筭學教程講本

立体幾何 二

立体幾何學之部第二

第十二教

定説

二個の多面体若し其各面互ニ相似形ニして且つ此相似面ニて成る多面体角相等しき時ハ之を相似体と名く

二個の相似多面体ニ於て相應せる二點二線二面又二個の二面体角或ハ多面体角を同位置と名く故ニ二個の等しき多面体角ハ同位置の角ニして其各頂ハ同位置の點なり之ニ等しく此同位置の點ニ於て終る所の二個の稜二個の對角線ハ同位置の線なり又二個の相似面ハ同位置の面なり」

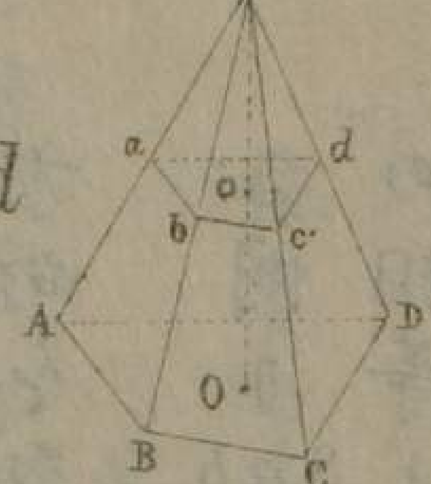
第一設論

P及ひP'の二個の相似多面体の同位置の稜は比例を為す」

P及ひP'の相似多面体の或る同位置の二面は相似形なる故同位置の各邊は比例を為す又Pの多面体のA Bの二個の隣接面に公共なる一邊はP'の多面体のA及ひBと各同位置のA'B'の二個の隣接面に公共なる一邊と同位置なる事を注意すへし故にA A'の同位置の二面の等比は(平面幾何第二十一教定説)B B'の他の同位置の二面の比に等しきに因てP P'の二個の多面体の同位置の各稜は比例を為す

第二設論

某錐体を其底と平行せる平面にて截る時は亦錐体を成す而して原体と相似体なり



abcd は SABCD の錐体に於て ABCD の底と平行せる平面にて作れる截面なり而して SABCD Sabcd の錐体は相似体なり」

此二体の同位置の各面は相似形なり蓋し abcd の截平面は SABCD の錐体の底と平行せる故(第十教第一設論) abcd ABCD の多角形は相似形なり而して Sab SAB 等の同位置の三角形は ab AB 等の直線相平行せる故互に相等しき各角を有ち而して相似形なり又 Sabcd SABCD の錐体の同位

置の多面体角を相等し蓋しSの多面体角を此二体に於て公共にして今又a及いAの同位置の三面体角の等一なる事を證明せんとに此の如くせるにをaの頂をAの頂上にaSの稜をASの稜上に置きSadの平面をSADの平面と合せしめ以て此二体角を重ぬるなり然る時をSadの角をSADの角に等しきを以てadの稜をADの稜の方向を取る又Sabの平面を$dSab$ $DSAB$の二面体角の相等しきに因りSabの平面をSABの平面に合せ而してSab SABの二角の相等しきを以てabの稜をABの稜の方向を取る故にaの三面体角のdabの第三の面をAの三面体角のDABの第三の面と合せ而して此二個の三面体角を相等し又

も及いBの二個の三面体角に於ても同理なり餘之に倣ふ故に$Sabcd$ $SABCD$の錐体を互に相似の各面を有ち且つ同位置の等しき多面体角を有てる者にして相等似体なり

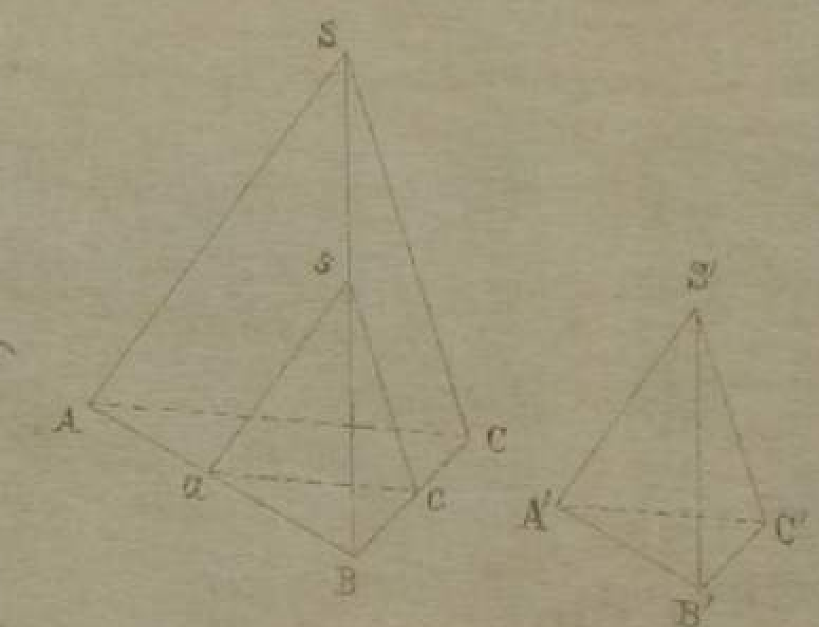
第三設論

二個の三角錐体同位置にして且つ相似の二面の間に等しき二面体角を有つ時を相似体なり

$SABC$ $S'A'B'C'$を二個の錐体にしてAB $A'B'$の等しき二面体角を有ち又SAB $S'A'B'$の面並にABC $A'B'C'$の面を互に相似形なりとに而して若し$SABC$の錐体のSAB ABCの面と$S'A'B'C'$の錐体の$S'A'B'$ $A'B'C'$の面

と同位置なる時は此二体は相似体なり

BA の稜上に於て B'A' の稜に等しき Ba の長さを取り然る後 a 點を過ぎて SABC の錐体の ACS の面と平行せる acs の平面を作る時は此平面は（第二設論）SABC と相似の sabc の錐体を成す因て今此錐体と S'A'B'C' の錐体と相等しき事を証明する事左の如し



ab の二面体角は設想に依り A'B' の二面体角に等しく又 sab の三角形は S'A'B' の三角形に等しく其故は此各三角形は SAB の三角形と相似形にして ab A'B' の同位置の各邊相等し

けれはなり又同理を以て abc の三角形は A'B'C' の三角形に等し故に sabc S'A'B'C' の錐体は同位置にして且つ相等しき二面の間に等しき二面体角を有つを以て（第十教第三設論）相等し因て S'A'B'C' の錐体は SABC の錐体と相似体なり

問題

一　二個の多角錐体若し同位置にして且相似の底及び傍面の間に等しき二面体角を有つ時は相似体なり」

二　二個の相似錐体の面積は同位置の二稜の二方と比例を為す

三　錐体を其底との平行面にて截り此平面にて決定せ

る錐体の面積と原錐体の面積をしてm及びnの二個の長さに比例せしむる事を求む

四　二個の相似錐体互に平行せる同位置の各面を有つ時は同位置の各角頂を聯接せる直線は同し一點に合す

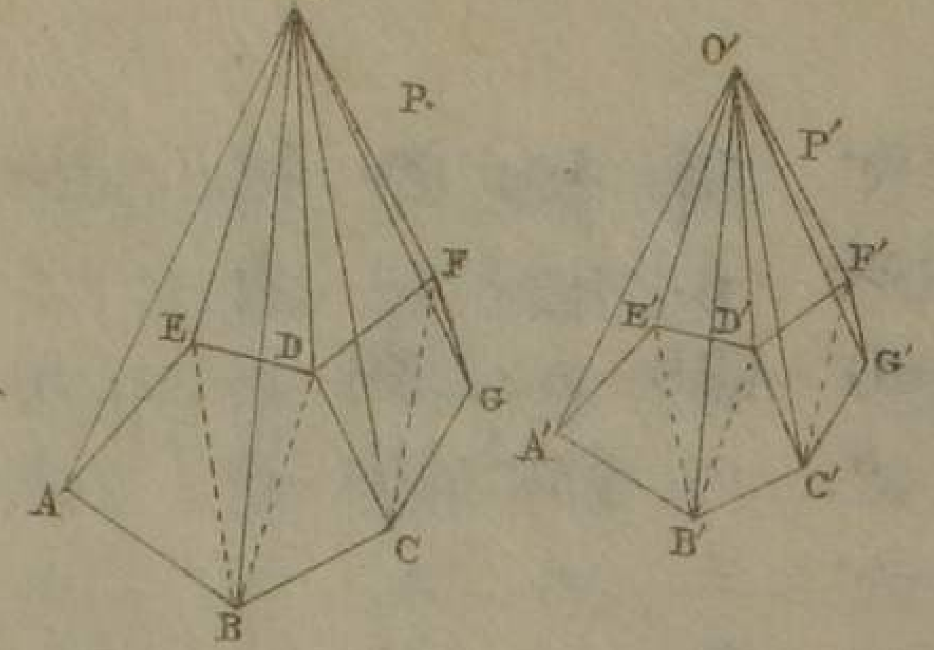
五　一個の點より一個の錐体の各角頂にまて作れる各直線を等比に分つ時は此各分點は原錐体と相似体の第二の錐体の各角頂なり

六　四面体の各角頂を過きて其對面と平行せる各平面を作る時は此各平面にて成せる四面体は原四面体と相似体なるへきや

第十三教

第一設論

二個の相似多面体は相似にして且つ同位置の同數の三角錐体に分解せる事を得



P及びP'を二個の多面体にして先つABCDE A'B'C'D'E'の如き三角形に非らさる同位置の面の同位置の對角線を作り此面を相似の三角形に分ち此多面体の表面を相似にして且つ同位置の同數の三角形に分解するなり

是に於てPの多面体を其表面を分解したる種々の三角形を底とし此多面体の内方に於て取りさるOの共點を公頂とせる各三角錐体に分解するなり又他のP'

の多面体に於てOと同位置の点を決定せるには各稜中の一個設使は$A'B'$を過きて一個の平面を作り此平面をして此多面体の内方に於て$A'B'C'D'E'$の面と共に$OABC$の二面体角に等しき二面体角を成さしむ然る後此平面上に於て$A'B'O'$ $B'A'O'$の角をABO BAOの角と等ふし以てABOの三角形と相似の$A'B'O'$の三角形を作る然るに此$A'B'O'$の三角形のO'の頂はABOの三角形のOの点と同位置なる故P'の多面体を此O'点を以頂とし此多面体の表面を分ちたる種々の三角形を底とせる三角錐体に分つ然る時をP及ひP'の二個の多面体は同位置の同數の錐体に分解せり而して此各四面体は二個つゝ相似体なり

先つ最初に此二個の多面体の同位置の面$ABCDE$ $A'B'C'D'E'$を分ちたる相似の各三角形を底とせる$OABE$ $OBDE$ $OBCD$の四面体及ひ$O'A'B'E'$ $O'B'D'E'$ $O'B'C'D'$の同位置の四面体を注意するに$OABE$ $O'A'B'E'$の四面体は同位置にして且つ相似二面の間にAB $A'B'$の等しき二面体角を有てる故（第十二款第三設論）互に相似体なり因てOBEの三角形は$O'B'E'$の同位置の三角形と相似形なり而して$OBEA$の二面体角は$O'B'E'A'$の同位置の二面体角に等し又同理を以て$OBDE$ $O'B'D'E'$の二個の四面体も亦相似体なり其

故に BDE $B'D'E'$ の各底を設想に依り相似形にして又 OBE $O'B'E'$ の同位置の各傍面は相似形なり而して $OB\cancel{DE}ED$ の二面体角は $OBEA$ $O'B'E'A'$ の各並角相等しきを以て $O'B'E'D'$ の二面体角に等しけれるなり又同様に $OBCD$ $O'B'C'D'$ の二個の四面体の相~~等しき~~似なる事を証し得へし

又 P 及ひ P' の多面体に於て $ABCDE$ $A'B'C'D'E'$ の二面に隣接せる $CDFG$ $C'D'F'G'$ の同位置の二面に属する各四面体を注意するに亦二個つゝ相似体なり蓋し $OCDF$ $O'C'D'F'$ の同位置の四面体を設想に依り相似形の CDF $C'D'F'$ の底を有ち OCD $O'C'D'$ の各傍面は $OBCD$ $O'B'C'D'$ の四面体の相~~等しき~~似なるに因り相似形にして又 $OCDF$ の二面体角は $BCDF$ $BCDO$ の二個の二面体角の差なり然るに $BCDF$ $B'C'D'F'$ の角は P 及ひ P' の相似多面体に於て同位置なる故相等しく又 $BCDO$ $B'C'D'O'$ の角は $OBCD$ $O'B'C'D'$ の相似四面体に於て同位置なる故相等し故に $OCDF$ の二面体角は $B'C'D'F'$ $B'C'D'O'$ の二面体角の

差ニ等シク即チ$O'C'D'F'$ノ二面体角ニ等シ故ニ$\frac{OCDF}{O'C'D'F'}$ノ四面体ハ互ニ相似ニシテ且ツ同位置ノ二面ノ間ニ等シキ二面体角ヲ有テル故相似体ナリ又同様ニ$\frac{CDFG}{C'D'F'G'}$ノ二面ニ属スル他ノ四面体ノ相~~等シキ~~似タル事ヲ証シ得ヘシ餘之ニ倣フ故ニP及ヒP'ノ多面体ハ相似体ニシテ且同位置ノ同數ノ三角錐体ニ分解スル事ヲ得

推論

此O点ハPノ多面体ノ表面上ニ於テ設クル事ヲ得若シ又此O点此多面体ノ各角頂中ノ一個設使ハAニ合スル時ハO'ノ点ハAト同位置ノA'ノ角頂ニ合セヘシ

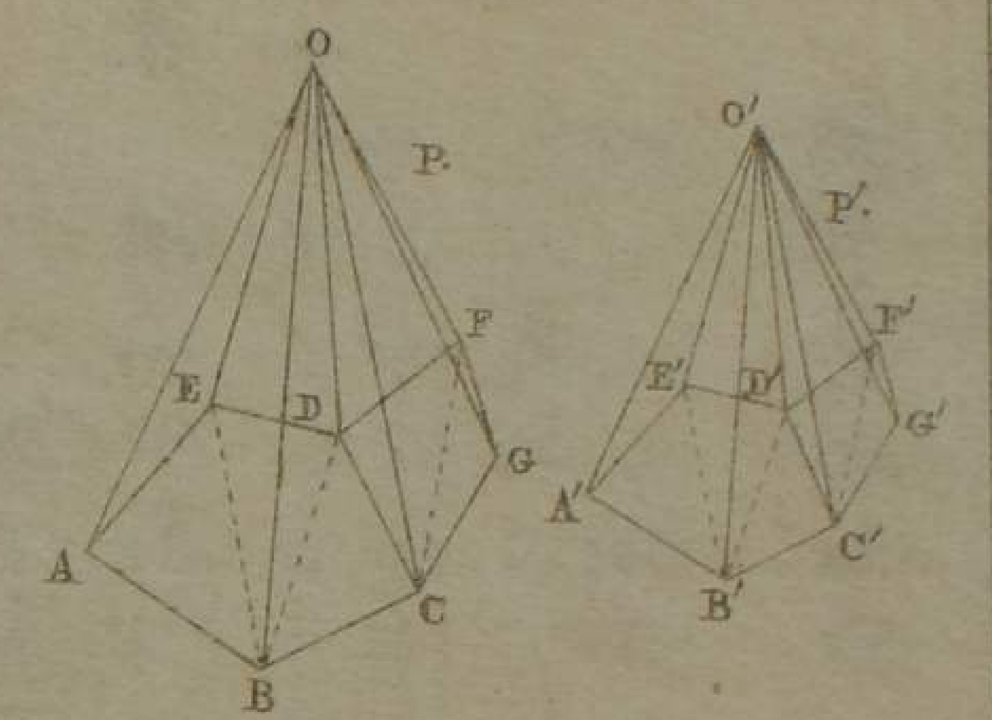
而シテP及ヒP'ノ多面体ヲ分解シタル各四面体ノ傍稜ハ此多面体角ノ同位置ノ對角線ナルヘシ之ニ因テ左論ヲ得

二個ノ相似多角面体ニ於テ同位置ノ各對角線ハ(第十二設教論ノ~~推論~~第一復論)同位置ノ各傍稜ト比例ヲ為ス

第二設論

反言　相似ニシテ且ツ同位置ノ同數ノ三角錐体ヨリ成リタルP及ヒP'ノ多面体ハ相似体ナリ

先ツ最初ニPノ多面体ノ$\frac{OABE}{OBDE}$ノ二個ノ錐体ノ$\frac{ABE}{BDE}$ノ底同シ平面上ニ在ル時ハPノ多面体ノ$\frac{O'A'B'E'}{O'B'D'E'}$ノ同位置



の錐体の $A'B'E'$ $B'D'E'$ の底も亦同し平面上に在る事を證せんとす

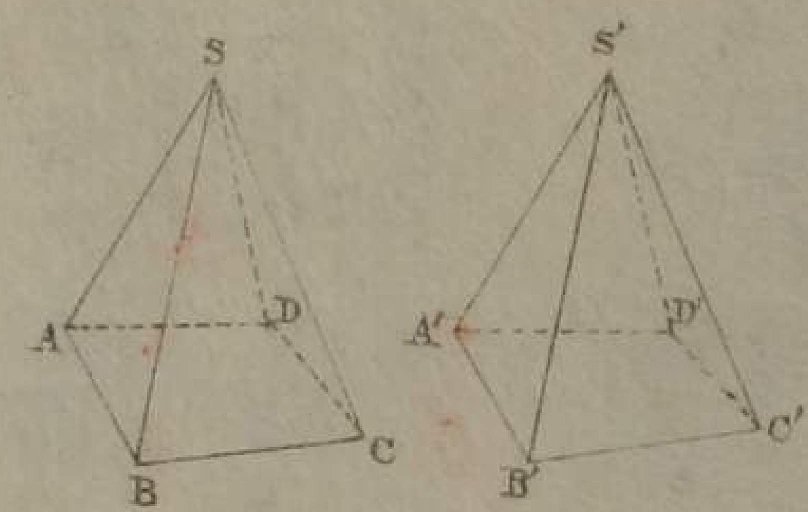
蓋し ABE BDE の三角形も同し平面上に在るを以て OBEA OBED の二個の隣接せる二面体角を合して（第五教第五設論）二個の直二面体角に値す然るに OABE $O'A'B'E'$ の二個の相似四面体の OBEA $O'B'E'A'$ の同位置の二面体角も相等し又同理を以て OBED $O'B'E'D'$ の二面体角も相等し因て $O'B'E'A'$ $O'B'E'D'$ の隣接せる二面体角も並角を為す故に（第五教第六設論）$B'E'A'$ $B'E'D'$ の不公面も同し平面上に在り

又Pの多面体を ABE BDE BCD の三個の三角形より成りたる ABCDE の面を有ち而して此三角形と互に相似形なる $A'B'E'$ $B'D'E'$ $B'C'D'$ の三角形を P' の多面体に於て ABCDE に應する $A'B'C'D'E'$ の面を為す事知るへし然るに此同位置の二面を相似にして且つ同位置の同數の三角形より成る故（平面幾何第二十一教第八設論）相似形なり又 CDFG $C'D'F'G'$ の面に於ても同理なり餘之に倣ふ

BCDO B'C'D'O' の同位置の二面体角ハ相等しく又

又Pの多面体のABCDE CDFGの隣接二面の傾斜をP'の多面体のA'B'C'D'E' C'D'F'G'の相應二面の傾斜に等し蓋しBCDFの二面体角ハBCDO FCDOの二面体角の和に等し然るにOBCD O'B'C'D'の相似四面体に於てOFCDO O'F'C'D'O'の相似四面体に於てFCDO F'C'D'O'の同位置の二面体角を相等し之に因てBCDFの二面体角を亦B'C'D'O' F'C'D'O'の二面体角の和即ちB'C'D'F'の二面体角に等し

故にP及びP'の多面体の同位置の各面を相似形にして且つ同傾斜なり又SABCD S'A'B'C'D'の如き同位置の多面体角を互に相等しく且つ同位置の面及び二面体角を有つ因て互に相重ぬへく即ち相等し

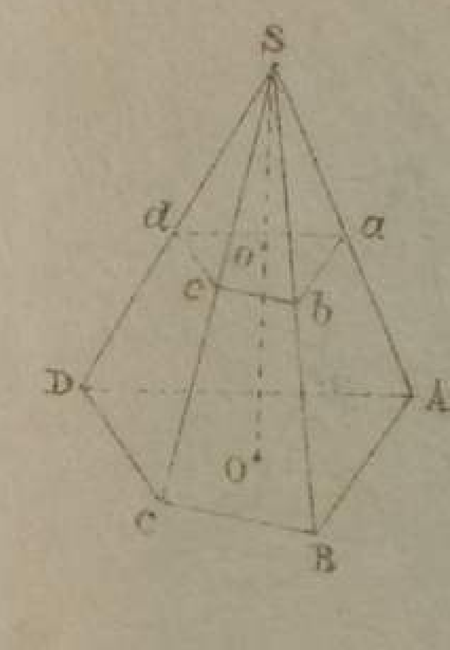


故にP及びP'の多面体を互に相似の各面及び同位置の等しき二面体を有てる故相似体なり

第三設論

二個の相似錐体の体積を同位置の稜の三方と比例を為す

SABCD Sabcd ち二個の相似錐体にして其多面体角を合して以て互に相重ねたる者とする時ち此各錐体の底 ABCD abcd ち相平行し而して SO So の高さち S の頂より底上に作れる垂線即ち SO の直線上に於て測るへき者なり



又 SABCD Sabcd の錐体ち相似体なる故 ABCD abcd の底ち亦相似形なり而して此多角形の面積ち（平面幾何第三十三数第二設論）同位置の各邊の二方と比例を為し即ち（第十二設論）教第一設論 推論此錐体の各稜の二方と比例をなす故に $\frac{ABCD}{abcd}=\frac{SA^2}{Sa^2}$ を得

然るに SABCD の錐体の底 ABCD と平行せる abcd の平面ち（第十数第一設論）SA SO の直線を比例せる各分に分つ因て $\frac{SO}{So}=\frac{SA}{Sa}$ を得

以上二個の相等式の各邊を相乗し以て $\frac{ABCD\times SO}{abcd\times So}=\frac{SA^3}{Sa^3}$ を得然る

に $\frac{SABCD}{Sabcd}$ の錐体の体積を（第十教第五設論）$\frac{ABCD\times SO}{abcd\times So}$ の相乗の三分の一に等し故に此体積の比を $\frac{SA}{Sa}$ の同位置の稜の三方の比に等し

推論

二個の相似錐体の高さを同位置の二稜と比例をなす

第四設論

P及ひ p の二個の相似多面体の体積をA及ひ a の同位置の二稜の三方と比例をなす

P及ひ p の二個の相似~~錐~~多面体を（第一設論）同數の相似四面体に分解し設使をV V′ V″等をPの多面体を成せへき四面体の体積とし v v' v'' 等を p の多面体を成すへき相應の四面体の体積とす然る時に此同位置の三角錐体を相似体にして且つこの二錐体の同位置の稜を（第十二教第一設論）比例を為す故に（第三設論）

$$\frac{V}{v}=\frac{A^3}{a^3}$$

$$\frac{V'}{v'}=\frac{A^3}{a^3}$$

$$\frac{V}{v''}=\frac{A^3}{a^3}$$

を得因て

$$\frac{V}{v}=\frac{V'}{v'}=\frac{V''}{v''}\cdots=\frac{A^3}{a^3}$$

を得遂に

$$\frac{V+V4V''\cdots}{v+v'+v''\cdots}=\frac{A^3}{a^3}$$

を得

推論

二個の相似~~錐~~多面体の面積を同位置の~~邊~~稜の二方と比例を為す

配數復習

一　錐体の高さ $4^{m},50$ 其底を正方形にして其一邊の長さ $1^{m},20$ ち

ふ者あり今之と相似の錐体なり其体積を七立方米突二百九十立方垤止米突あり此体の底の一辺及ひ高さを算する事を求む

cを第二錐体の底の一邊hを其高さとすれば原錐体の体積は

$$\frac{1}{3}(1,2)^2 \times 4,5$$

即ち二立方米突百六十立方垤止米突にして(第三設論)

$$\frac{c^3}{(1,2)^3}=\frac{h^3}{(4,5)^3}=\frac{7,240}{2,160}$$

9

を得是によりc

$$c=\sqrt[3]{\frac{729(1,2)^3}{216}}=\frac{9\times 1,2}{6}$$

及ひ

$$h=\sqrt[3]{\frac{729(4,5)^3}{216}}=\frac{9\times 4,5}{6}$$

を得

遂に $c=1,^{m}80$ 及ひ $h=6,^{m}75$ を得

二

矩平行面体の面積は三平方米突にして其三長度の比は四六九なる者あり此体積を算する事を求む

先つ其三長度四米突六米突九米突なる矩平行面体の面積及ひ体積を算するなり此面積は六個の矩形より成る者にして此内二個は四米突六米突を長度とし他の二個は四米突九米突を長度とし又他の二個は六米突九米突を長度とする者なり故に此平行面体の全面積は

$$4\times6\times2+4\times9\times2+6\times9\times2$$

即ち228平方米突に等し又其体積は $4\times6\times9$ 即ち

216立方米突に等し
此平行面体と互に相似形なる各面を有ち且つ同位置の等しき多面体角を有てる故（第二設論）互に相似体なり故に各体積は（第四設論）同位置の稜の三方と比例を為し其面積は同稜の二方と比例を為す故に未知の体積をVとし四米突の稜と同位置の者をAとすれば（第四設論）

$$\frac{V}{216}=\frac{A^3}{64}$$

及び

$$\frac{3}{228}=\frac{A^2}{16}$$

を得此第二式の化法を行ひ

$$A=\frac{2}{\sqrt{19}}$$

を得此Aの値を第一式に代用し以て

$$\frac{V}{216}=\frac{8}{64(\sqrt{19})^3}$$

を得因て

$$V=\frac{27}{(\sqrt{19})^3}$$

即ち

$$V=0,^{m.c.}326012$$

を得るなり

問題

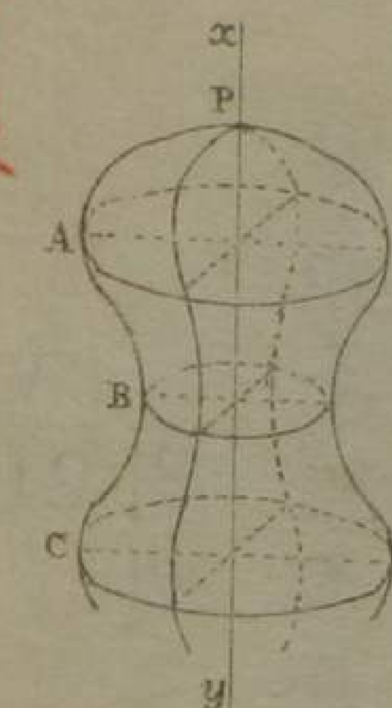
一　矩平行面体の三長度の比$\frac{2}{3}\,\frac{4}{5}\,\frac{3}{4}$にして其体積二立方米突なる者あり此三長度を珊知米突に於て算する事を求む

二　錐体の底と平行せる平面を作り此平面にて此多面体の体積を二分し設くる所の二線m及びnと比例をなさしむる事を求む

第十四第十五教

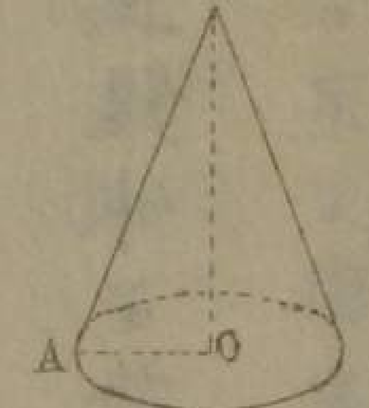
定説

直線或は曲線空間に於て旋轉するときは其線の逐次に占領する位置の場所は或る表面なり此線を此表面の母線と名く此母線の運動を整へる所の線を準線と名く
凡そ表面平面に非ず又平面を聯接して成る者に非ざる者を曲面と名く
曲面の内に於て特に旋轉面を別つ旋轉面はxyの定直線を繞りてABCの如き某線一定の方法を以て旋轉し以て成る者なり此xyの直線を此面の軸と名く



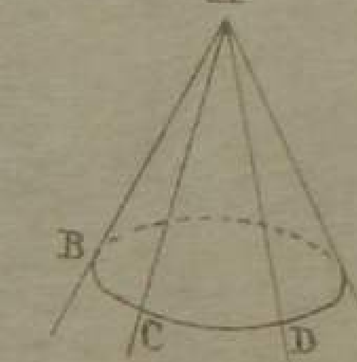
軸に直立せる凡ての截面界を旋轉面の平行面緯線と名く又軸を過ぐる平面にて作れる截面界を此面の經線と名く

SAOの直三角形SOAの直角の二辺中の一個設使はSOの辺を軸として旋轉して生する所の体を直圓錐体と名く

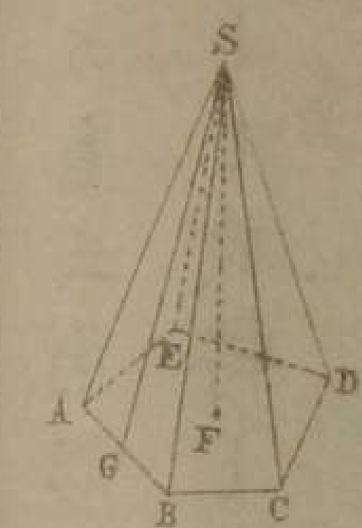


OAの直角辺は圓形を作り而して其平面は（第一教第三設論の推論）SOの軸と直交す之を圓錐体の底と名く又S點を此体の頂と名けSOを其高さと名く又SAOの直三角形のSAの斜辺は旋轉面を作る之を圓錐体の傍面積と名けSAを其斜高と名く
又ABの直線常にAの一定點を過ぎ而して此点を繞りて旋轉し且つ此表面の準線なるべきBCDの如き設くる所の曲線に接する者にて生する所の面を圓錐面と名く
若し此準線閉圜せる曲線にして而して此圓錐面をBCDの平

面即ちAの頂點の同一方に於て此母線の凡ての位置に交はる者にて之を截るときは此平面及び此圓錐面の間に函める体を雜圓錐体と名く此体はBCDの面を底としA点を頂とし此頂より底迄の距離を高さとす



二個の直圓錐体の高さ底の半徑と比例をなす時即ち此二体相似直三角形にて成る時は之を相似体と名く



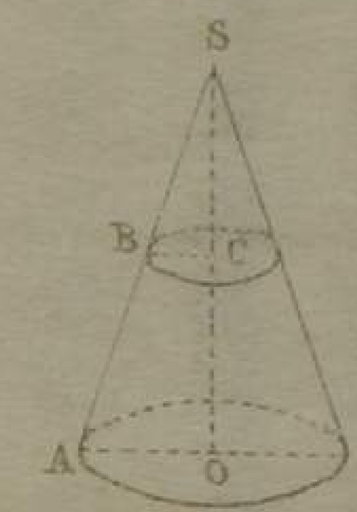
SABCDEの正錐体に於てSの頂よりABCDEの底のABの如き某邊上に下せるSGの垂線を此体の斜高と名く此SGの垂線は不變長なり蓋し正錐体の定説に依れはSA SB SC等の各傍稜は頂より底上に下せるSFの垂線より等距なり故に（第一数第六設論）相等し因て此錐体の傍面を成せる所のSAB SBC SCD等の二等辺三角形は互に相等しき三辺を有てる故相等し故に此各三角形の高さ即ちS點よりABCDの底の各辺上に作れる垂線は相等し

某錐体圓錐体と等高にして且つ其底は圓錐体の底に内容せへき時は此錐体は圓錐体に内容すへしと謂ふ又を反言して圓錐体は某錐体に外切すと謂ふ

直圓錐体に於て正多角形を底とせる錐体を内容すへき時は此錐体は正錐体なり其故は底の中心を其頂に聯接せる直線は圓錐体の軸と合し底に直立せるなり

第一設論

直圓錐体の底と平行せる平面にて作せる截面ハ圓形なり



設使ハSOAの直角の一辺SOの上に於てSAOの直三角形の旋轉する事に因て生ずる圓錐体に於てSAの母線の某一點BよりSOの軸上にBCを作る時ハSAOの三角形の旋轉中BCの直線ハ（第一教第三設論の推論）SOに直立せる平面を作る而してC點迄の距離常數なる所のB點ハ此平面上に於て此C點を中心とせる圓周を作る故にSAOの直圓錐体に於て軸に直立せる平面即ち（第三教第六設論）圓錐体の底と平行せる平面にて作せるBCの如き凡ての截面ハSOの軸上に於て中心を有てる圓形なり

第一注意　此定說設論ハ左の如き設論即ち其証法前と同様なる者の内に於ける一個の格段なる場合なり

凡そ旋轉せる表面に於て其軸に直立せる平面にて作れる截面ハ圓形なり

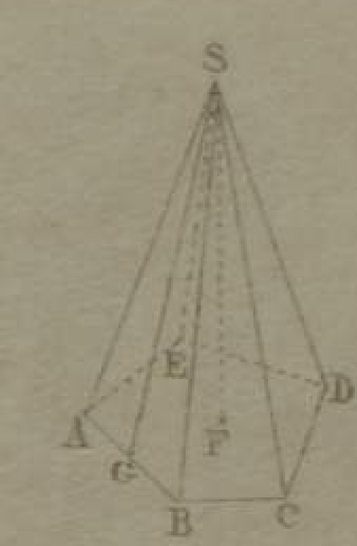
第二注意　SAOの直圓錐体をOAの底と平行せるBCの平面にて截る時ハ此底と截面との間に函める一分を圓錐体の平截段と名く

OACBの圓形ハ此圓錐体の截段の二底にして此圓錐体の斜高SAの一分即ち此二底の間に函めるABを以て其斜高となす

第二設論

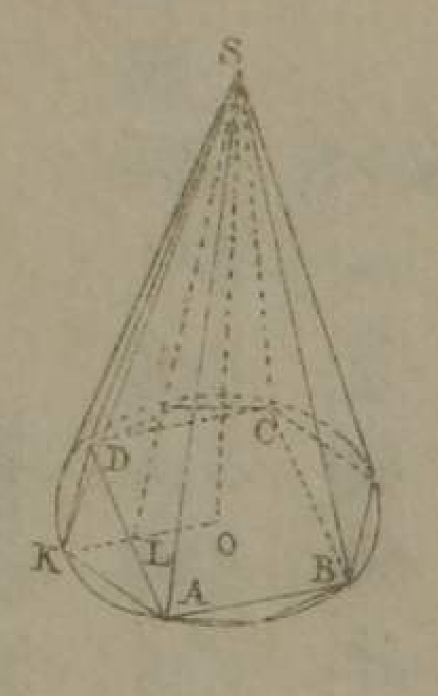
正錐体の傍面積ハ其底の周邊と其斜高の半との相乘に等

し



SABCDEは正錐体にしてABCDEを底としS点を頂としSGの直線を斜高とする若まり其傍面積はABCDEの多角形のAB BC CD等の各邊を底とし(定説)錐体の斜高SGを公高とせるSAB SBC SCD等の三角形の和に等し然るに此各三角形は其底と高さの相乘の半に等し

故にSABCDEの正錐体の傍面積は$(AB+BC+CD+\cdots)\times\frac{SG}{2}$にして即ち其底のAB+BC+CD……



の周辺とSGの斜高の半との相乘に等し

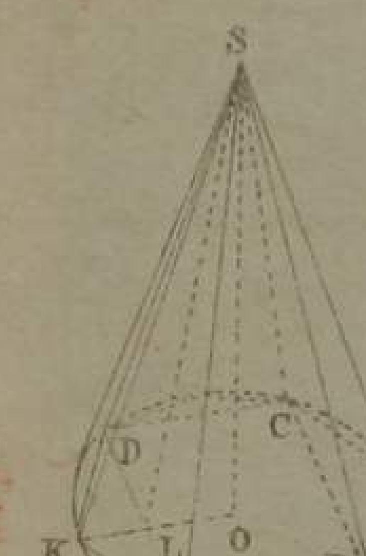
注意

SOKの直圓錐体に於て或る正錐体設使はSLを斜高とせるSABCDの四角錐体を容れ然る后其底の邊數を無窮に倍するときはSLの斜高は増大し圓錐体の斜高SKと無窮に相接近し而して遂に相等しきあたはず因て錐体の傍面積は増大し而して圓錐体の傍面積との差次第に減少せり又此二体の体積に於ても同様なり故に圓錐体の斜高面積及ひ体積は此内に容るゝ正錐体の面數無窮に増加せしとき此錐体の斜高傍面積及ひ体積の互に歸向する限として考ふる事を得而して圓錐

体は其内容正錐体の面數及ひ其面の大小に關せぬ此錐体の為めに証明せし凡ての性質を有てる者と注意すへし

第三設論

直圓錐体の傍面積は其底の圓周と斜高の半との相乘に等し



SOK の直圓錐体内に於て或る正錐体設使は SABCD の正四角錐体を容れ然る後八角十六角等の者を容る時は此各錐体の傍面積は次第に増大し此体に外切せる SOK の圓錐体の傍面積を以て其限と為せ然るに此各体の面積は此体を成せ所の面數およひ其大小如何に關せぬ其底の周邊と其斜高の半との相乘に等し故に（第二設論）SOK の圓錐体の傍面積は（第二設論の注意）亦其底の圓周と其斜高の半との相乘に等し

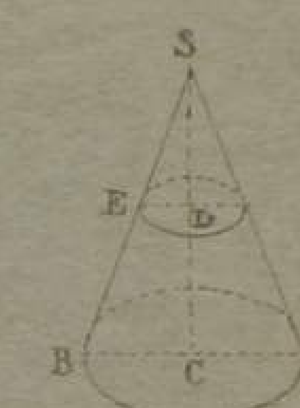
注意　直圓錐体の斜高をAとし其底の半径をRとなれは其傍面積は $\pi R\times A$ にして其全面積を得るには $\pi R\times A$ に此圓錐の底の面積即ち πR^2 を加ふへし即ち $\pi R(A+R)$ なり

推論

SBC の直圓錐体の傍面積は頂及ひ底より等距の DE の平行圓周と其斜高との相乘に等し

D點は SC の中央なる故此平行圓の DE の半径は（平面幾

何第二十七教第四設論）底の半径CBの半に等し故に



$\frac{1}{2}circ.CB \times SB = circ.DE \times SB$ を得

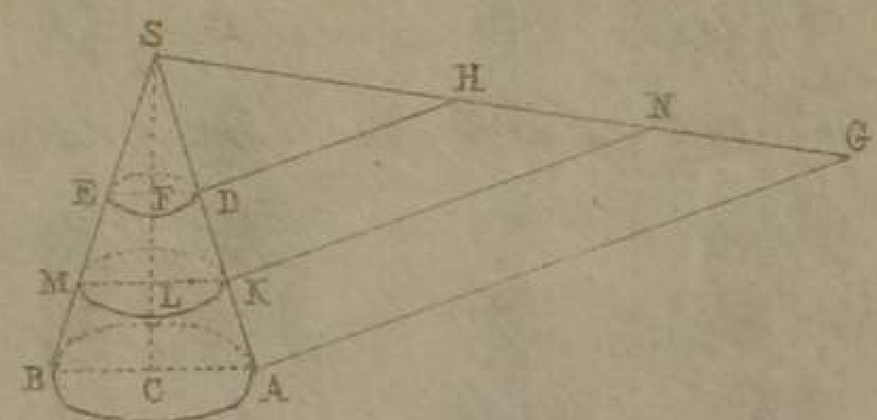
第四設論

直圓錐体の平截段の傍面積は其二底圓周の半和と其斜高との相乘に等し

ABEDは圓錐体の截段にして SAC SDF の二圓錐体の底AB DE相平行せる者の差に等し今SAの母線の一端Aより此直線上に垂線AGを作り其長さは此截段の下底CAの圓周に等しからしめ然る后SGの直線を作り且つSAの母線と此截段の上底との交点DよりAGと平行せるDHの直線を作る時は此直線はFDの圓周に等し

SCの直線はSACの圓錐体の軸なるをもてSDF SACの三角形は直三角形にして且つ相似形なり故に（平面幾何第二十七教第四設論）

$\frac{SD}{SA}=\frac{FD}{CA}=\frac{circ.FD}{circ.CA}$ を得



又SDH SAGの三角形は直三角形にして且つ相似形なり故に

$\frac{SD}{SA}=\frac{DH}{AG}$ を得因て

$\frac{circ.FD}{circ.CA}=\frac{DH}{AG}$ を得

然るにAGの直線は設想に依りCAの圓周に等し故にDHの直線は亦FDの圓周に等し
SAC.の圓錐体の傍面積は（第三設論）$\frac{1}{2}$ circ. CA×SA に等し故に$\frac{1}{2}$AG×SAを以て面積とせるSAGの直三角形と等積なり又同様にSDFの圓錐体の傍面積はSDHの直三角形と等積なり故にABEDの圓錐截分はAGHDの二邊平行方形の面積に等し然るに此二辺平行方形の面積は（平面幾何第三十教第六設論）$AD \times \left(\frac{AG+DH}{2}\right)$に等し故にABEDの圓錐截段の傍面積は其斜高と其二底圓周の半和との相乘に等し

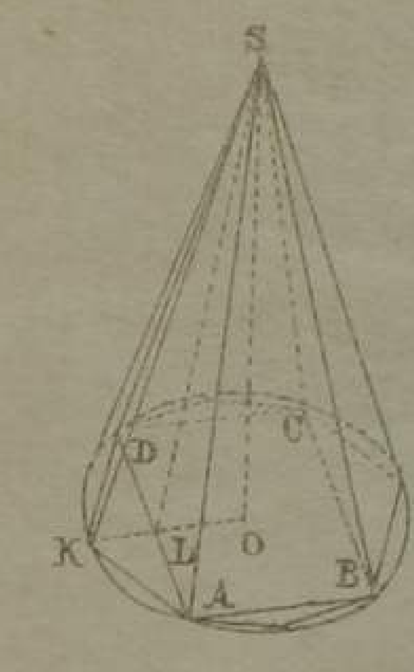
推論

ADの斜高の中央KよりAGと平行せるKNの直線及ひ錐体截段の底と平行せるKLの平面を作るときはKNの直線はLKの圓周に等し然るに二邊平行方形は（平面幾何第三十教第六設論）AD×KNを以て其面積となす故にABDEの直圓錐平截段の傍面積は二底より等距のKLの平行圓周とADの斜高との相乘に等し

第五設論

直圓錐体の体積ハ其底と高さの相乗の三分の一ニ等し

SOKの直圓錐体内ニ於て或る正錐体設使ハ正四角錐体を容き然る后八角十六角等の正錐体を容る、時ハ此各錐体の体積ハ次第ニ増大しSOKの外切圓錐体の体積を以て其限とす然るニ此各体ハ其面數及ひ其大小如何ニ關せす其底と高さの相乗の三分の一ニ等し故ニSOKの圓錐体の体積ハ（第二設論の注意）亦其底と高さの相乗の三分の一ニ等し



注意　直圓錐体の底の半径をRとし高さをHとすきハ其体積ハ $\frac{1}{3}\pi R^2 \times H$ ニ等し

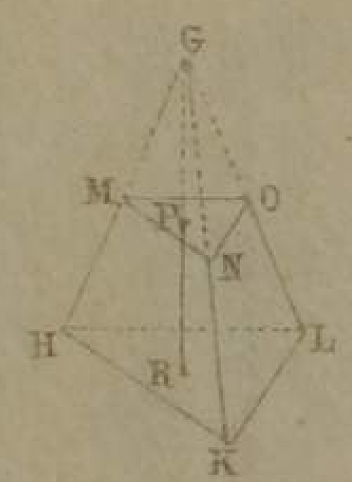
推論

二個の直圓錐体其高さ相等しき時ハ其体積ハ其底と比例を為し又其底相等しき時ハ其体積ハ其高さと比例を為し

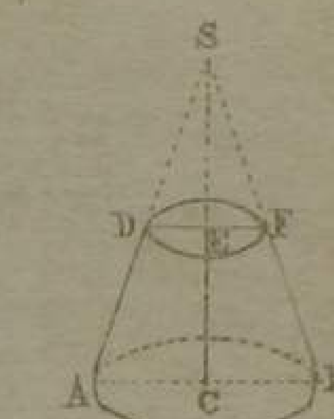
第六設論

直圓錐体の平截段ハ此截段の高さを公高とし其上下底及ひ二底の中率を各底とせる三個の直圓錐体と等積なり

ABFDハ圓錐の截段ニしてSAB SDFの二個の直圓錐体の底AB DF相平行せる者の差なり今此截段の下底の平面上ニ於てGHKLの三角錐体を作りHKLの底をしてACの圓形と等積ニしてGR



の高さはSABの圓錐体の高さSCと等しからしむ然る時は此截段の上底の平面は此錐体に於てMNOの截面を作り此截面はEDの圓形と等積なり



此圓錐截段の二底は相平行せる故SCAの平面はCAと平行せるEDの直線に循て此圓錐截段の上底を截る而してCA EDの半径の比はSC SEの高さの比に等し故に

$$\frac{\text{cercle}\,CA}{\text{cercle}\,ED}=\frac{CA^2}{ED^2}=\frac{SC^2}{SE^2}$$

を得又MNO HKLの平面の相平行せるを以て $\frac{HKL}{MNO}=\frac{GR^2}{GP^2}$ を得然るにGR及びSCの直線並にGP及びSEの直線は設想に依り相等し因て $\frac{\text{cercle}\,CA}{\text{cercle}\,ED}=\frac{HKL}{MNO}$ を得然るにHKLの三角形は製圖に依てCAの圓形と等積なり故にMNOの三角形は亦EDの圓形と等積なり

SACの圓錐体の体積は $\frac{1}{3}\text{cercle}\,CA\times SC$ なる故 $\frac{1}{3}HKL\times GR$ を以て体積とせ

るGHKLの錐体と等積なり又同様にSDEの圓錐体とGMNOの錐体とも等積なりゆへにABEDの圓錐截段をHKL MNOの錐体截段と等積なり又此錐体截段の体積を（第十教第六設論）

$$\frac{1}{3}PR\left(HKL+MNO+\sqrt{HKL\times MNO}\right)$$

なり故に此圓錐截段の体積を

$$\frac{1}{3}CE\left(cercle\,CA+cercle\,ED+\sqrt{cercle\,CA\times cercle\,ED}\right)$$

にして即ち此截段の高さCEを公高としCA及ひCEの圓形並に此二圓形の中率を以て底とせる三個の圓錐体の和と等積なり

注意　Rrを此截段の二底の半徑としHを其高さとすれは其体積の式は

$$\frac{1}{3}\pi H(R^2+r^2+Rr)$$

なり

問題

一　二個の直圓錐体相似体なる時は其傍面積は其底の半徑の二方と比例を為し其体積は其三方と比例を為す

二　直圓錐体の傍面を其底と平行せる平面にて等積に二分する処を求む

三　直圓錐体の全面積十方米突にして其底の半徑 $1^{m}.2$ に等しき者なり此圓錐体の斜高及び高さを筭し又其体積を珊知米突立方以下の差に於て筭する事を求む

四　直三角形を其直角の各邊に於て逐次に旋轉するときに生する所の二個の圓錐体は其高さと反比例を為す

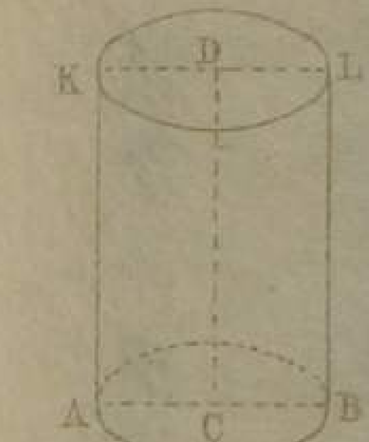
五　一個の桶を以て二個の等しき圓錐截段の其大底に於て接する者と考ふる時は其桶の深さ $1^{m}.32$ にして其中腹及び底の半径は $0^{m}.88$ 及び $0^{m}.64$ なる者の容積を珊知里杜児に於て算する事を求む

此設想に於ては $\frac{1}{3}\pi H(R^2+Rr+r^2)$ を以て桶の容積とす但しHは其深さRは中腹の半径rは底の半径なり然れとも此式にて計筭せる容積は過小なり今Rrの相乗を R^2 に代用する時は $\frac{1}{3}\pi H(2R^2+r^2)$ の式を得是れ英國算學士「オー

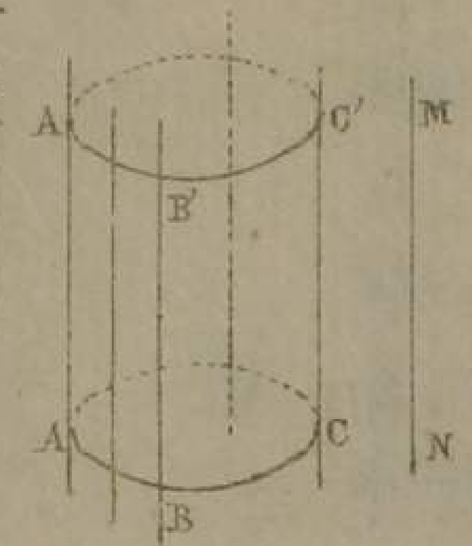
六
トレット氏ノ定むる者なり
等辺三角形のCの辺を知り此三角形其高さを軸として旋轉し以て生する所の圓錐体の全面積及ひ体積を筭する事を求む
又此圓錐体の全面積を一方米突と知り或ハ其体積を一立方米突と知りCの値を粣知米突以下の差に於て算する事を求む

第十六教

定説



ACDKの矩形其一辺設使ハCDの辺を軸として旋轉し以て生する所の体を直圓柱体と名く
CDの軸は直立せるCA DKの邊を此圓柱体の二底を作り而して此二底を相平行して且つ相等しき圓形なり又此二底の距離を測るへきCDの直線を此体の高さと名け軸と平行せるAKの邊にて生せる旋轉の面を此体の傍面と名く



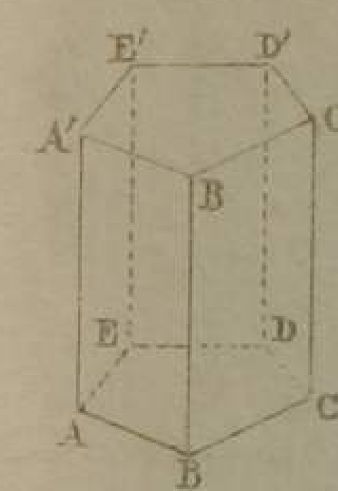
AA'の直線MNの定直線と平行して運動し而してABCの曲準線に接し以て生せる所の面を圓柱面と名く
此準線閉圜せる某線にして而して此圓柱面をMNの直線に交はるへきABC A'B'C'の平行平面にて截るときは此二平面と圓柱面との間に在る体を雜圓柱体と名く此圓柱体をABC A'B'C'の二平面を底とし此二底の平面の距離を高さとく.

二個の直圓柱体の高さ其底の半径と比例をなし者即ち相似矩形に依て生ずる者を相似体と名く

某柱体の底圓柱体の底内に容る、時ハ此柱体ハ此圓柱体に内容せと謂ふ又之を反言して圓柱体ハ某柱体に外切せと謂ふ

第一設論

直柱体の傍面積ハ其高さと其底の周邊の相乗に等し

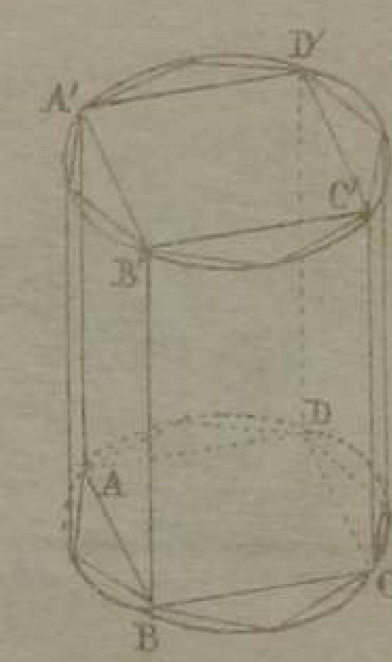


設使ハ ABCDE A'B'C'D'E' の等しき多角形を底とせる直柱体に於て其傍面積ハ此柱体と等高の AA' を高さとし其底 ABCDE の AB BC CD 等の邊を各底とせる AB' BC' CD' 等の矩形の和に等し然るに此各矩形の面積ハ（平面幾何第三十数第三設論）其底と高さの相乗に等し

故に此柱体の傍面積ハ $(AB+BC+CD+\cdots\cdots)\times AA'$ にして即ち $AB+BC+CD+\cdots\cdots$ の周邊と AA' の高さの相乗に等し

注意 ABC'D' の直圓柱体内に於て成る正柱体設使ハ ABCDA'B'C'D' の正四

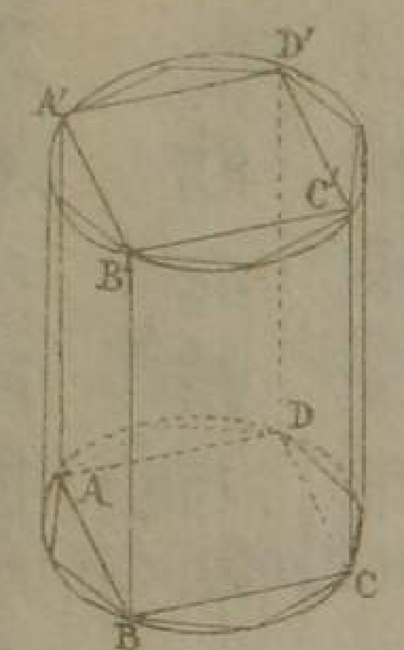
角柱体を容き然る后此底の邊數を無窮に倍せるときは此柱体の全面積は増大し外切圓柱体の面積と無窮に相接近し而して遂にそよりふらり又此柱体の体積に於ても同理にして圓柱体の体積との差は遂次に減少せり故に直圓柱体の傍面積及ひ其体積は内容柱体の底の邊數無窮に倍せし者の傍面積及ひ体積の歸向せる限と考ふる事を得而して圓柱体は其内容柱体の底の邊數及ひ其長短に關せす此柱体の為めに証明せし凡ての性質を有てる者と注意すへし



第二設論

直圓柱体の傍面積は其高さと底の圓周の相乘に等し

ABC'D' の直圓柱体内に於て或る正柱体設使れ ABCDA'B'C'D' の正四角柱体を容き然る後八角十六角等の正柱体を容る、時此柱体の傍面積は次第に増大し(第一設論の注意)而してこに外切せる ABC'D' の圓柱体の傍面積を以て其限と為す然るに此各体の面積は其面數及ひ其大小如何に關せす底の周邊と高さの相乘に等し故に ABC'D' の圓柱体の傍面積は亦 AA' 其高さと ABC の底の圓周の相乘に等し



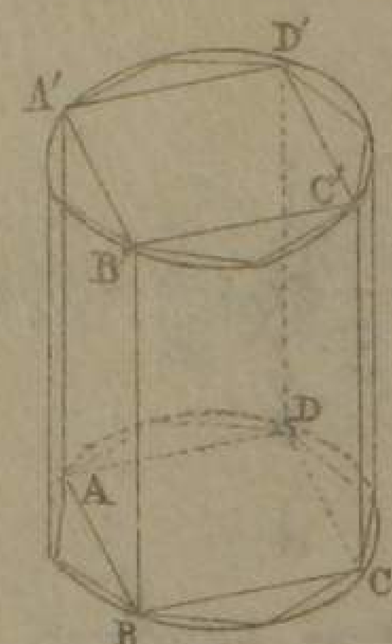
注意　Hを此圓柱体の高さとしRを其底の半径とすれは其傍面積は $2\pi R\times H$ に等し

此圓柱体の全面積を得んとするには $2\pi R\times H$ に二底の面積（平面幾何第三十四教第二設論）$2\pi R^2$ を加ふへし而して $2\pi R(H+R)$ を得るなり

第三設論

直圓柱体の体積は其底と高さの相乘に等し

$ABC'D'$ の直圓柱体内に於て或る正柱体設使は $ABCDA'B'C'D'$ の正四角



柱体を容れ然る后八角十六角等の正柱体を容るときはこの各体の体積は次第に増大し（第一設論の注意）之に外切せる圓柱体の体積を以て其限となす然るにこの各体積は其傍面の大小及ひ其數如何に関せす其底と高さの相乘に等し故にこの圓柱体の体積は亦其底と高さの相乘に等し

注意　Rをこの圓柱体の底の半径としHを其高さとすれは其体積は $\pi R^2\times H$ に等し

推論

直圓錐体は（第十四教第五設論）之と等高同底の直圓柱体の

三分の一なり

第二推論

直圓錐体の平截段は此体の高さを公高とし此体の二底の半径の半和及ひ半差を各底の半径とせる圓柱及ひ圓錐体の和と等積なり

R及ひrをこの截段の二底の半径としHを其高さとすれは其体積は(第十四教第六設論の推論)注意 $\frac{1}{3}\pi H(R^2+Rr+r^2)$ に等し然るに

$$R^2+Rr+r^2=3\left(\frac{R+r}{2}\right)^2+\left(\frac{R-r}{2}\right)^2$$

の恒式に依り且つ体積をVとすれは

$$V=\pi\left(\frac{R+r}{2}\right)^2\times H+\frac{1}{3}\pi\left(\frac{R-r}{2}\right)^2\times H$$

となる故に此体積Vは此截段の高さHを公高となし $\frac{R+r}{2}$ 及ひ $\frac{R-r}{2}$ を各底の半径とせる直圓柱体及ひ直圓錐体の和に等し

R及ひrの半径の差極小にして圓錐体の $\frac{1}{3}\pi\left(\frac{R-r}{2}\right)^2\times H$ の体積

圓柱体の $\pi\left(\frac{R+r}{2}\right)^2\times H$ の体積に比較して着意せさるへき時は
此截段の体積を

$$V=\pi\left(\frac{R+r}{2}\right)^2\times H$$

の容率式に依て算する事を佳とす
方形ならさる材木の截段の求積に於て此式を活用し得へし蓋し此截段を之と等高にして且つ其長さの中央に於て此截段の二底と平行に作りたる截面を底とせる直圓柱体と等積なりと考へ得れはなり

前同式を以て桶の容積を量るに用ゐへし此時はHを桶の深さとしRを其中腹の半径としrを其底の半径とするなり但し此の如く算せし容積は過小なりとて
因て又

$$V=\pi\left\{R-\frac{3(R-r)}{8}\right\}^2\times H$$

の式を以て算するなり是ぞ佛國の算學士「デー」氏の定むる者なり

第四設論

第一　直圓柱体の底平圓ならさる者の傍面積は其底の周

圓と高さの相乘に等し

第二　此圓柱体の体積は其底と高さの相乘に等し

此設論の証法は第二第三設論の証法と等し惟此圓柱体の内に容るゝ柱体の底は正多角形に非らさるを異なりとス

問題

一　二個の直圓柱体相似体なる時は其傍面積は底の半径の二方と比例を為し其体積は其半径の三方と比例を為す

二　流形を量るに用ゆる里杜児は直圓柱体の形状にして其高さは底の中径の二倍なり此三長度を密理米突に於て算する事を求む

三　乾物を量るに用ゆる所の里杜児埵加里杜児尼屈多里杜児各々直圓柱体の形状にして其高さは底の中径に等し此各の三長度を密理米突に於て算する事を求む

四　直圓錐体内に於て直圓柱体を容れ其傍面積は設くる所の圓形に等しからしむる事を求む

此傍面積の増極を求む

五　直圓錐体の高さ$7^{m},20$に等しく其底の半径$1^{m},80$に等しき者あり此底より一珊知米突の距離に於て底と平行せる平面にて此圓錐体を截る此截段の体積を埵止米突立方に於て算する事を求む

六　桶の容積を量る為めに「ヲートレッド」氏及ひ「デー」氏に依て定められたる二式は何れか最も大なる容積を與ふるや

七　圓柱状の玻離管の内半径を算する事を求む但し此管若し空なる時は其重量九十瓦蘭諾にして又長さ九珊知米突の水銀柱を容るゝ時は百五十瓦蘭諾なる事を知るなり（水銀の重率は13,598に等し）

八　直圓柱体の底と平行せる平面を作りて其傍面積を二分し其底の面積をして此二分の中率ならしむる事を求む

九　直圓柱体の高さは底の半径の半に等しく其全面積は設くる所の圓形と等積なる者あり此三長度を求む

十　直圓柱体の全面積は長さ二米突の半径の圓形に等しく其高さは一米突なるあり此体積を珊知米突立方に於て算する事を求む

十一　井水を汲出するに汲水管を用ゐ此管の内中径をd活塞の行路をh井の中径をD水の深さをHとす此井水を汲盡するに要すへき活塞の歴數を求む

其式に於てdを0,m12 hを0,m35 Dを1,m05 Hを2,m88とする時は其數幾何

十二　設くる所の直線を二分に分ち其一分を高さとなし

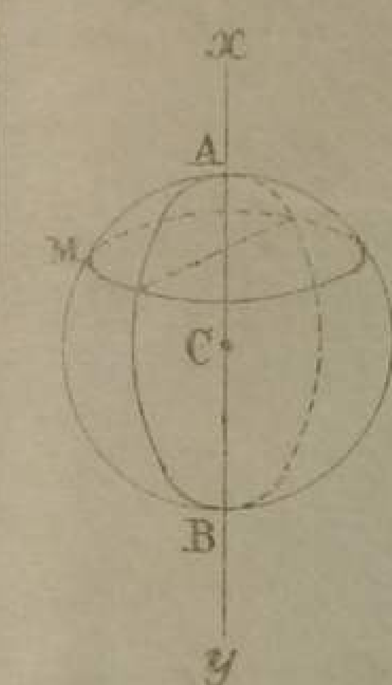
他の一分を底の半径となして直圓柱体を作り其傍面積をして設くる所の圓形に等しからしむる事を求む

此問に答ふる所の二個の圓柱体の内最大なる者は何れなるや

第十七第十八教

定說

AMBの半圓形ABの中径を軸として旋轉し以て生する所の体を球体と名く



故に球体は一個の旋轉面に依て終る所の体なり但し此旋轉面は其各点AMBの母線の中心Cより等距なる者なり此C點を亦球体の中心と名く

球体の中心より其面上の某一點に作れる直線を半径と名く而して半径は皆相等し

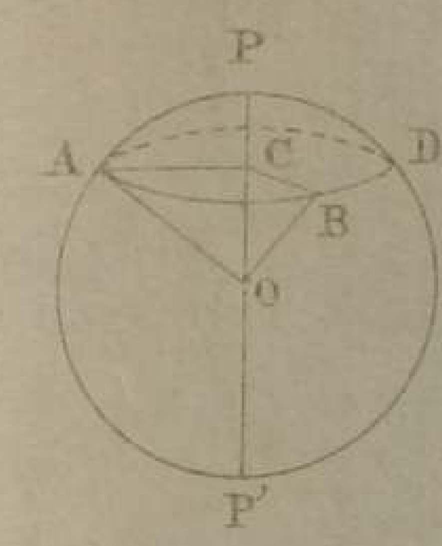
球体の中心を過ぎ其面との交點にて終る所の直線を中径と名く而して中径は皆相等し其故は皆半径の二倍なれはなり

平面球体と惟一個の公點を有つときは此平面は此球体に切すと謂ふ此點を其切點と名く

二個の球体一點に於て同し切平面を有つときは此二球体は此點に於て相切すと謂ふ

二個の平行平面一球体を截る時は此球面の此二平面内に在る分を平頭球分面と名く此面は此二平行平面の距離と

高さとし二截面を以て二底とす
此平頭球分面を定むる所の二個の平行平面中の一個此球体に切するときは此球分面は惟一個の底を有つものときはこれを圓頭球分面と名く



第一設論

球体に於て平面を以て作きる凡ての截面は圓形なり

此平面OAの球体の中心を過ぐる時は此平面はO點より等距なる各點に於て其面に交はる故に此截面は圓形にして此球体と同じ中心及び等しき半径を有つ

又此平面Oの中心を過きずしてABDの曲線に循て此球面を截るときは此O點よりして此曲線の面上に垂線OCを下すなり然る時は此截面の周圍上AB等の點に於て作きる此球体の半径OA OB等はABDの平面に斜交し而して互に相等し故に(第一款第六設論)垂線OCより等距なり而してABDの曲線はC点より等距なる各点を有てる者にして即ち圓周なり但し其半径CAは此球体の半径OAより小なり

注意 球体と同じ中心及び等しき半径を有つ所の各圓形を大圓形と名く而して大圓形は皆相等し又二個の大圓形ハ球体の中径に循て交はる其故は其中心を過くれはなり

球体の中心を過ぎざる凡ての圓形を小圓形と名く其故は其半径球体の半径より小なるなり

CAの小圓形のCの中心及び此球体のOの中心は此圓形の

平面ニ直立せる直線中ニ在り

ABDの圓形ニ直立せる球径の二端P及ひP'なるを此圓形の極と名く蓋しPP'の中径なる此球を成せる所の旋轉面の軸と考へ得るを以てなり而して二個の平行圓形は（第三数第八設論）同し極を有つ

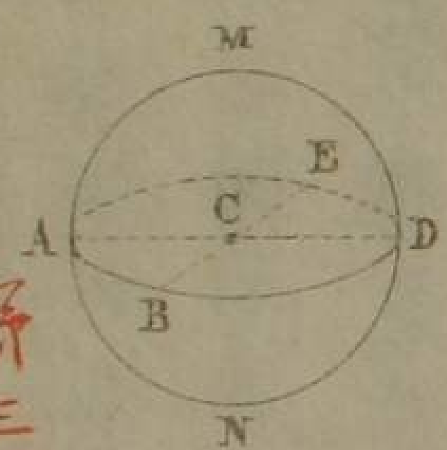
第一推論

大圓周は球面の二點を過きて作る事を得

蓋し球体の中心及ひ設くる所の二點に依て平面を作るときは此平面は大圓周に循て此球面を截ちなり」球体の中心及ひ球面の二點一直線上に在らさる時は此各點は（第一数第一設論）惟一個の平面のみを定む此ときは設くる所の二點を過きて惟一個の大圓周のみを作り得るなり之に反する時は此二点は同し中径上に在り而して無數の大圓形を作る事を得

第二推論

凡そ大圓形ABDはCAの球体及ひ其面を二個に等分す



ABDEM ABDENの球分面を同し平面上に置き然る後CAの圓形に等しき其二底を合するときは此の球分面も亦相合す其故は其凡ての点は球体及ひ其底に於けるは共の中心Cより等距なれはなり

第三推論

二個の大圓形は互に二個に等分す

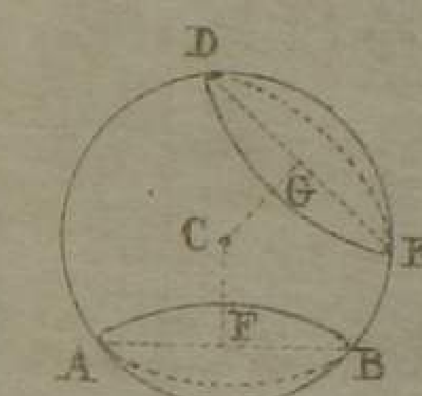
此二圓形の交線は球体の中心即ち此二圓形の各の中

心を過くきをなり

第二設論

第一　二個の等しき小圓形を球体の中心より等距なり

第二　二個の不等圓形に於ては其大なる者を此球体の中心に最も接近す



CA の球体の中心 C 及び FA GD の二個の小圓形の中心 F G に依て作きる平面を ABED の大圓形に循て此球体を截り而して AB DE の小圓形の中徑即ち大圓形の通弦に循て此二個の小圓形を截る故に若し AB の中徑 DE の中徑に等しき時即ち此二個の小圓形相等しき時は(平面幾何第十三教第一設論) CF CG の距離を相等し又若し DE の中徑 AB の中徑より大なる時即ち FA GD の圓形 FA の圓形より大なる時は(平面幾何第十三教第一設論) CG の距離は CF より小なり

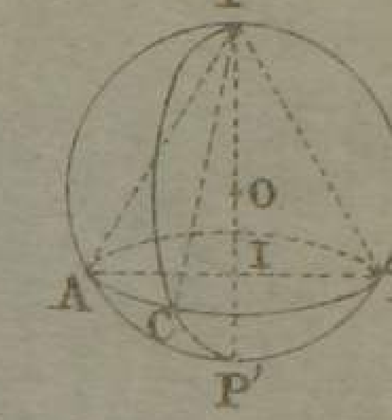
注意　此設論二條の反言を明了なり

第三設論

球体に於て ABC の某圓周の凡ての點を此圓形の P 及び P′ の両極より等距なり

P の極より ABC の平面上に下せる垂線の底 I を IA の圓周の中心なる故(第一設論)此極より此圓周の A B C 等の種々の点に作れる各直線を相等し其故を第一教第六設論)垂線 PI より等距なれはなり故に ABC の圓周の各点を P の極より等距なり又同法を以て他の極 P′ より

も等距なる事を證明し得るなり



Pの極よりABCの圓周に至るPA PB PC等の大圓周の弧の相等しき事も亦此証法よりして生ずるなり蓋し其通弦相等しければなり

注意　球体の某圓形の極に關する此性質は此圓形の中心に關する此性質に等し故に曲兩脚規を用ひ球面上に於て平面上に於けるか如く圓弧を作る事を得へし其法規の二点の距離をして極より今作らんとする圓周までの距離に等しからしめ然る後規の二点中の一個を設くる所の極に置き他の点を以て圓周を作くるなり

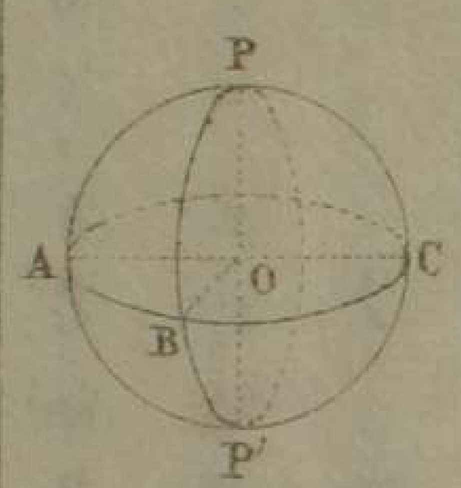
球体の圓形の極より此圓周迄の距離を極距と名く而して小圓形の兩極に於てなり以下常に此圓形と同し半球上に在る者のみを注意す

第一推論

球体の中心及ひ此球面上に作きる某圓形の中心及ひ其極は此圓形の平面に直立せる同し直線中に在り

此設論は平面幾何第十二教第一段節の第一推論に於て論せし者に等しき六個の他の設論に分解せる事を得

第二推論



大圓形の極距は一象限の通弦に等し

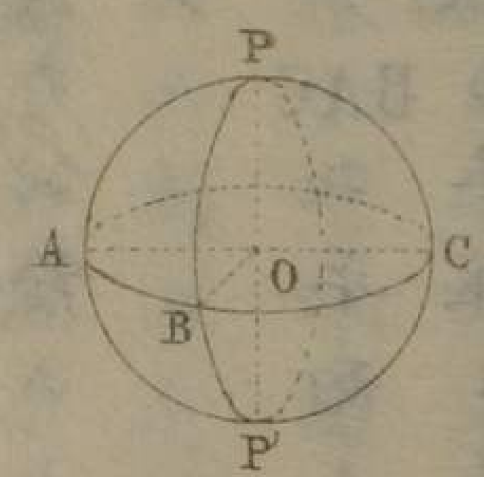
PをOAの球体のABCの大圓形の兩極中の一個にしてPAP'の大圓周の中心に於て其角頂を有てるPOAの直角を此圓周の

四分一ニ等しきPAの弧を截断す然るニ此弧の通弦ハABC
の大圓形の極距なり因て證とに

第三推論

OAの球体のABCの大圓形の極を求むる事を得但し其法二あ
り第一ABCの圓周上ニ於てABの某二點を設け此二點を極
の如くニしPを交點とせる二個の大圓弧を画かく事ニ於
てす第二ABCの圓形ニ直立せるAPCの大圓形を作り而してA
點より起りAPCの圓周の四分の一ニ等しきAPの弧を作る事
ニ於てす

第一POA POBの角ハ製圖ニ依て直角なる故POの直線ハOA
OBの二個の半径ニ直立し因て又（第一数第三設論）OABの
平面ニ直立せ故ニP點ハABCの圓形の極なり



第二APC ABCの二個の平面ハ設想ニ依り相
直立す然るニ此平面中第一の者の上ニ
在るOPの直線ハ（第六数第二設論）ACの交
線ニ直立せ故ニ第二の者ニ直立せ而し
てP點ハABCの圓形の極なり

第四推論

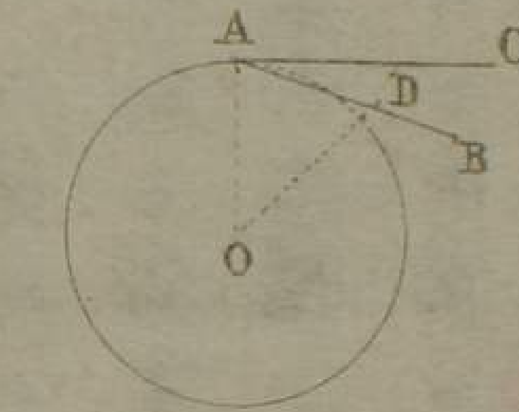
二個の大圓形ニ於て此圓形の極他の圓周上ニ在るときハ
此二圓形ハ相直立す
（第六数第一設論）第二の者ハ第一の者ニ直立して此球
体の中径を過くるものなり

第四設論

球体の半径の端界ニ直立せる平面ハ此球体の切平面なり

反言

第一　球体の切平面ハ切點の半徑ニ直立ス



第一　Oの球体のOAの半徑の端界Aを過きて此半徑ニ直立せるBACの平面を作る時ハ此平面ハ此球体の切平面なり

Oの中心よりBACの平面上A點の外なるDの如き某點迄のCDの距離ハ(第一教第六設論)此平面ニ直立せるOAの半徑より大なり故ニD點ハ此球体の外方ニ在り因てBACの平面ハ此球面と惟Aの公點のみを有ち即ち此平面ハ此球体の切平面なり

反言　BACの平面A點ニ於てOAの球体ニ切そるときハ此平面ハOAの半徑ニ直立す

BACの平面上A点の外なるDの如き凡ての点を設想ニ依り此球面の外方なり故OAの半径ハOの中心よりBACの平面ニ迄作り得へき最短線なり故ニ(第一教第六教論)此半径ハ此平面ニ直立す

第一推論

球面の一點より此面の切平面を惟一個の外作る能ハす

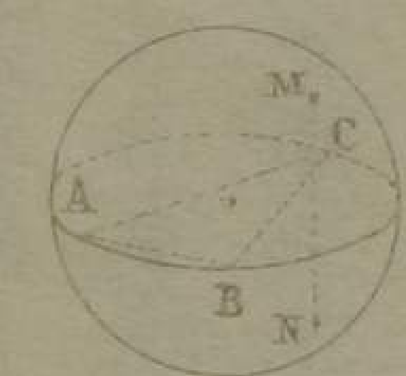
第二推論

二個の相切球体の切点ハ其中心を聯接せる直線上ニ在り切点を過きて作れる切平面との垂線ハ各中心を過くものなり

第一問題

球体の半徑を求む

設くる所の球面上に於てM及びNの某二点を設けM点より之を極とし随意の極距を以て圓弧を作り又等しき極距を以てN点より之を極とし第二の圓弧を作るなり然る時は此圓弧はM及びNより等距なるA点に於て第一の者を截るなり又同様にM及びNより等



距なる他の二点BCを決定するなり然る時は此球体の中心及びABCの各点は(第一教第八七設論)MNの直線の中央に直立せる同し平面上に在り其故は此各点は此直線の二端M及びNより等距なれはなり故に此平面にて作れる截面は大圓形なり

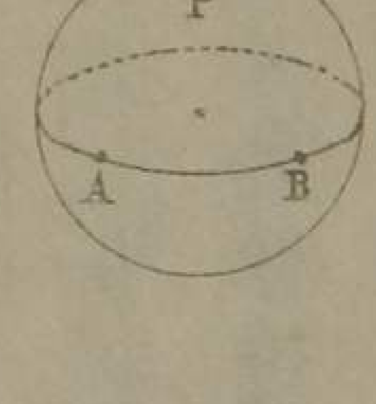
是に於て両脚規を以てAB BC ACの通弦の長さを取り此

三直線を以て三角形を作るなり然る時は此三角形に外切せる圓形の半径は即ち此球体の半径なり

第二問題

球面上のA及びBの二點を過ぎ大圓周を作る事を求む

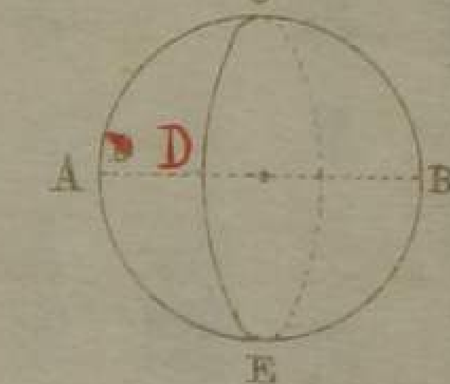
A及びBの二點より之を極とし二個の大圓弧を作りP點に於て相交さらしむ此P點は(第三設論の第三推論)即ちA及びBの二點を過ぐる大圓形の両極中の一個なり故にP點より之を極としABの大圓周を作るなり



推論

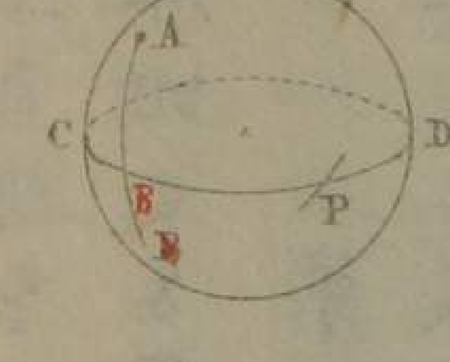
A及びBの二點球体の中径の二端なる時は此問題は無窮の答解を有つ其故はA及びBの二點より之を極として作

れる大圓弧は相合し而して此弧を以て其一分とせるCDEの大圓周の凡ての點はA及びBの二點を過ぐる大圓形の極なればなり



第三問題

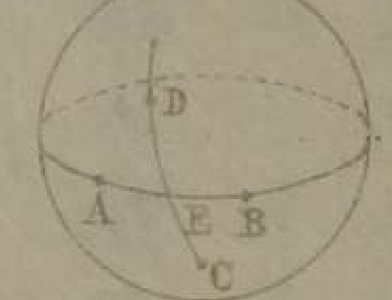
球面のA點を過ぎてCBDの設くる所の大圓周に直立せる大圓周の弧を作る事を求む



A點より之を極として大圓周を作りCBDの圓周に交はらしめ其交點Pより之を極としてABの大圓周の弧を作るなり然る時は此弧は(第~~四~~三設論の第四推論)CBDの設くる所の圓周に直立に其故はPの極は此圓周上に在ればなり

第四問題

大圓周の弧を二個に等分する事を求む



球面上に於て設くる所の弧~~C及びDを決定を但し此二点をABなる二点~~の二端より等距なるC及びDの二点を決定し而して(第二問題)大圓周の弧を以て此二点を聯接するなり然る時は此弧の平面は(第一教第~~八~~七設論)ABの通弦の中央に於て直立す故に此平面は此弧を二個に等分す

推論

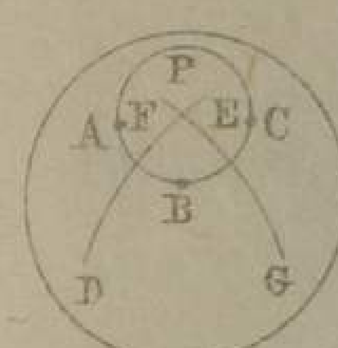
CDの弧は又A及びBの二点を過ぎて作り得べき各小圓周の圓弧を二等分す其故は此各弧は皆ABの同一通弦を有て

たなり

注意　此法を（第四設論）三の第四推論又A及びBの二点を聯接せる某圓弧の中央に直立せるDCの大圓周の弧を作る事に用ゆへし

第五問題

球面上ABCの三点に依て決定せる小圓周を作る事を求む



AB BCの弧の中央に於て共に直立せるDE FGの大圓周の弧を作るときは（第四問題の注意）此弧はABCの三点より等距なるP点に於て交截す是に於てP点より之を極としPAの極距を以て設くる所の三点を過ぐる圓周を作るなり

推論

此法を設くる所の小圓形の極を求むる事に用ゆへし

二個の球体の相關係せる位置に於ける注意

二球体は二圓形の如く彼此相關係して五種の位置あり而して左の五個の設論を此五種に應ずるなり

第一　二球体一個の公點をも有さずして其一個を他の者の外方に在るときは各中心の距離は各半径の和より大なり

第二　二球体外方に於て相切するときは各中心の距離は各半径の和に等し

第三　二球体相交はる時は第一各中心の距離は各半径の

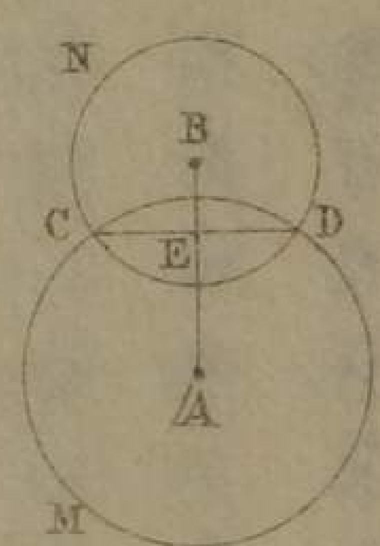
和より小にして其差より大なり第二各面の交線は各中心を聯接せる直線に直立せる平面上に在る圓周なり

第四　二球体内方に於て相切せる時は各中心の距離は各半径の差に等し

第五　二球体一個の公点をも有たすして其一個は他の者の内方に在る時は各中心の距離は各半径の差より小なり

此設論の証法は（平面幾何第十四教）之に應する圓形の設論に於て論せし者に等し而して若し此二球体を同し平面上に置きたる二圓形其中心を過くる直線を軸として旋轉し以て生する者と考ふれは直に明かなり

第三設論の第二の場合を証明するには相交截せる二個の球体を設けＡＢの各中心及ひ其交點中の一個Ｃとに依て平面を作るなり然る時は此平面はＣ點に於て交截せるＡＭ ＢＮの二個の大圓周を決定せり是に於てＡＢの直線上に於て之を軸としＡＢＣの平面を旋轉せる時はＡＭ ＢＮの各圓周は之に應する球体の表面を生し而してＣ點は此二個の旋轉面に公共なる平行線を作れり之に因てＡＭ ＢＮの球体は此平行線に循て相交するなり



以上五個の設論の反言は明かなり

問題

一　設くる所の直線を過き或は點を過くる各平面にて球体中に作れる截面の中心の幾何地を求む

二 三直三面体角の角頂設くる所の位置ニ在るときは其三面球体を截りて成せ所の各圓形の面積の和を常數なり

此三面体角の角頂より其三稜と球面との六個の交點までの距離の二方の和を亦常數なり

三 二個の定點までの各距離の比常數なる所の空間の各點の幾何地を求む

四 不等強の二光より同様ニ照らるゝ所の空間の各點の幾何地を求む

五 球体外の一點より此球体ニ作れる各切線を相等し因て此切線の幾何地を旋轉せる圓錐面なり又其切點の幾何地を此球心を設くる所の點ニ聯接せる直線ニ直立せる平面上ニ在る圓周なり

六 設くる所の三球体を等角ニ於て見るへき所の點を求む

七 設くる所の二球体を大圓ニ循て截る所の各球体の中心の幾何地を求む

八 設くる所の三球体を大圓ニ循て截る所の各球体の中心の幾何地を求む

九 設くる所の直線を過きて球体ニ切平面を作る事を求む

十 二個の球体ニ外方ニ於て切する所の各平面を各球心を過て作る直線と同し一点ニ於て交會す

二個の球体ニ内方ニ於て切する所の各平面ニ於て

も同様なり

十一　設くる所の一点を過きて二個の球体に切平面を作る事を求む

十二　三個の球体に切平面を作る事を求む

十三　一個の直線を過きて二個の球体を截る所の平面を造り其各截面の半径をして球体の半径と比例せしむる事を求む

十四　一点を過きて三個の球体を截る所の平面を作り其各截面の半径をして球体の半径と比例せしむる事を求む

第十九款

定説

平面上の凸折線の各邊各角相等しき者を正折線と名く

凡そ正折線ハ正多角形の周邊の如く圓形に内容し又ハ外切する事を得惟其中心角ハ（平面幾何第二十七款第一設論）通常四直角の整分ならさるを異なりとす

正折線ハ中心半径中心距を有つ是きハ即ち其内容外切圓形の中心及ひ半径なり又其中心を過くる凡ての直線を中径と名く

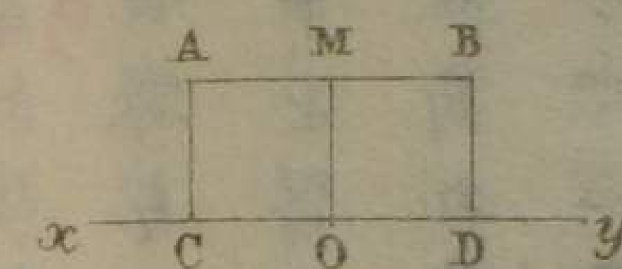
圓弧内に正折線を容るゝにハ（平面幾何第二十七款第二設論）直に此弧を若干数に等分し此相連弧の通弦を作るハ可なり

正折線及ひ此線の二端の半径との間に在る分を正多角分形と名く

第一設論

xyの無界直線上に於て之を軸とし此軸と同し平面上に在りて且つ其同一邊に在る所のABの有界直線を旋轉するときは此線にて生する旋轉面はABの母線と此母線の中央Mにて作せる圓周との相乘を以て測度となす

ABの直線はxyの軸に關係して三種の位置を爲す事を得

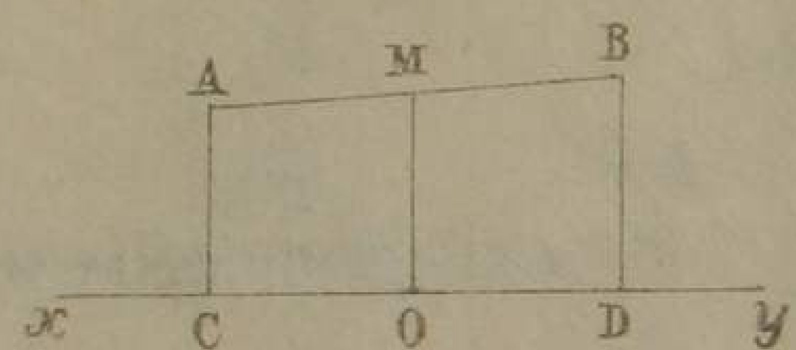


第一　ABを以てxyと平行なりと定む而してABMの各点より其軸上にAC BD MOの垂線を下す時はABCDの矩形はxyを軸として旋轉し以て直圓柱体を生す而してABの直線は其傍面を爲す故に（第十六教第二設論）

$$surf.AB = AB \times cir.OM$$

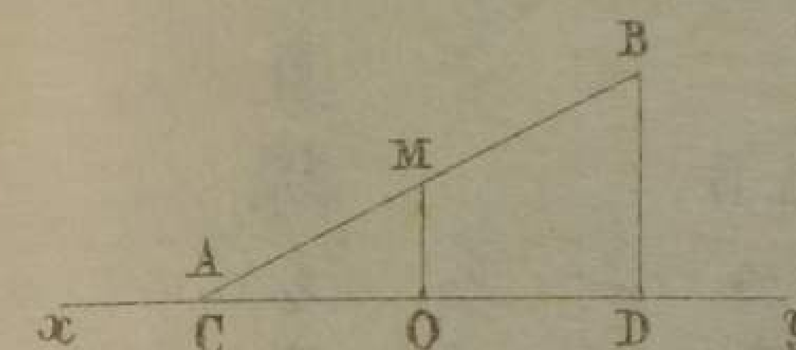
を得

第二　ABの直線を軸と平行せす且つ軸と公點を有たさるものとは而して亦xy上に於てAC BD MOの垂線を下はときはABCDの二邊平行方形はxyを軸として旋轉し直圓錐体の平截段を生は而してABの直線は其傍面を成す故に亦（第十四教第四設



論の推論 $surf.AB=AB\times cir.OM$ を得

第三 ABの二端中の一個設使はAの一端xyの軸上に在るものとは此時はBDの垂線はABDの直三角形を成し此三角形はxyを軸として旋轉し以て直圓錐体を生ず而してABの直線は其傍面を成す故に亦第十四教第三設論の推論 $surf.AB=AB\times cir.OM$ を得

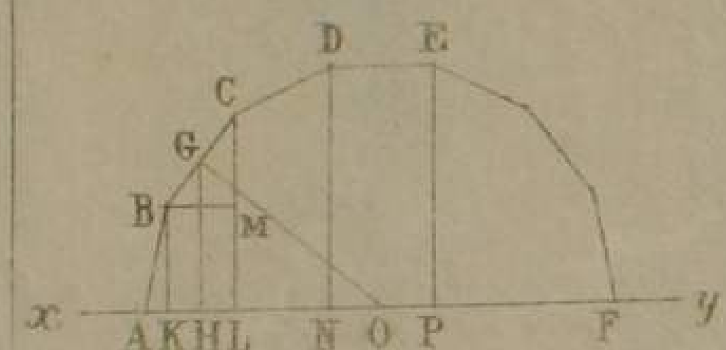


第二設論

BCDEの正折線此線を截らざるxyの軸を繞りて旋轉し以て生ずる所の表面は此折線内に容る、圓周と軸上に於ける此折線の畫形影KPとの相乘を以て測度となす

OはBCDEの正折線の中心OGは其中心距なり此線xyの中径を軸として旋轉する時はBC CD DEの各邊にて生ずる表面の和に等しき表面を成す

BCの中央Gよりxyの軸に直立せるGHの直線を作るときは前の設論に依り



surf. BC $=$ BC $\times$ cir. HG を得

此測度を変形せる為めに $x\,y$ の軸に直立せる BK CL の直線を作り又此軸と平行せる BM の直線を作る時は BCM GOH の三角形は互に直立せる各邊を有てる故（平面幾何第十一教第五設論）相似形なり因て

$$\frac{BC}{BM}=\frac{OG}{HG}=\frac{cir\,OG}{cir\,HG}$$

を得

故に BC $\times$ cir. HG $=$ BM $\times$ cir. OG を得因て surf. BC $=$ BM $\times$ cir. OG を得又 BM KL は相等しき故 surf. BC $=$ KL $\times$ cir. OG を得

LN 及ひ NP は此軸上に於ける CD DE の邊の画形影なり故に前と同理を以て surf. CD $=$ LN $\times$ cir. OG 及ひ surf. DE $=$ NP $\times$ cir. OG を得

以上三個の相等式の各邊を加へ且つ $surf.BC + surf.CD + surf.DE$ の和は $surf.BCDE$ なる事を注意し以て

$$surf.BCDE = (KL + LN + NP)\, cir.OG$$

即ち

$$surf.BCDE = KP \times cir.OG$$

を得るなり

推論

ABCEの偶邊數の半正多角形AFの中徑上に於て旋轉し以て生ずる所の表面は此多角形内に容るゝ圓周と其外切圓周の中徑との相乘を以て測度とす

軸上に於ける ABCEF の半周邊の畫形影は此多角形に外切せる圓周のAFの中徑なるなり

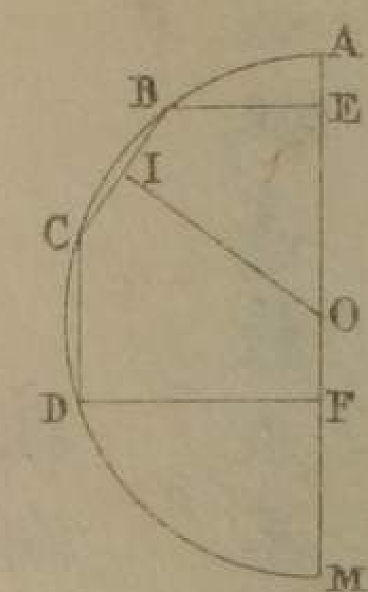
第二推論

前に證明せし $surf.BC = KL \times cir.OG$ の相等式よりして左の設論を生ぜ

BCの直線之と同し平面上に在るxyの軸を繞うて旋轉し以て生ずる所の表面は其軸上に於ける此直線の画形影KLとBCの直線の中央に於て軸に交はるまてに作れる垂線GOを半徑とせる圓周との相乘を以て測度となす

第三設論

平頭球分面は其高さと其大圓周との相乘を以て測度となす



BDの圓弧AMの中徑上に旋轉して生ずる所の平頭球分面に於てEFはBDの弧の二端よりAMの軸上に垂線BE DFを下し以て決定する所の高さなり今BDの弧内にBCDの正折線を容るゝ時はOIは中心距なり此折線AMを軸として旋轉し以て生ずる所の表面は此全分を蔽掩せるBDの平頭球分面より小なる事明らかなり而して若しBDの弧内に容るゝ折線の邊數を無窮に倍する時は此二表面の差は次第に減少す故にBDの球分面はBCDの折線の邊數を無窮に倍せし時此折線にて作れる表面の限なり然るに此邊數如何に関せずBCDの正折線に依て生ずる所の表面は(第二設論)其軸上に於ける其線の畫形影EFとOIの内容圓周との相乘を以て測度となすに因て球分面は亦EFの高さとOAの圓周即ち此球分面を一分とせる球体の大圓周との相乘を以て測度となす

第一推論

Hをこの球分面の高さとしRをこの球体の半徑とすれは

$$zone = 2\pi R \times H$$

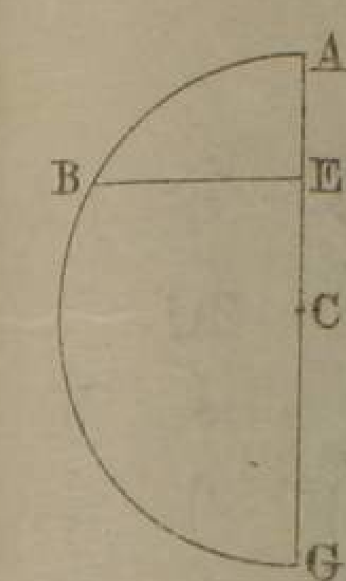
を得

第二推論

同球体或は相等の各球体に於て二個の球分面は其高さと比例をなす

第四設論

球体の面積は其中径と其大圓周との相乘を以て測度となす



ABGの半圓形AGの中径上に旋轉し以て生する所の球体に於てABGの半圓周はAB BGの二弧の和なる故此二弧に依て生する二個の球分面を合すれは球体の表面を成す而して(第三設論)

$$zone\ AB = AE \times cir.\ CA$$

及ひ

$$zone\ BG = EG \times cir.\ CA$$

を得

此相等式の各邊を加ふる時は

$$surf.\ sph.\ CA = (AE + EG) \times cir.\ CA$$

を得因て

$$surf.\ sph.\ CA = AG \times cir.\ CA$$

を得

第一推論

Rを球体の半径としDを其中径としSを其面積とすれば

$$S=2R\times2\pi R=4\pi R^2$$

を得

此Sの値よりして左論を得

球体の面積は(平面幾何第三十四教第二設論)大圓形の面積の四倍に等しく因て又

$$S=D\times\pi D=\pi D^2$$

を得

第二推論

二個の球体の面積は其半径或は中径の二方と比例を為す

問題

一 半圓形内に於て偶邊数の正多角形を容れ又之と相似なる正多角形を外切する時は此半圓形其中径上に旋轉して生ずる所の球体の面積は此二個の多角形に依て生ずる所の面積の中率となる

二 凡そ一底の球分面は此面を生ずる所の弧の通弦を半径とせる圓形と等積なり

三 此設論は二底の球分面に適用すべきや

球体の面積を其大圓周を以て標示する事を求む

地球を球体と定め其面積を平方密理亜米突に於て

値する事を求む

四　球体に直圓錐体を外切し其傍面積を底の二倍ならしむる事を求む

五　球体に圓柱体を内容し其二底の和を傍面積の二倍ならしむる事を求む

六　球体に圓錐体を内容し其傍面積を同圓形に於て終る所の圓頭球分面と等積ならしむる事を求む

七　球体を平面にて截り此平面にて此球体の表面を二分せる二個の球分面の差を其截面と等積ならしむる事を求む

八　球体を平面にて截り大圓形の面積を此平面にて決定せる二個の球分面の中率ならしむる事を求む

九　球体を其中心より等距離の二個の平行平面にて截り二個の截面の面積の和を此二平面間に函める平頭球分面の面積に等しからしむる事を求む

十　球体に圓錐体を内容し其底を傍面積の半と等積ならしむる事を求む

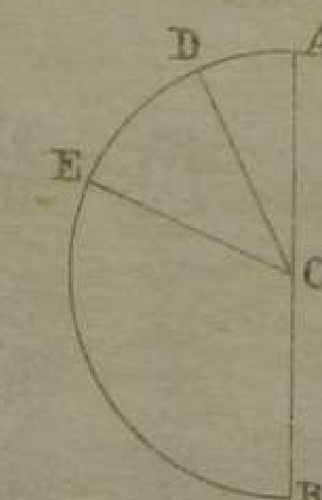
十一　等邊圓錐体球体内に容る、あり此圓錐体の底と平行せる平面にて此二体中に作れる各截面の差は如何なる界限内に於て變化すへきやを決定する事を求む

此球分面の如何なる位置に於て此二截面の差は此球体の大圓の面積の三分の二に等しかるへきや

注意　前諸題は二次方程式の尤も好き復習なり

第二十教

定説



DECの分圓形此外方の中径ABを軸として旋轉し以て生する所の体を分球体と名く

此体は此分圓形のDEの弧にて作れる圓頭球分面を以て其底となす

某多面体の各面球体に切するときは此多面体は其球体に外切すと謂ふ又之を反言して球体は此多面体に内容すと謂ふ

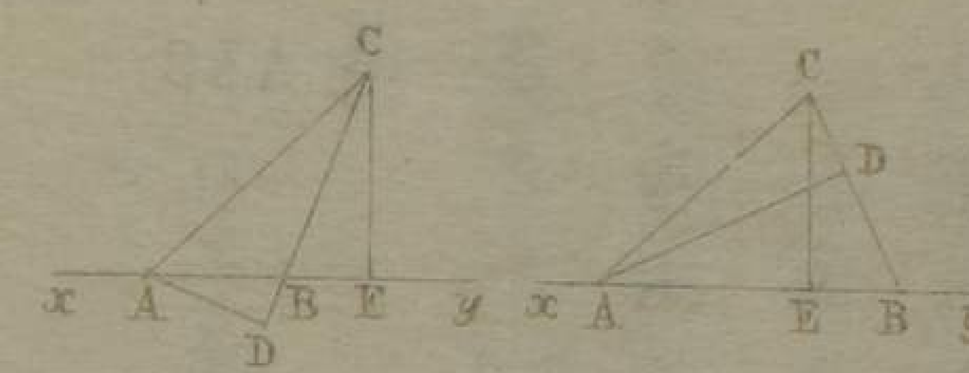
又之に反し某多面体の各角頂球面の各点にある時は此多面体は球体に内容すと謂ふ而して球体は之に外切すと謂ふ

第一設論

ABCの三角形Aの角頂より此面を横截する事なく此三角形の平面上に作れるxyの直線を軸として旋轉し以て生する所の体の体積はAの角頂よりBCの對邊迄の距離に此邊のxyの軸上に旋轉して成る所の面を乘せし者の三分の一に等し

ABCの三角形をxyの軸に關係して三種の位置をなすを得

第一　ABの邊軸上に在る者と定め而してCの對角頂より此邊に直立せるCEの直線を作る時はABCの三角形の旋轉に依て生する体積はCEの垂線ABCの三角形の内方或は外方に在るに従ひACE BCEの直三角形xyの軸上に



旋轉して生ずる所の直圓錐体の和或ゐ差に等しく然るに(第十四教第五設論)

$$\text{cône}\ ACE=\frac{1}{3}\pi CE^2\times AE$$

及び

$$\text{cône}\ BCE=\frac{1}{3}\pi CE^2\times BE$$

を得因て

$$vol.ABC=\frac{1}{3}\pi CE^2\times AB$$

を得

是に於てAの角頂よりBCの對邊上に垂線ADを下し而して前に擧けしふABCの体積の式中AB×CEの相乘を之に等しきBC×ADの相乘に代ゆるなり蓋し此各相乘ゐ平面幾何第三十教第五設論ABCの三角形の面積の二倍を標示せれバなり之に因て

$$vol.ABC=\frac{1}{3}\pi CE\times BC\times AD$$

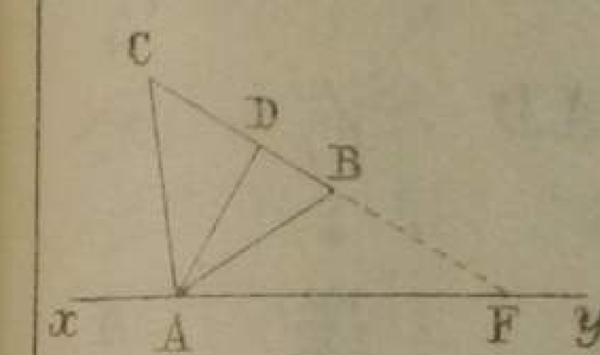
を得

然ルニBCEノ圓錐体ノ傍面積ハ（第十四教第三設論）$\pi CE \times BC$ ナ以テ測度ト為ス故ニ

$$vol.ABC = surf.BC \times \frac{1}{3}AD$$

ヲ得

第二　AB AC ノ二邊軸ト合セサルトキハAノ角頂ニ對セシCBノ辺ヲ軸ト交截シ或ハ之ト平行ヲル事アリ先ツ最初ニCBノ引長線ヲF点ニ於テxyニ交ハル者トス而シテAノ角頂ヨリCB上ニ垂線ADヲ下ス



時ハABCノ三角形ハACF ABFノ三角形ノ差ニ等シ而シテ此三角形xyノ軸上ニ旋轉シテ生スル所ノ体積ハ又ACF ABFノ三角形ニテ生スル体積ノ差ニ等シ然ルニ

$$vol.ACF = surf.CF \times \frac{1}{3}AD$$

及ヒ

$$vol.ABF = surf.BF \times \frac{1}{3}AD$$

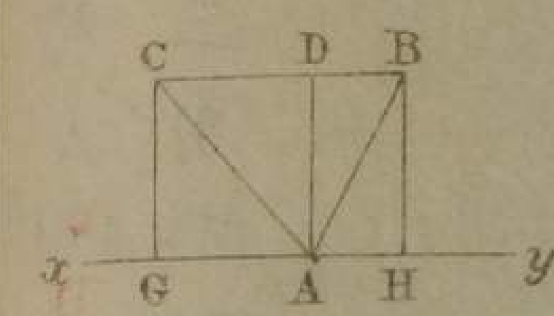
ナル故

$$vol.ABC = surf.BC \times \frac{1}{3}AD$$

ヲ得

第三　前の設論をBCの邊軸として成せる所の角何程小なりとも真實なり因て此設論は亦此角零なる時即ちBCの邊xyと平行せる時に於ても真實なる事を決すへし

今又BCとxyとの直線相平行せる場合に於ける此設論の直解を見出すへし BD C の二端よりxy上に於て垂線BH CGを下し而してABCの三角形xyの上に旋轉して生する所の体積をABD ACDの三角形にて生する体積の和なる事を注意す然るにABHの直三角形にて生する圓錐体は（第十六款第三設論の推論）ADBHの矩形に依て生する圓柱体の三分の一に等し



故にABC D の三角形をxyの軸上に旋轉し以てABDHにて生せる圓柱体の三分の二に等しき体積を生せ又同様にACDの三角形xyの上に旋轉して生せる所の体積をADCGの矩形同し軸上に旋轉して生せる所の圓柱体の三分の二に等しき事を証明せへし之に因てABCの三角形をADCG ADBHの短 矩 形に因て生せる圓柱体の和の三分の二即ちBCGHの矩形に依て生せる圓柱体の三分の二に等しき体積を生せ故に左式を得

$vol.ABC=\frac{\cancel{1}2}{3}\pi AD^2\times BC$

然るに BCGH の圓柱体の傍面積は（第十六款第二設論）$2\pi AD\times BC$ に等し故に

$vol.ABC=surf.BC\times\frac{1}{3}AD$

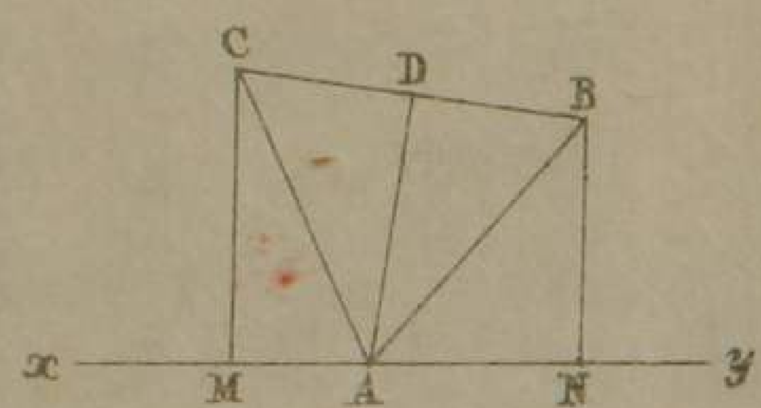
を得るなり

推論

ABCの三角形二等辺にして且つMNの直線 xy の軸上に於けるBC辺の畫形影なる時は（第十九款第二設論の第二推論）

$surf.BC=MN\times cir.AD$

を得



因て又

$vol.ABC=\frac{2}{3}\pi AD^2\times MN$

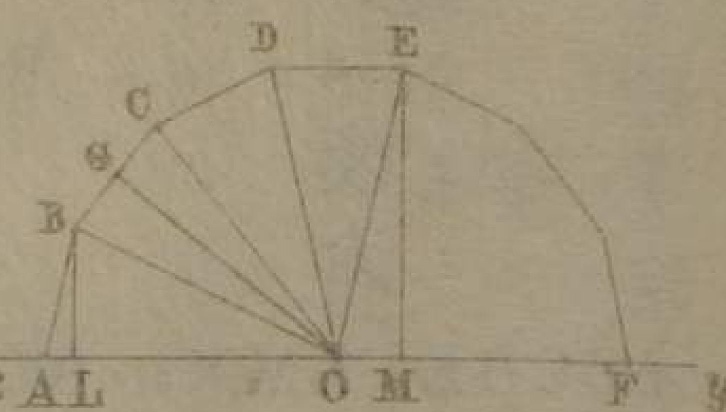
を得故に左論を得

二等辺三角形其軸其平面上ニ在リテ其面ヲ横截セル事ナク其角頂ヲ過クルトキ其軸上ニ旋轉シテ生スル所ノ体積ハ軸上ニ於ケル此三角形ノ底ノ畫形影ト此三角形ノ高サヲ半徑トセル圓形ノ面積トノ相乘ノ三分ノ二ニ等シ

第二設論

OBCDE ノ正多角分形其面ノ外方ナル xy ノ中徑上ニ旋轉シテ生セル所ノ体積ハ此多角分形ノ BCDE ノ周邊ニテ作レル面ト其中心距ノ三分ノ一トノ相乘ニ等シ

O ヲ BCDE ノ正折線ノ中心 OG ヲ其中心距ナリ今 OC OD ノ半徑ヲ作ル時ハ OBCDE ノ正多角分形ヲ二等邊三角形ニ分解セル此分形 xy ノ軸上ニ旋轉シテ生スル所ノ体積ハ OBC OCD ODE ノ二等邊三角形ニ因テ生スル体積ノ和ニ等シ故ニ（第一設論）



$$vol.OBC = surf.BC \times \frac{1}{3}OG$$

$$vol.OCD = surf.CD \times \frac{1}{3}OG$$

$$vol.ODE = surf.DE \times \frac{1}{3}OG$$

ヲ得此相等式ノ各邊ヲ加ヘ

$$vol.OBCDE = (surf.BC + surf.CD + surf.DE) \times \frac{1}{3}OG$$

即ち

$$vol.\,BCDE = surf.\,BCDE \times \frac{1}{3}OG$$

を得るなり

第一推論

LM は BCDE の正折線の xy の軸上に於ける畫形影なり故に(十九

教第二設論 $surf.\,BCDE = LM \times cir.\,OG$ を得因て $vol.\,OBCD = \frac{2}{3}\pi OG^2 \times LM$ を得るなり之に因て OBCDE の正多

角分形其面の外方なる xy の中径上に旋轉して生ずる所の体積は BCDE の正折線の軸上に於ける画形影と此線内に容る、圓形の面積との相乘の三分の二に等し

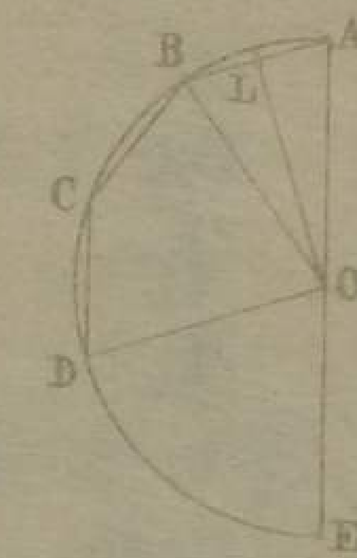
第二推論

ABCDEF の偶邊數の半正多角形其中径 AF の上に旋轉して生ずる所の体積を内容圓形に外切圓形の中径を乘せし者の三分の二に等し

ABCDEF の周邊の軸上に於ける画形影 AF を此多角形に外切せる圓形の中径なるなり

分球体の体積は此体の底をなす~~圓~~頭球分面に此球体の半径の三分の一を乗せし者に等し

第三設論



AOD の分圓形 AE の中径上に旋轉して生ずる分球体に於て AD の弧内に ABCD の正折線を作る時は OABCD の正多角分形 AE の軸上に旋轉して生ずる体の体積は之に外切せる分球体の体積より小にして而して此折線の邊數を無窮に倍する時は次第に之に接近し而して AOD の分球体は其限なり然るに此多角分形にて生ずる体積は(第二設論) ABCD の折線にて作せる面と OL の中心距の三分の一との相乘に等し故に AOD の分球体の体積は亦 AD の弧にて作れる圓頭球分面に此弧の半径の三分の一即ち球体の半径の三分の一を乘せし者に等し

推論

R は球体の半径とし H を分球体の底を為せる球分面の高高さとすれば(第十九款第三設論)

$$\text{zône}\,H = 2\pi R \times H$$

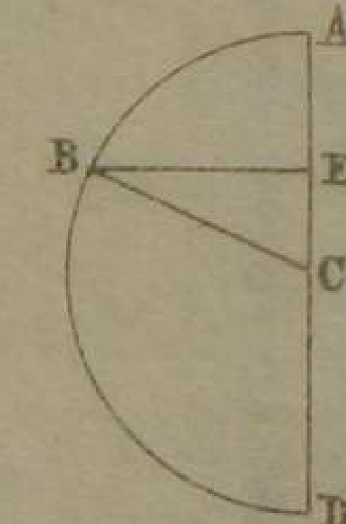
を得因て

$$\text{sect. sph}\,R = \frac{2}{3}\pi R^2 \times H$$

を得故に分球体の体積は又此体の底をなせる球分面の高さに此球体の大圓面積を乘せし者の三分の二に等し

第四設論

球体の体積は其面積に其半径の三分の一を乘せし者に等し



ABDの半圓形ADの中径上に旋轉して生する球体に於てCBの其半径を作り此球体をACB BCDの二個の分圓形に因て生する分球体の和と考ふるときは(第三設論)

$$\text{sect. sph. } ACB = \text{zone } AB \times \frac{1}{3} CA$$

$$\text{sect. sph. } BCD = \text{zone } BD \times \frac{1}{3} CA$$

を得是より

$$\text{sphère } CA = (\text{zone } AB + \text{zone } BD) \frac{1}{3} CA$$

即ち

$$\text{sphère } CA = \text{surf. sph. } CA \times \frac{1}{3} CA$$

を得

第一推論

Rを球体の半径Dを其中径Vを其体積とするときは

$$V = 4\pi R^2 \times \frac{R}{3} = \frac{4}{3} \pi R^3$$

及ひ $V=\pi D^2\times\frac{D}{6}=\frac{1}{6}\pi D^3$ なり

第二推論

二個の球体の体積ハ其半径或ハ中径の三方と比例をなす」

第五設論

球体ニ外切せる凸多面体の体積ハ其面積ニ此球体の半径の三分の一を乘せし者ニ等し

球体の中心と此多面体の各稜とニ依て平面を作るときハ此体を錐体ニ分解す而して此錐体ハ此多面体の各面を底とし球体の中心を公頂となす然るニ此各錐体の体積ハ（第十款第五設論）其底と高さ即ち球体の半径の三分の一との相乘ニ等し故ニ云々

第一推論

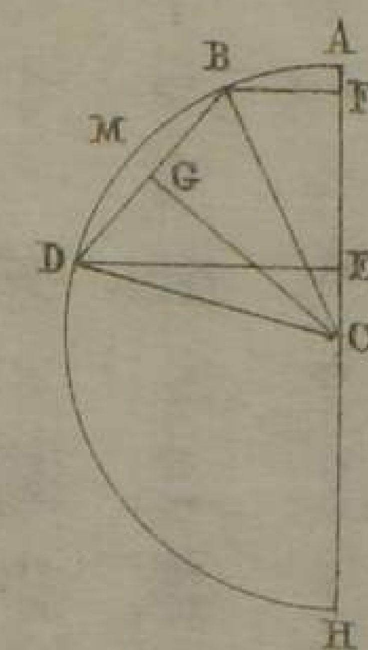
同球体或ハ相等の各球体ニ外切せる凸多面体の体積ハ其面積と比例を為す

第六設論

BMDの圓分其外方なる中径AHの上ニ旋轉して生する所の体積ハ一個の圓錐体の体積の半ニ等し但し此圓錐体ハ此圓分の底BDを其底の半径としAHの軸上ニ於ける其画形影EFを以て其高さとする者なり

BMDの圓分ハCBMDの分圓形とCBDの三角形との差ニ等しき故AHを軸として旋轉し以て生する所の体積ハ此分圓

形及ひ三角形に依て生する所の体積の差に等し然る



に（第三設論）

$$vol.\,CBMD=\frac{2}{3}\pi CD^2\times EF$$

を得而して CG は CBD の二等邊三角形の高さなる故（第一設論の推論）

$$vol.\,CBD=\frac{2}{3}\pi CG^2\times EF$$

を得因て

$$vol.\,BMD=\frac{2}{3}\pi(CD^2-CG^2)\times EF$$

なり

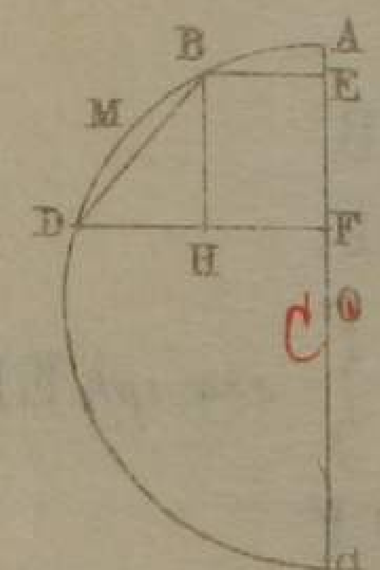
然るに CDG の三角形は直三角形なる故上式よりして

$$CD^2-CG^2=DG^2=\frac{BD^2}{4}$$

を得因て

$$vol.\,BMD=\frac{1}{6}\pi BD^2\times EF$$

を得



BE DF はCAの球体に於てAGの中径に直立せる二平面にて作れる圓截面の半径なり又EFの直線はBE及びDFの二圓形を底とせる球分の高さなり

EFの球分の体積はBMDの圓分とEBDFの二辺平行方形に依て生ずる体積の和に等し故に

$$vol.\,BMD = \frac{1}{6}\pi BD^2 \times EF$$

及び

$$vol.\,EBDF = \frac{1}{3}\pi(BE^2 + DF^2 + BE \times DF) \times EF$$

を得

注意　此圓分半圓形に等しき時は生ずる所の体積は球体の体積に等し而して前式に於てAHをBD EFに代用するときは

$$sphère\,CA = \frac{1}{6}\pi AH^3$$

を得是れ球体の体積の為めに已に求め得たる式にして中径を以て顕はせる者なり

第七設論

球分の体積は此体の高さを中径とせる球体の体積に此体の高さ及び二底を以て其高さ及び各底とせる二個の円柱体の体積の半和を加へたる者に等し

因て

$$seg.sph.EF=\frac{1}{6}\pi(BD^2+2BE^2+2DF^2+2BE\times DF)EF$$

なり

B点よりDF上に於て垂線BHを下し而してBDHの三角形は直三角形なる事を注意し以て

$$BD^2=BH^2+DH^2=EF^2+(DF-BE)^2$$

即ち

$$BD^2=EF^2+DF^2+BE^2-2BE\times DF$$

を得

若しEFの球分の体積の式に於て此BD^2の値を代用すれば

$$seg.sph.EF=\frac{1}{6}\pi(EF^2+3BE^2+3DF^2)EF$$

即ち

$$seg\,sph\,EF = \frac{1}{6}\pi EF^3 + \frac{1}{2}(\pi BE^2 \times EF + \pi DF^2 \times EF)$$

を得

然るニ $\frac{1}{6}\pi EF^3$ の項ハ此球分の高さニ等しき中径の球体の体積ニして又 $\pi BE^2 \times EF$ $\pi DF^2 \times EF$ ハ EF の直線を高さとし BE DF の圓形を底とせる二個の圓柱体の体積なり故ニ云々

推論

此球分の底 BE 零なる時即ち AG の軸ニ直立せる BE の平面此球体の切平面となるときハ ADF の一底球分ハ此球分の高さを中径とせる球体と此球分と同底等高の圓柱体の半との和ニ等し即ち

$$seg\,sph\,ADF = \frac{1}{6}\pi AF^3 + \frac{1}{2}\pi DF^2 \times AF$$

の如し

問題

一　直線を以て三角形の二辺の中央を聯接し然る後第三の辺上に於て此三角形を旋轉する時は其各分にて生ずる所の体積の比は如何

二　球体の体積を其大圓周を以て標示する事を求む

三　地球を球体と定め其体積及ひ其重量を算する事を求む但し其平均重率は$5\frac{1}{2}$なりとせよ

　　球体に外切せる圓柱体の面積を此球体の面積と外切等辺圓錐体の面積との中率なり

　　又此三体の体積に於ても同様なり

四　地球大陰大陽の中径を1 $\frac{3}{11}$ 112の數と比例せしめ地球の体積を一とせる時は大陰大陽の体積は幾何」

五　平行邊形を其平行せさる二邊上に於て逐次に旋轉する時は生する所の体積は其各邊と反比例を為すことを証する事を求む

六　球体を平面にて截り其最小球分面を底とせる分球体を等積に二分する事を求む

七　半圓形内に直三角形を容れ此三角形其斜邊上に旋轉して生ずる所の体積をして此半圓形内に容るゝ球体の体積と設くる所の比をなさしむる事を求む」

　　此比の増極を求む

立体幾何學第二終