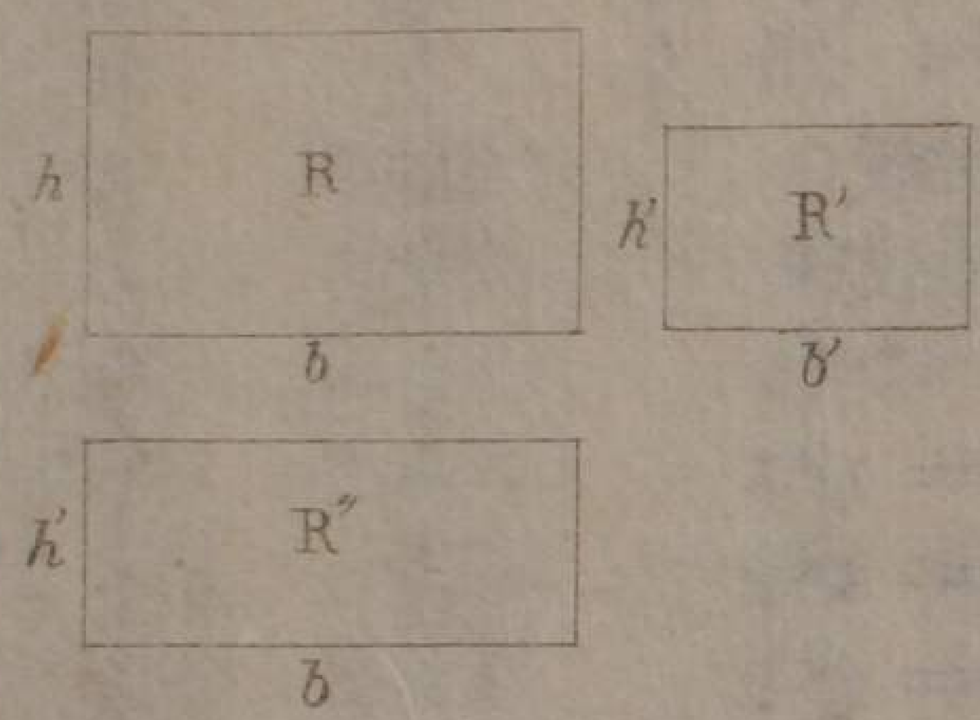
（第十教第五設論の推論）ABCDの矩形をABGK KGHL LHEF等の五個の矩形に等分す其故はBG GH HEの各底は設想に因り相等しくAB GK HL等の各高は平行線内に函める平行線なるを以て猶亦相等しけれはなり然るにABCD ABEFの二個の矩形はABGKの公度を有つ而してBC BEの二底BGの公度を函める倍數に等しき倍數を有つ而して此二矩形の面積の比 $\frac{ABCD}{ABEF}$ は $\frac{5}{3}$ に等しく即ち其底の比 $\frac{BC}{CE}$ に等し

推論

等底の二個の矩形は其各高と比例を為す

二個の矩形は其底と高さの相乗と比例を為す

第二設論



R及びR′は二個の矩形にしてh h′は其高さb b′は其底なり今R″の矩形を作り其底bは第一矩形と等しく其高さh′は第二矩形と等しからしむ R R″の二個の矩形は等底bを有つ故其面積の比は（第一設論）其高さの比に等し即ち $\frac{R}{R'}=\frac{h}{h'}$ を得

又RR'の矩形は等高なる故 $\frac{R''}{R'}=\frac{b}{b'}$ を得此二個の相等式の各邊を相乘し左邊の分母子の公因數R''を消去し $\frac{R}{R'}=\frac{b\times h}{b'\times h'}$ を得るなり

例 設使は

$h=1^{m},5$
$b=3^{m},2$
$h'=1^{m},2$
$b'=2^{m},4$

とすれは

$$\frac{R}{R'}=\frac{1,5\times3,2}{1,2\times2,4}=\frac{15\times32}{12\times24}=\frac{5}{3}$$

を得

故にRの矩形はR'の矩形の $\frac{5}{3}$ に等し

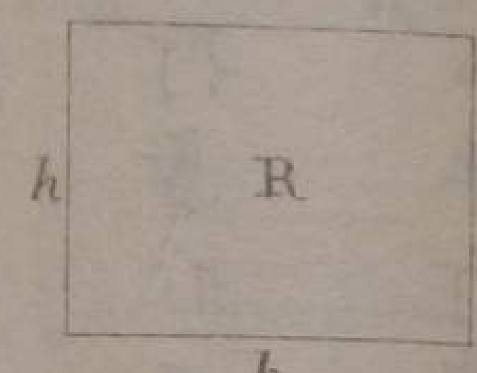
第三設論

矩形の面積は其底と高さの相乘に等し但し長さの一の上に作れる正方形を以て面積の一とす

設使はRの矩形の面積を測らんとするに底をb高さをhとし長さの一の上に作れる正方形を面積の一と為す時は前の設論に從ひ

$$\frac{R}{1}=\frac{b\times h}{1\times1}$$

即ち $R=b\times h$ を得



然るにRbhの三數は矩形及ひ其底其高さの測度なり故に此相等式の意は左の如し

矩形の面積は底及ひ高さの測度を顯はす二數の相乘に等し

然れとも通常此設論を唱ふる亘下の如くす矩形の面積は其底と高さの相乘に等し

推論

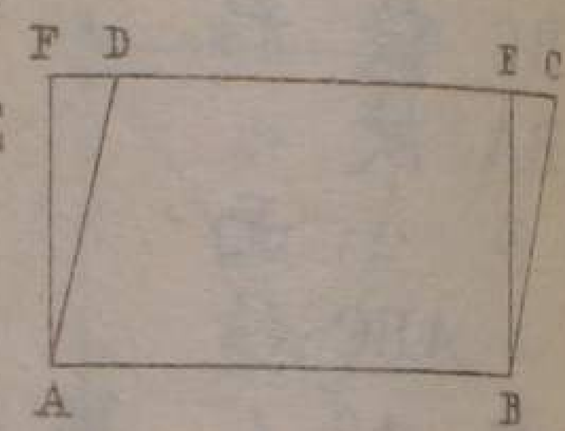
正方形の面積は其底と高さの相乘に等し即ち其邊の二方

に等し
反言　某數の二方は此數を邊とせる正方形の面積と考ふる事を得るなり
此推論及び反言を見れは平方と某數と二方とは同意の語なる事知るへし
注意　米突を以て長さの一とすれは方米突は即ち面積の一なり

第四設論

ABCD の平行邊形の面積は AB の底と BE の高さとの相乘に等し

ABCD の平行邊形の底の二端 AB よりして此線上に垂線を作り其對邊 DC に交はらしむ然る時は ABCD の平行邊形は ABEF の矩形と等積なり



は ADF BCE の二個の直三角形は(第六教第五設論)相等し其故は AD BC の各斜邊は(第十教第一設論)此平行邊形の對邊あるを以て相等しく且つ F 及び E の直角は隣接せる AF BE の二邊も等しき道理を以て相等しけれはなり
今 ABCF の四邊形より此三角形の各を減去すれは ABCD の平行邊形及び ABEF の矩形を得而して此二形は互に等積な

り然るに此矩形ハ(第三設論)AB×BEを測度となす故に此平行邊形の面積ハ猶ホAB×BE即ちABの底とBEの高さとの相乘に等し

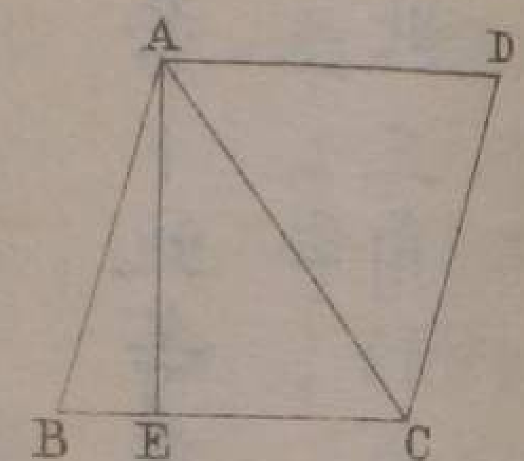
推論

等底を有つ二個の平行邊形ハ其高さと比例をなす又等高を有つ時ハ其底と比例を爲ス

第五設論

三角形の面積ハ其底と高さの相乘の半に等し

設使ハABCの三角形に於てAC邊のA及びCの二端よりBC BAの二邊と互に平行せるAD CDの直線を作る時ハABC



ACDの二個の三角形ハ相等し其故ハABCDの四邊形ハ平行邊形なる故互に相等しき三邊を有てハなり故にABCの三角形ハABCDの平行邊形の半にして此平行邊形と等底BC及び等高AEを有つ然るに此平行邊形ハ(第四設論)BC×AEの相乘を以て測度となす故に此三角形の面積ハ此相乘の半に等し即ちBCの底とAEの高さとの相乘の半に等し

第一推論

等底を有つ二個の三角形ハ其高さと比例を爲す又等高を

有つ時ハ其底と比例を為す

第二推論

等底等高を有つ各三角形ハ等積なり

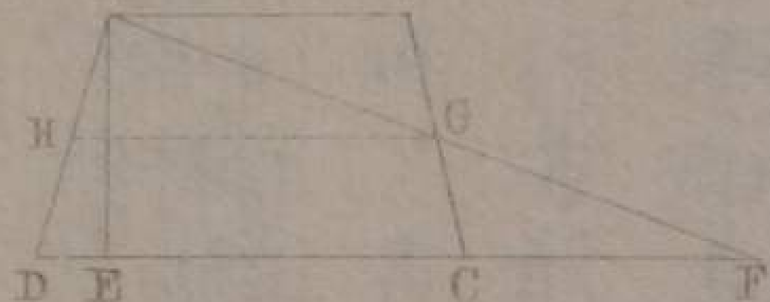
第三推論

Cを等邊三角形の一邊とすきハ此三角形の高さハ $\sqrt{C^2-\frac{C^2}{4}}$ 即ち $\frac{C\sqrt{3}}{2}$ ニ等し故ニ其面積ハ $\frac{C}{2}\times\frac{C\sqrt{3}}{2}$ 即ち $\frac{C^2\sqrt{3}}{4}$ ニ等し

若し此等邊三角形の一邊Cを十米突ニ等しとすれハ此三角形の面積ハ43,3013方米突なり

第六設論

ABCDの二邊平行方形の面積ハABCDの二底の半和と其高さとの相乘ニ等し



下底DCを上底ABニ等しき長さニ引長しAFの直線を作る時ハ此線ハG點ニ於てBCの辺を截りABG CGFの二個の三角形ハ互ニ相等しき二角ニ接する等しき一邊を有つ即ちCF ABハ設想ニ因り相等しくABG FCGの二角ハAB CFの二平行線とBCの割線ニ關係して内錯角なる故相等し又BAG CFGの二角ニ於ても同理なり故ニABG CGFの二個の三角形ハ相等し若し之を逐次ニABGFDの形より減去せる時ハ其

殘り即ち ABCD の二邊平行方形及ひ AFD の三角形ハ等積なり然るに此三角形ハ $AE \times \frac{1}{2}DF$ を以て測度となす故に此二邊平行方形の面積ハ猶亦 $AE \times \frac{1}{2}DF$ に等し即ち DC AB の二底の半和と其高さとの相乘に等し

推論

ABCD の二邊平行方形ハ猶亦 AD BC の平行せさる二邊の中央 H 及ひ G を聯接せる GH の直線と AE の高さとの相乘を以て測度となす

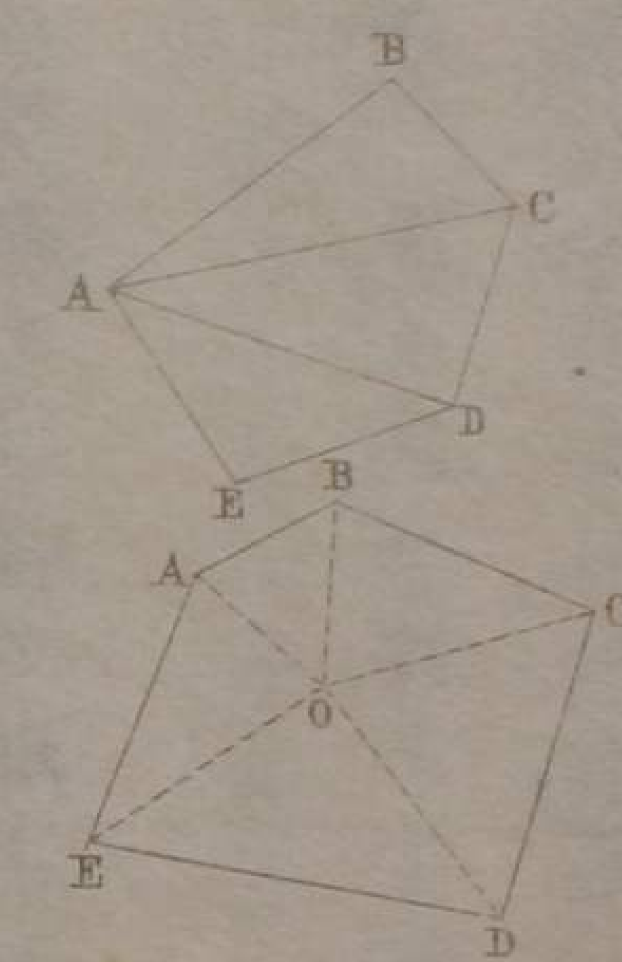
ADF AHG の二個の三角形ハ比例せる二邊の間に公角を函めり故(第二十一款第三設論)相似形なり故に GH と DF との比ハ AH と AD との比に等し因て GH の直線ハ DF の直線の半即ち此形の ABCD の二底の半和に等し故に此二邊平行方形ハ AE と GH との相乘を以て測度となす

第一問題

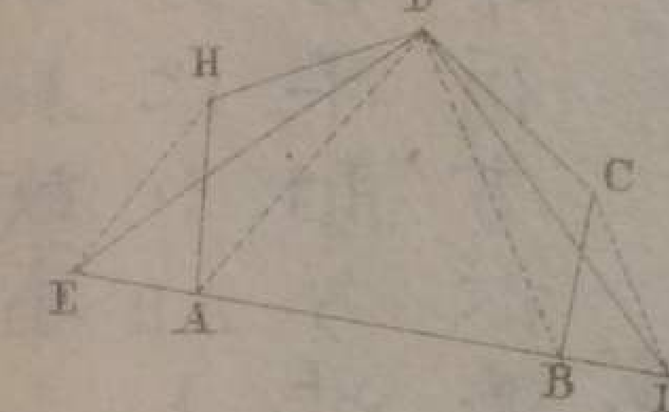
多角形の面積を測る事を求む

此問題ハ各種の解法に適當す今逐次に之を説明すへし

第一　紙上或ハ地上に於て作れる ABCDE の多角形の面積を測るにハ之を三角形に分解するなり但し或ハ A の如



き一角頂より他の角頂に對角線を作り或は此表面内の一点Oより凡ての角頂に直線を作りて以て之を解するなり是に於て此各三角形の面積を計算し其和を求むる時は即ち此多角形の面積の測度なり

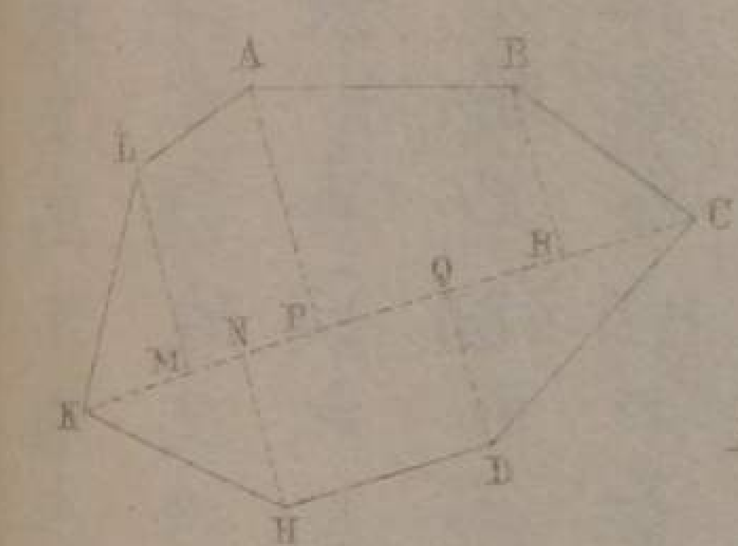


第二 此多角形若し紙上に作れる時は之を等積の三角形に變形し然る後此三角形の面積を測るなり

設使は ABCDH の五角形を等積の三角形に變形するには先つ BD の對角線を作る然る時は BDC の三角形を成す此三角形のC角頂より BD に平行せる CL の直線を作り又此多角形の AB の邊を CL に交るまでに引長し其交点Lを D 点にまで DL の直線を以て聯接す然る時は CBD の三角形は(第五設論) LBD の三角形と等積なり其故は BD の等底を有ち且つC及ひLの角頂は底との平行線上に在る故等高を有てばなり故に ABCDH の五角形に於て CBD の三角形を之と等積の LBD の三角形に代ふる時は LBAHD の新多角形は此五角形と等積なり然るに A B L の三点は一直線上に在る故 LBAHD の形は只四邊を有つ

故に設くる所の多角形は之と等積にして其邊数一個を減せり

此法を以て ALDH の四邊形に適用する時は之と等積の LDK の三角形に變形する事を得るなり之に因て此三角形の面積は ABCDH の五角形の面積に等し



第三 此多角形地上に作れる時は次の方法を用ゐるを佳とす

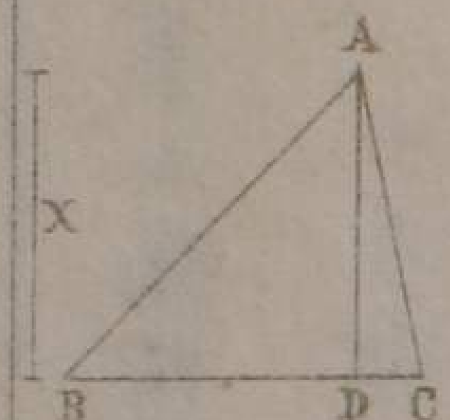
設使は ABCDHKL の多角形の面積を測らんとするには最大の對角線 CK を作り各角頂より此線上に垂線を作るなり然る時は此各垂線は此形を分解して直三角形及び二邊平行方形となす此各形の面積を計算し其和を以て求むる所の者とす

此方法は測地に於ても最も採擇すべき者とす其故は一個の測器の方法に因て地上に於て容易に此各垂線を作る事を得ればなり

第二問題

多角形と等積の正方形を作る事を求む

第一 若し設くる所の多角形 ABC の三角形なる時は AD の高さを作り又之と等積なる正方形の一邊を X となす然るに三角形の面



積を(第五設論) $\frac{1}{2}BC \times AD$ に等しく又正方形の面積は(第三設論) X^2 に等しく而して此三角形の正方形と等積なるには $X^2=\frac{1}{2}BC \times AD$ なる事を要す因て $\frac{AD}{X}=\frac{X}{\frac{1}{2}BC}$ なりと決す故に求むる所の正方形のXの邊を設くる所の三角形のADの高さとBCの底の半との中率線なり

第二　若し設くる所の多角形の面積設くる所の二直線の相乘をもって測度となす事平行邊形及び二邊平行方形の如くなる時は前に等しき道理をもって左の如く論する事を得るなり

此多角形と等積の正方形の一邊を二個の直線の中率なり

但し此二線を其相乘此多角形の面積の測度を顯はす者なり

第三　設くる所の多角形の面積直に二直線の相乘をもって顯はす能はさる者は此多角形を(第一問題)等積の三角形に變形し然る後此三角形と等積の正方形を作るなり

數上の問題

一　底十米突七五對角線十五米突二五の長方形の面積を方珊知米突以下の差に捨て算する事を求む

二　三角形の三邊 $1,^{m}20$ $1,^{m}85$ $2,^{m}25$ なる者の面積及び一個の高さ

を算する事を求む

三 二邊平行方形の面積 2034,^{mc}48 其高さ 18,^{m}40 其下底 54,^{m}48 ある者の上底を珊知米突以下の差に於て算する事を求む

四 450^{m} を一邊とせる正六角形の面積を厄屈多亜爾に於て算する事を求む

五 2,^{m}25 の半径の圓形内に容るゝ正八角形の面積を方珊知米突以下の差に於て算する事を求む

六 斜方形の邊其小對角線に等しき者の面積を厄屈多亜爾に於て算する事を求む但し此邊の長さを 20,^{m}50 と知るなり

七 2,^{m}50 の中心距を有てる等邊三角形と等積の正方形の一邊を珊知米突に於て算する事を求む

圖上の問題

一 二邊平行方形の面積は平行ならさる二邊中の一個に此邊より其對邊の中央までの距離を乘せし者に等し

二 ABCの三角形のC角頂を過きMNの直線を作り此直線ABの邊とA及びBの二角頂より此MN上に作れる二垂線とにて成る二邊平行方形の面積をして設くる所の正方形と等積ならしむる事を求む

三 ABC A'B'C'の二個の三角形のA A'の二角相等しきか或は

並角ふ成す時ハ此二個の三角形の面積ハ此AA'の二角を成す各邉の相乘 $\frac{AB\times AC}{A'B'\times A'C'}$ と比例をなす

四　直三角形を之と等積ふして一個の公角を有つ所の二等邉三角形ふ變形する事を求む

此問題ハ幾個の答解を有てるや

五　正多角形を二倍の邉數を有てる他の正多角形ふ變形する事を求む

六　三角形の一邉ふ直立せる直線を以て此三角形を二等分する事を求む

七　三角形内の一点を各角頂ふ聯接して此三角形を三分し設くる所の三個の長さふ比例せしむる事を求む

八　設くる所の三線相等しき所の格段なる場合

九　圓形の内ふ於て高さ及ひ面積を知る所の二邉平行方形を容るゝ事を求む

十　角の平面ふ設くる一點を過きて割線を作り此角の二邉とふて成る三角形の面積をして設くる所の正方形ふ等しからしむる事を求む

十　角の平面上ふ設くる一點を過きて割線を作り此角の角頂より二個の交點までの距離の相乘をして設くる所の正方形ふ等しからしむる事を求む

十一　三角形の二邉の相乘ハ其第三邉ふ直立せる高さと外切圓形の中径との相乘ふ等し

此設論よりして三角形の面積は其三邊~~に~~の積と外切圓形の中径の二倍~~を乗~~て除せし者に等しき事を証する事を求む

十二　設くる所の直線との平行線に因て三角形を二等分する事を求む

十三　四邊形の一個の角項を過きて此面積を二個に等分する所の直線を作る事を求む

十四　四邊形の各對角線の中央を過きて他の者に平行線を作り其交點を此四邊形の各邊の中央に聯接する時は此四邊形を四個に等分す

第三十二教

注意

第二十三及ひ第二十四教中に於て二直線の相乘を注意せる數個の設論を載せ然るに（第二十教第二設論）此の如き相乘は此二直線上に作れる矩形の面積の測度として考へ得へき事を知る故に此諸設論は純粋なる幾何上の解説ニ適當し因て又新証法に適當なへし今三角形の直角に對する邊上に作れる正方形の邊に關係する設論を擧く

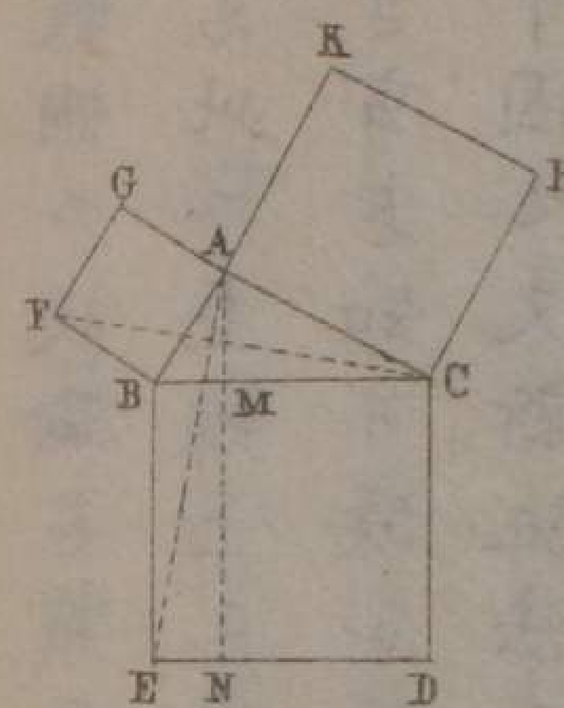
設論

直三角形の斜邊上に作れる正方形は他の二邊上に作れる正方形の和と等積なり

設使はABCの三角形に於てBACの角を直角とし此各邊上に正方形を作る時は斜邊BCの上に作れるBCDEの正方形

は他の二邊AB ACの上に作れるABFG ACHKの正方形の和と等積なり

直角の角項より斜邊上に垂直線AMを作る時は其引長線MNにてBCDEの正方形をBEMN CDMNの二個の矩形に分つ而して



此矩形は之に隣接せるABFG ACHKの正方形と互に等積なり蓋しBEMNの矩形の面積は(第三十款第三設論及第五設論)ABEの三角形の二倍なり其故は此三角形の

Aの角項ハ此矩形の上底MNの引長線上に在る故等高及び同底を有てるなり又之に等しくABFGの正方形の面積はBCFの三角形の二倍なり其故は此三角形のC角項は此正方形の上底GAの引長線上に在る故等高を有ち且つ同底BFを有てるなり故にBEMNの矩形及びABFGの正方形の等積なる事の証法はABE BCFの二個の三角形の相等しき事を証すれば可なり然るに此圖形の製作に因るに一個のBF BCの二邊を他の者のBA BEの二邊に等しく又此各邊の間に函めるFBC ABEの二角は相等しく其故は其各は一直角にABCの角を加へたる者に等しければなり

故にABE BCFの二個の三角形を(第三教第四設論)相等し而してBEMNの矩形をABFGの正方形と等積なり又同様にCDMNの矩形及びACHKの正方形の等積なる事を証する事を得故にBCの斜邊上に作れるBCDEの正方形ハABACの二邊上に作れるABFG ACHKの正方形の和と等積なり

第一推論

ABCの直三角形の直角の二邊上に作れる各正方形を此二邊の斜邊上に於ける各畫形影と比例を為す

ABFG ACHKの各正方形の比を之と等積なるBEMN CDMNの矩形の比に等し故に(第三十教第一設論)MNの同高を有てる此各矩形のBM CMの底の比に等し

第二推論

ABCの直三角形の斜邊及び直角邊の一個の上に作れる各正方形を斜邊及び此斜邊上に於ける此直角邊の畫形影と比例を為す

BCDE ABFGの各正方形の比をBCDEの正方形及びBEMNの矩形の比に等し故にBEの同高を有てる此各矩形のBC及びBMの底の比に等し

問題

一　正方形の對角線上に作れる正方形は設くる所の正方形の二倍なり

二　二直線の和の上に作れる正方形は各線上に作れる正方形の和に其矩形の二倍を加へし者に等し

三　二直線の差の上に作れる正方形は各線上に作れる正方形の和より其矩形の二倍を減せし者に等し

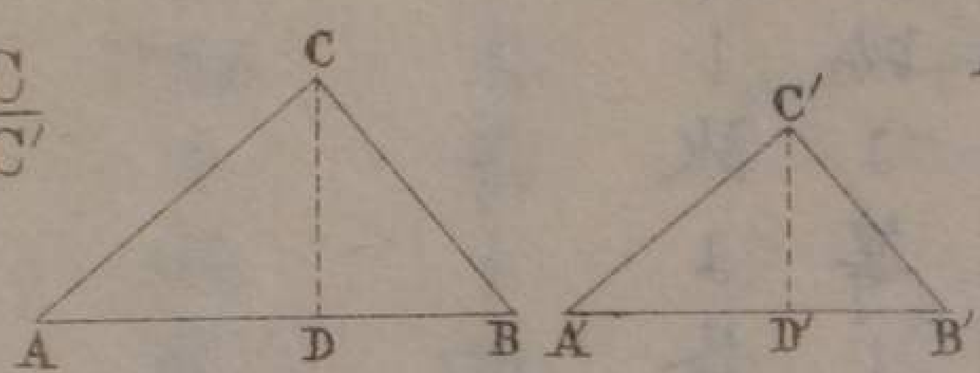
四　二直線の和と差との上に作れる矩形は其二線の正方形の差と等積なり

第三十三款

第一設論

ABC A'B'C' の二個の相似三角形の面積は其相當邊の二方と比例をなす

ABC A'B'C' の三角形は相似形なる故 AB A'B' の底は相當の二邊と比例を為すを因て $\frac{AB}{A'B'}=\frac{AC}{A'C'}$ を得又 C 及ひ C' の角頂より AB A'B' の底に直立せる CD C'D' の直線を作る時は ACD A'C'D' の三角形は(第二十一款第二設論の推論)相似形なり其故は設想に因て相等しき A 及ひ A' の角を有てるなり因て

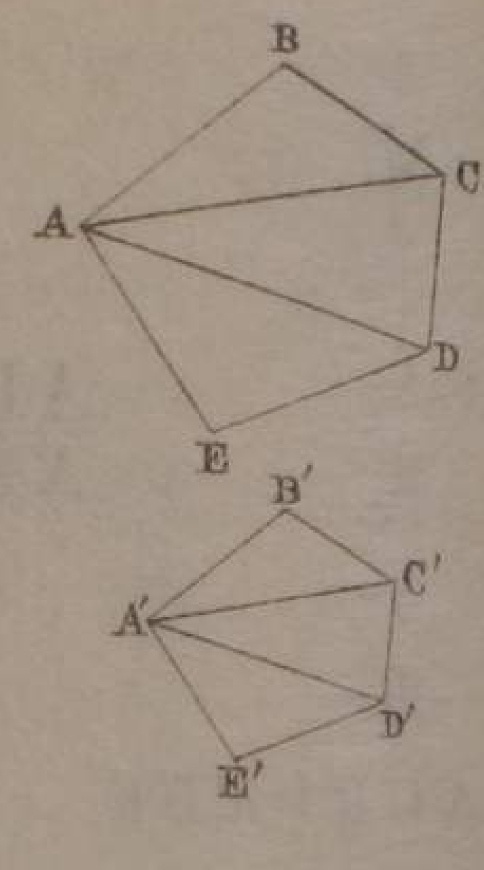


$\frac{CD}{C'D'}=\frac{AC}{A'C'}$ を得

前の二個の相等式の各邊を相乘し以て $\frac{AB\times CD}{A'B'\times C'D'}=\frac{AC^2}{A'C'^2}$ を得然るに ABC の三角形の面積ハ（第三十教第五設論）$AB\times CD$ の相乘の半に等し而して A'B'C' の三角形の面積ハ $A'B'\times C'D'$ の相乘の半に等し故に各三角形の面積の比ハ AC A'C' の相當邊の二方の比に等し

第二設論

ABCDE A'B'C'D'E' の二個の相似多角形の面積ハ相當二邊の二方と比例を為す



A及ひA'の二個の相當角頂より相當の各對角線を作り以て（第二十一教第七設論）同数の相似三角形に分解するなり然る時ハ ABC A'B'C' の二個の三角形ハ相似形なる故（第一設論）$\frac{ABC}{A'B'C'}=\frac{AC^2}{A'C'^2}$ を得又 ACD A'C'D' の三角形ハ相~~等き~~似形なる故 $\frac{ACD}{A'C'D'}=\frac{AC^2}{A'C'^2}$ を得

前の二個の相等式ハ公比を有つ故に $\frac{ABC}{A'B'C'}=\frac{ACD}{A'C'D'}$ なる事決せり此式を見れハ此多角形を分解せし各三角形ハ相比

X^2

例もる事を知る故に $\frac{ABC}{A'B'C'}$ $\frac{ACD}{A'C'D'}$ $\frac{ADE}{A'D'E'}$ の各比ち皆相等し

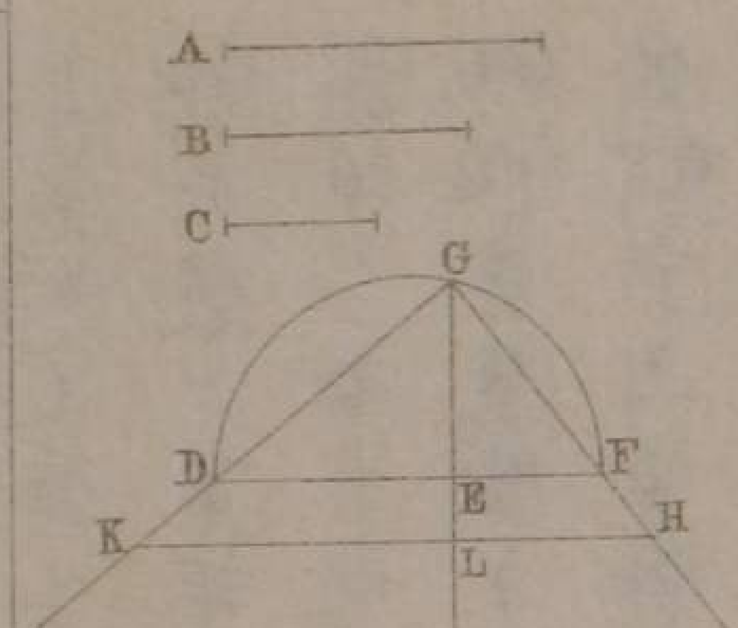
而して

$$\frac{ABC+ACD+ADE}{A'B'C'+A'C'D'+A'D'E'}=\frac{ABC}{A'B'C'}$$

を得然るに其分子 ABC+ACD+ADE ち ABCDE の多角形の面積に等しく其分母 A'B'C'+A'C'D'+A'D'E' ち A'B'C'D'E' の多角形の面積に等し故に此相似多角形ち ABC A'B'C' の二個の相似三角形の面積と比例成為し即ち（第一設論）AB A'B' の相當二邊の二方と比例をなせるなり

問題

設くる所の多角形と相似なる多角形を作り設くる所の多角形との比をして設くる所の二直線の比に等しからしむる事を求む



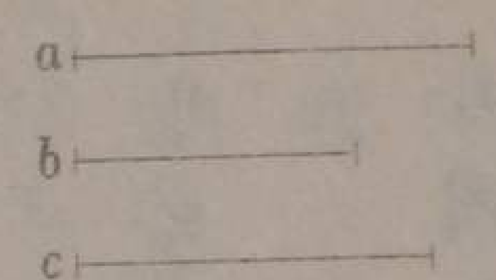
第一設くる所の多角形を正方形なりと定め其一邊をA求むる所の正方形の一邊をX設くる所の二直線をB Cとすもる $\frac{X}{A^2}=\frac{B}{C}$ を得是に於て無界直線

上に於てBに等しきDEの長さを取り次にCに等しきEFの長さを取り此DF上に於て之を中徑として半圓周を作り然る後DFに直立せるEGの直線を作り此G點をGD GEの通弦にてDFの二點にまて聯接するなり然る後GFの上に於て設くる所の正方形のA邊に等しきGHの長さを取り此H點よりDFに平行線を作りK點にまて引長しGDに交らしむ然る時はGKの直線は即ち求むる所の正方形の一邊なり

GHKの三角形のHGKの角は（第十五款第四設論の推論）直角なる故（第三十二款第一設論の推論）$\frac{GK^2}{GH^2}=\frac{KL}{LH}$を得然るにKH DFの平行線は（第二十一款第六設論）一點Gより分出せるGK GL GHの各直線に因て比例せる各分に分つ即ち$\frac{KL}{LH}=\frac{DE}{EF}$なり故に猶亦$\frac{GK^2}{GH^2}=\frac{DE}{EF}$即ち$\frac{GK^2}{A^2}=\frac{B}{C}$なり故にGKの直線は即ち求むる所の正方形のXの邊なり

GK²

第二某多角形Aを知る時は其各邊中の一個をa求むる所のXの多角形の相當の邊をx設くる所の直線をb cとなし$\frac{X}{A}=\frac{b}{c}$及ひ$\frac{X}{A}=\frac{x^2}{a^2}$を得因て又$\frac{x^2}{a^2}=\frac{b}{c}$を得



故にxの邊を決定する事は一個の正方形を作る事に歸せり但し此正方形はaを一邊とせる正方形との比はb及ひcの二直線の比に等しき者なり

此設論中第一の場合に因りxの直線を作り此線上に

於て(第二十五款第九問題)設くる所のAの多角形と相似形なる多角形を作るなり但しx及ひaを相當邊とするなり

注意　二個の多角形の比二數の比にて標示する時は此二數に比例せる二個の直線を上文說く所のa及ひbの二線となし然る後前の方法を行ふなり

問題

一　二個の正方形の和或は差に等しき正方形を作る事を求む

二　二個の相似多角形を設け此二個の和或は差と等積にして且つ相似形なる多角形を作る事を求む

三　設くる所の三角形と相似形なる三角形を作る事を求む但し其各角頂は三個の同心圓周上に在り或は三個の平行線上に在るなり

四　三角形の各邊中の一個との平行線を以て此三角形を等積の若干數に分つ事を求む

五　設くる所の二個の多角形の和或は差と等積なる等邊三角形を作る事を求む

六　三角形内に於て他の設くる所の三角形と相似形なる三角形を作る事を求む

七　設くる所の一點を過きて一個の直線を作り此直線一個の二邊平行方形を二分し設くる所の二直線m及ひnと比例せしむる事を求む

八　設くる所の底線上に於て設くる所の多角形と等積

なる三角形を作り其角頂を底の中央ニ聯接せる直線を他の二邊の中率線ならしむる事を求む

九　二個の平行線及ひ二點を設け此二點を過きて直線を作り此二直線と平行線中の一個の上ニ於て交截し他の者と共ニ三角形を作り設くる所の正方形と等積ならしむる事を求む

十　二邊平行方形の二底との平行線ニて之を等積の若干分ニ分つ事を求む

十一　三角形の底との平行線ニて之を分ち二邊平行方形の積を二個の三角形の中率ならしむる事を求む

十二　二個の相似三角形の周邊を内容圓形の半徑及ひ外切圓形の半徑と比例を為す

此三角形の面積を此半徑の二方ト比例を為す

十三　角の平分線上ニ設くる一點を過きて割線を作り此角内ニ函める此線の分を設くる所の長さニ等しからしむる事を求む

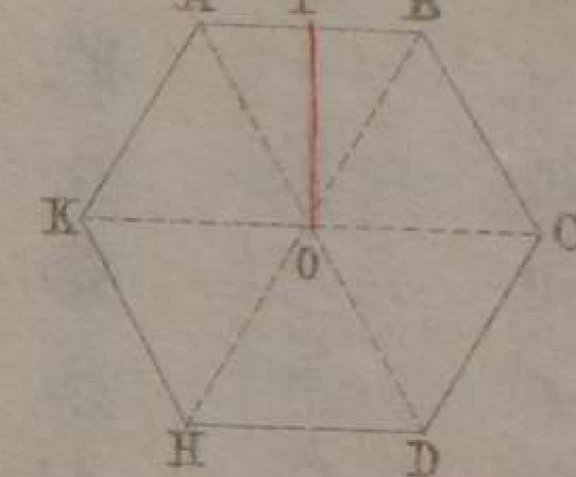
第三十四教

第一設論

正多角形の面積を其周邊ニ其中心距の半を乘せし者なりと

Oハ其正多角形設使をABCDEFの正六角形の中心なり此點よりAB等の角頂ニまてOA OB等の半徑を作る時を此各線を此多角形を其邊數ニ等しき個數の三角形ニ分解す而して此各三角形を（第二十七教第一設論）互ニ相

等し其故を互に相等しき三邊を有てるなり是に於て中心OよりABの邊上に垂線OPを作る時は即ち此多角形の中心距にして又OABの三角形の高さなり故に此三角形を(第三十教第五設論)ABの底とOPの半の相乘を以て測度となす然るに設くる所の多角形をOABの如き六個の等しき三角形より成る故に其面積を $AB\times\frac{OP}{2}$ の六倍なり即ち6ABの周邊とOPの中心距の半を相乘せし者に等し



推論

等しき邊數の二個の正多角形の比を其中心距の二方或を其半徑の二方の比に等し

二個の正多角形等しき邊數を有つ故(第二十七教第三設論)相似形なり故に其面積を(第三十三教第二設論)相當邊の二方或を其周邊の二方と比例を為す然るに各周邊を(第二十七教第三設論)各中心距或を半徑と比例を為す故に此各多角形の面積の比を其各中心距の二方或を半徑の二方の比に等し

注意　圓外に作れる正多角形の面積を其周邊と内容圓形の半徑の半の相乘に等し

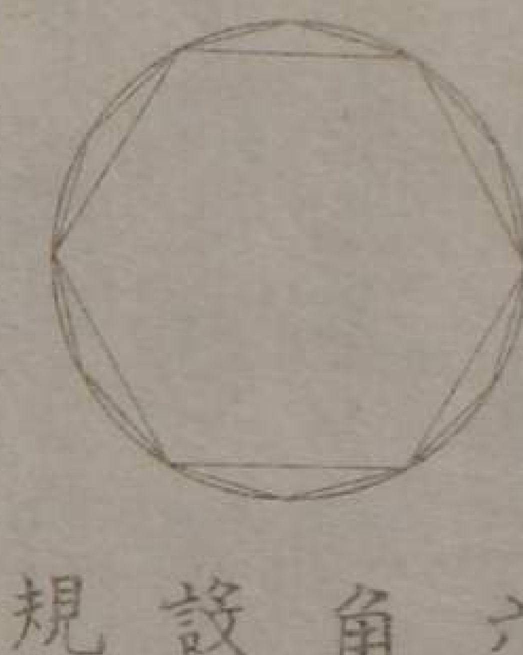
此設論の証法を前の設論の証法に等し

第二設論

圓形の面積を其周に半徑の半を乘せし者に等し

短

設くる所の圓形内に依(拾)て最初或る正多角形設使は正六角形を作り次に十二、二十四角等の正多角形を作る時は此各多角形の面積は（第一設論）其周邊と中心距の半の相乗に等しく此規則ハ内切(容)正多角形の邊の長短及ひ其數に關係せさる故此多角形の表面の界限る圓形に適用すへし故に圓形の面積は其周邊即ち其圓周に其中心距即ち其半径の半を乗せし者に等し



推論

設くる所の圓形の半径をRとすれは

$$cercle\ R = circ.R \times \frac{R}{2}$$

を得此式中（第二十數第四設論の推論）$2\pi R$ を以て $circ.R$ に代用すれは

$$cercle\ R = \pi R^2$$

を得

此相等式よりして左論を得

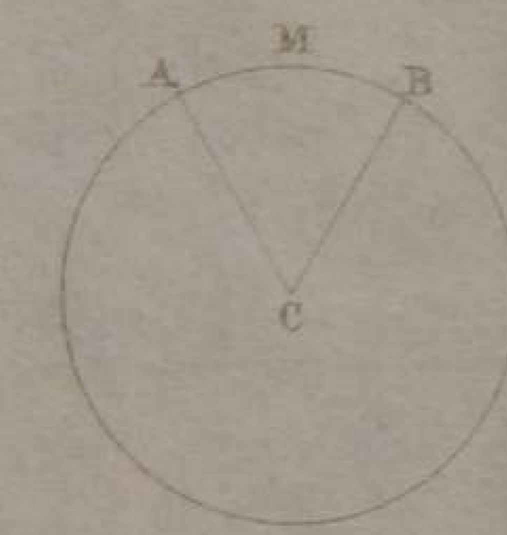
第一　半径を知る所の圓形の面積を算するに其半径の二方に圓周と中径との比を乗すれは可なり

第二　之に反して其面積を知る圓形の半径を算するに此面積を顯はす所の數をπにて除し其商を開平して之を得るなり

第三設論

分圓形の面積は其弧の長に其半径の半を乗せし者に等し

Cは圓形の中心CAは其半徑なり而してACBの分圓形の面積はABの弧の長にCAの半徑の半を乘せし者に等し



(第十五教第二設論の推論)

$$\frac{sect.\ ACB}{cercle\ CB}=\frac{arc.AB}{circ CA}$$

を得此右邊の分母子にCAの半徑の半を乘し以て

$$\frac{sect.ACB}{cercle\ CA}=\frac{arc.\ AB\times\frac{CA}{2}}{circ.CA\times\frac{CA}{2}}$$

を得然るにCAの圓形を(第二設論) $circ.\ CA\times\frac{CA}{2}$ を以て測度となす故前の相等式よりして

$$sect.ACB=arc.\ AB\times\frac{CA}{2}$$

を得るなり

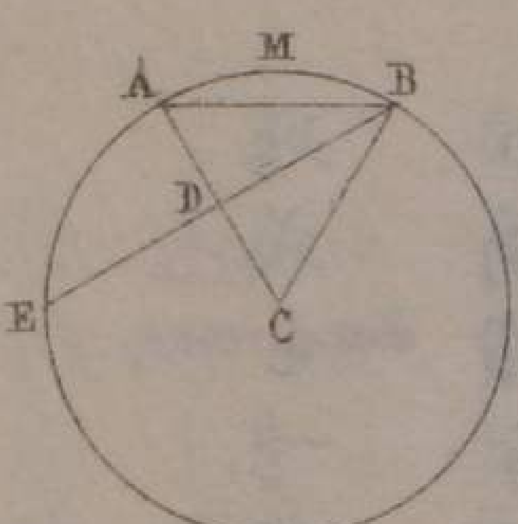
注意　RをCAの半徑としnをABの弧の度數とすれば此弧の長さを(第二十七教第四設論の推論) $\frac{\pi Rn}{180}$ を得因てACBの分圓形の面積は $\frac{\pi Rn}{180}\times\frac{R}{2}$ 即ち $\frac{\pi R^2n}{360}$ に等し

23°,45

例　長さ四万吉羅米突の周の圓形に於て二十三度二十七分の分圓形の面積を方吉羅米突を以て算する事を求む

$\frac{\pi R^2 n}{360}$ の式中 $\frac{40000}{2\pi}$ の値を以てRに代へ 23°27′ 即ち ~~23°,45~~ を以てnに代ゆる時は $\frac{(40000)^2 \times 23.45}{4\pi \times 360}$ を得即ち設くる所の分圓形の積の測度なり之を乗除し 8293741 方吉羅米突を以て概數とす

推論　AMBの圓分の面積はCAMBの分圓形とCABの三角形の面積の差に等し



ABの通弦若し内容正多角形の一邊なる時は第二十八教~~第二~~の諸問題の方法に因て此通弦を半徑にて算し而してCABの三角形の面積を得次にAMBの圓分の面積を得へし又都ての他の場合に於ては三角術學の助けに依る事を要す

例　半徑0m12の圓形に於て90°の圓分の面積を方珊知米突を以て算する事を求む

90°の弧は圓周の四分の一なる故90°の分圓形は亦圓形の四分の一なり故に $\frac{\pi(0,12)^2}{4}$ 即ち $\pi \times (0,06)^2$ を以て測度となす

今求むる所の圓分を得る為めに分圓形より減去をへき三角形に設くる所の圓形内に作れる正方形の四分の一なり故に其面積は（第二十八数第一設論）

$$\frac{2(0,12)^2}{4}$$

即ち

$$2(0,06)^2$$

に等し故に此圓分の面積は

$$\pi(0,06)^2-2(0,06)^2$$

即ち

$$(\pi-2)(0,06)^2$$

を測度となす

此式を一万分の一に於て算し以て

$$0,0041$$

を得因て此圓分の面積は四十一方珊知米突と知る

第四設論

$S=\pi R^2$

$S'=\pi R'^2$

二個の圓形の面積は其半徑の二方と比例を為す

S及ひS'を二圓形の面積とし R及ひR'を其半徑とすきは

$$\cancel{S=\pi R^2}$$

を得故に

$$\frac{S}{S'}=\frac{R^2}{R'^2}$$

なり

第一推論

相似の二個の分圓形即ち相似弧に因て終りさる分圓形の面積は其半徑の二方と比例を為す

S及ひS'を分圓形の面積とし R及ひR'を其半徑としnを其弧の度數とすもは（第三設論）

$$S=\frac{\pi R^2 n}{360}$$

及ひ

$$S'=\frac{\pi R'^2 n}{360}$$

を得

因て

$$\frac{S}{S'}=\frac{R^2}{R'^2}$$

なり

第二推論

相似の二個の圓分即ち相似弧に因て終りたる圓分の面積は其半径の二方と比例を為す

其故は分圓形及ひ三角形即ち其差此圓分に等しき者他の圓分を成せる一ての分圓形及ひ三角形と互に相似形なればなり

數上の問題

一　一地あり其形狀正六角形なり而して其面積は三十四亞尓十九珊知亞尓なり此地の周圍を算する事を求む

二　斜方形の一邊に對角線に等しく其面積は半径十米突なる圓形と等積なる者の邊を算する事を求む

三　長さ$0^{m}.4$の通弦にて120°の弧を張る所の圓形の面積を算する事を求む

四　半径$5^{m}.20$の圓形に於て30°の圓分及ひ分圓形の面積を算する事を求む

五　圓形の面積を其周を以て顯はす事を求む
地球の子午線の面積を方吉羅米突以下の差に於て算し以て前式を活用すへし

六　圓形の半径に一米突を増す時は此圓形の面積も一方米突を増す事を知て其半径を密理米突以下の差に於て算する事を求む

七　圓形内に容る、正六角形の面積十方米突なる事を知て此圓形の面積を方珊知米突以下の差に於て算

せる事を求む

八　2^m25の半径の圓形$60°$の角内に容る、あり此角の二邊と二切點間に函める圓弧とにて成る雜線三角形の面積を方珊知米突以下の差に於て算せる事を求む」

圖上の問題

一　ABCDEFの正六角形の各角頂をAC、BD、CE、DF、EA、FBの各對角線にて二個つゝ聯接せる時は第一相連各對角線の交截して成す所の*abcdef*の多角形を正形なり第二此多角形の面積と設くる所の六角形の面積との比を求む」

二　直三角形の二直邊上に於て之を中径として半圓周を作る時は此の各に此三角形の三角頂を過て作せる半圓周と共に新月形を成せ此二個の新月形の面積の和を此直三角形の面積に等し

三　設くる所の圓形の内方に於て相切し且つ其表面を設くる所の二線に比例せへき二分に分つ所の圓形を作くる事を求む

四　二個の同心圓周の間に函める表面を一個の圓形と等積なり但し此圓形の中径を外圓周の通弦にして内圓周の切線なり

五　二個の同心圓周を作り其大圓周内の表面を其小圓周にて二等分せる事を求む

六　一個の同し圓形の内容正六角形と外切正六角形と

の面積の比を求む

七　正二十角形の面積は其半徑の正方形の三倍に等し」

八　正多角形内の一點より其各邊上に作れる垂線の和は常數なり

九　圓形の中徑ABをACCBの二分に分ち而してABの直線の一傍に於て第一分の上に半圓周を作り又他の一傍に於て第二分の上に半圓周を作くる時は此二曲線を合して設くる所の圓形の表面をABの中徑のACCBの二分に比例せる二分に分つ

十　圓形内に於て120°の角を成すOA OB OCの三個の半徑を作り此三直線上に於て此圓形内に容る、正方形の一邊に等しきOA′ OB′ OC′の長さを取る時はA′B′C′の等邊三角形を此圓内に容る、正六角形と等積なり

十一　七個の正六角形を作る事を求む但し其法其内の六個を設くる所の圓周上に於て二個の角頂を有ち第七の者と一個の公邊を有ち而して此第七の者は此圓周と同心なり此七個の正多角形にて成す凹多角形を設くる所の圓形内に容る、正六角形と等積なり

平面幾何學終