三角法舉要卷四

或問三角大意。略具首卷中。而入筭取用。仍有蕪畧。喜同學之好問。事事必求其所以然。故不憚為之詳複以暢厥旨

一三角形用正弦為比例之理

一和較相求之理

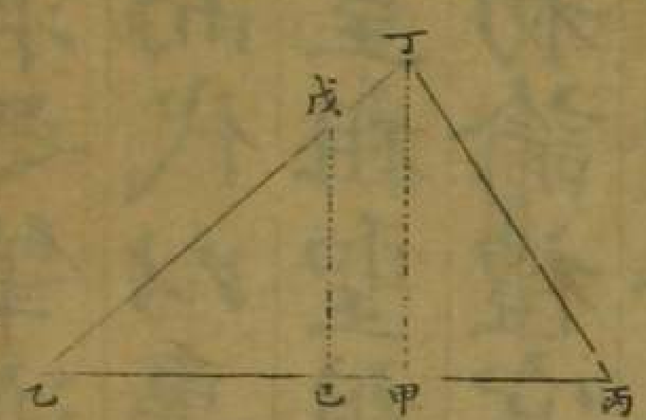
一用切線分外角之理

一三較連乘之理

附三較求角

問各角正弦。與各邊皆不平行。何以能相為比例。曰。凡三角形。一邊必對一角。其角大者正弦大。而所對之邊亦大。角小者正弦小。而所對之邊亦小。故邊與邊之比例。如正弦與正弦也

兩正弦為兩邊比例圖

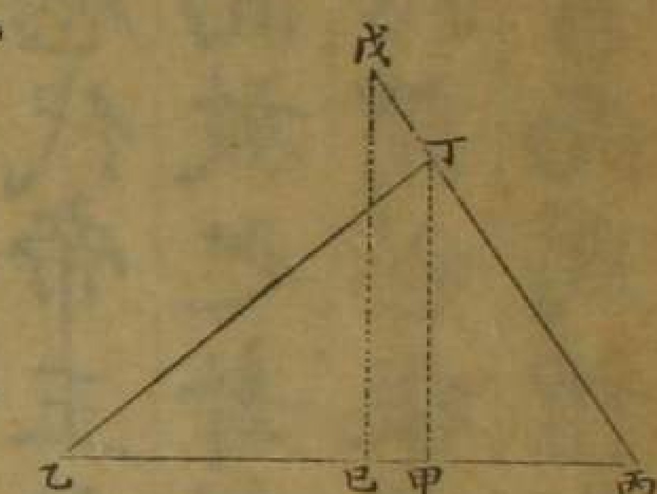


乙丙丁三角形。丁乙邊大。對丙角。丁丙邊小。對乙角。術為以丁乙邊比丁丙邊。若丙角之正弦。與乙角之正弦、

解曰。試以丁丙為半徑。作丁甲綫為丙角正弦。又截戊乙如丁丙半徑。作戊己綫為乙角正弦。丁甲正弦大於戊己。故丁乙邊亦大於丁丙

問丁甲何以獨為丙角正弦也。曰。此以丁丙為半徑故也。若以

丁乙為半徑。則丁甲即為乙角之正弦

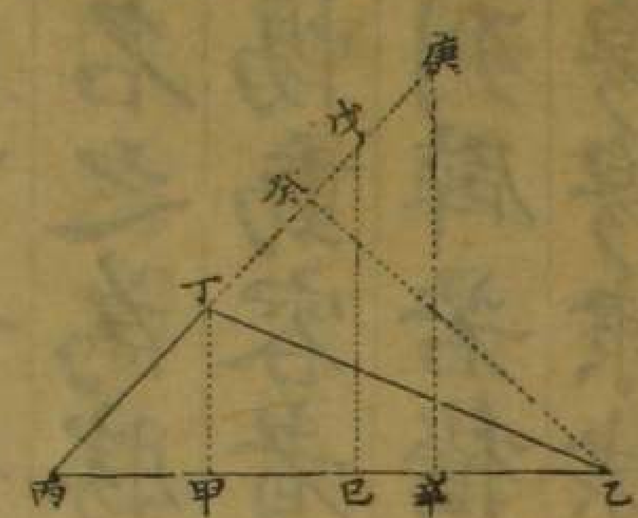


如圖。用丁乙為半徑。作丁甲線為乙角正弦。又引丙丁至戊。令戊丙如丁乙半徑。作戊己線為丙角正弦。即見乙角之正弦丁甲小於戊己。故丁丙邊亦小於丁乙

解曰。正弦者半徑所生也。故必兩半徑齊同。始可以較其大小。前圖截戊乙如丁丙。此圖引丁丙如丁乙。所以同之也

三正弦遞相為三邊比例圖

乙丁丙鈍角形。丁鈍角對乙丙大邊。丙次大角。對乙丁次大邊。乙小角對丁丙小邊。其各邊比例。皆各角正弦之比例



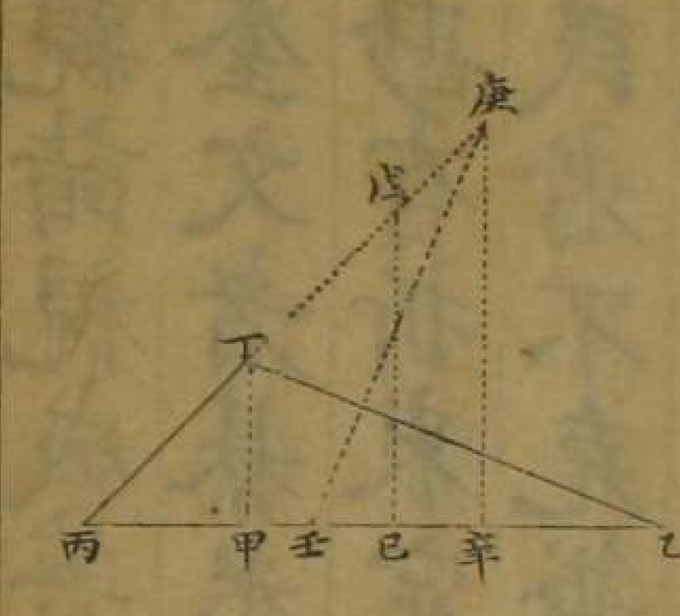
試以乙丁為半徑。作丁甲線。為乙小角之正弦。又引丙丁邊至戊。使戊丙如乙丁。作戊己線。為丙角之正弦。又展戊丙線至庚。使庚丙如乙丙。作庚辛線。為丁鈍角之正弦如此則三邊皆若弦。三正弦皆若股

其比例為以乙丙大邊。同庚丙比乙丁次邊。同戊丙若丁鈍角之正弦庚辛。與丙角之正弦戊己

又以乙丁次大邊。同戊丙比丁丙小邊。若丙角之正弦戊己。與乙角之正弦丁甲

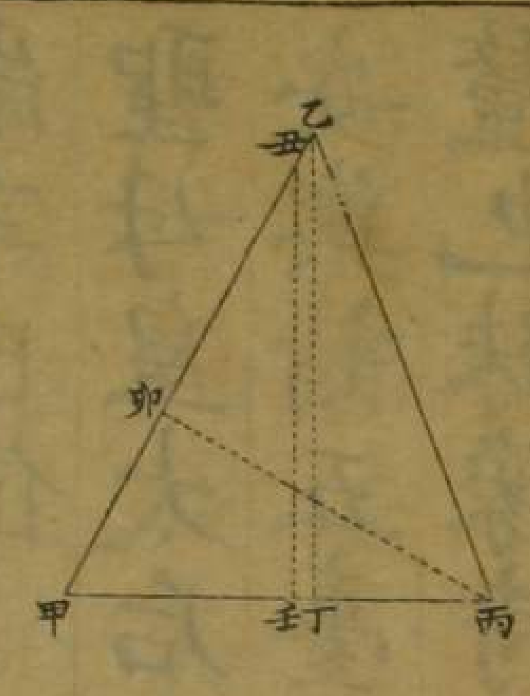
又以丁丙小邊比乙丙大邊。同庚丙若乙小角之正弦丁甲。與丁鈍角之正弦庚辛

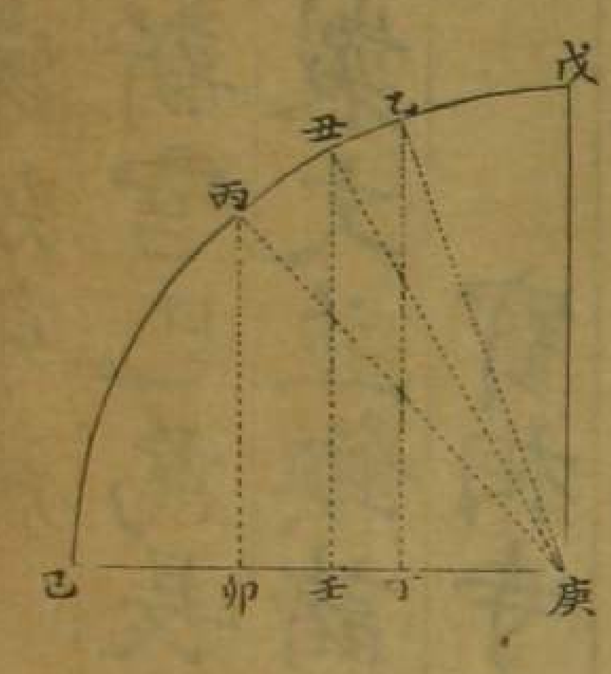
問庚辛何以為丁角正弦。曰。凡鈍角以外角之正弦為正弦。試作乙癸線。為丁角正弦。乙丁癸角。外角也。故其正弦即為丁鈍角正弦必與庚辛等。何也。庚丙辛句股形。與乙丙癸形等庚丙弦既同乙丙。又同用丙角。辛與癸又同為方角。故其形必等則庚辛必等乙癸。而乙癸既丁角正弦矣。等乙癸之庚辛。又安得不為丁角正弦乎凡取正弦。必齊其半徑。此以丁甲為乙角正弦。是用乙丁為半徑也。而取丙角正弦戊己。必引戊丙如乙丁。其丁角正弦庚辛。又即外角之正弦乙癸。是三半徑皆乙丁也



試取壬丙如丁丙。作庚壬線。即同乙丁半徑。則壬角同丁角。壬外角即丁外角。而庚辛正弦之半徑。仍為乙丁庚壬同乙丁故此以庚壬當乙丁。易乙丁丙形為庚壬丙。則庚辛正弦。亦歸本位。與前圖互明

試以各角正弦。同居一象限。較其弧度





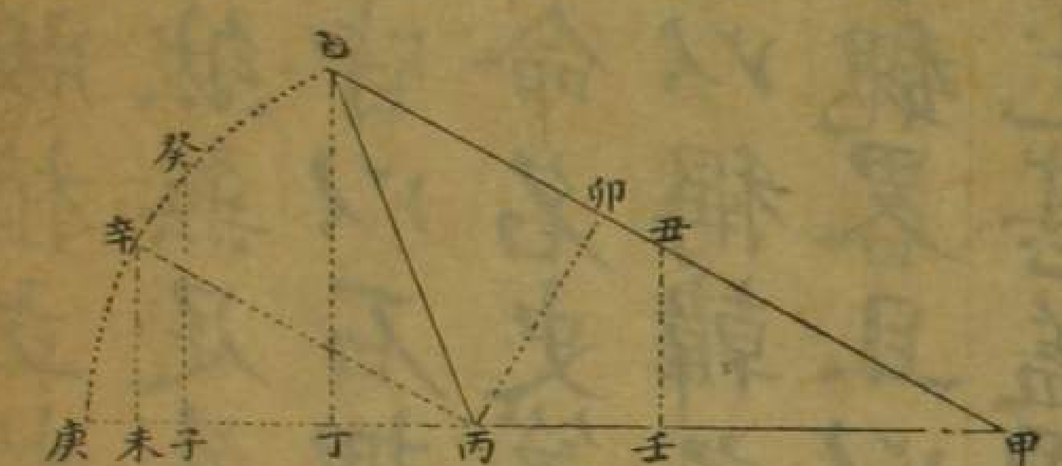
如圖。甲乙丙形。丙角最大。其正弦乙丁亦最大。所對甲乙邊亦最大。甲角次大。其正弦丑壬亦次大。所對乙丙邊亦次大。乙角最小。其正弦丙卯亦小。所對丙甲邊亦最小。丙乙二角正弦。並乙丙為半徑。甲角取正弦。截丑甲如乙丙。亦以乙丙為半徑乃別作一象弧。如戊己仍用乙丙為半徑。取戊庚如乙丙而以先所得各角之餘弦取度。於丁作乙丁為丙角之正弦。於壬作丑壬為甲角之正弦。於卯作丙卯為乙角之正弦。即各如元度。而各角之差數覩矣戊庚半徑既同乙丙。

則丁庚即丁丙。而為丙角餘弦。又壬庚即甲壬。為甲角餘弦。卯庚即卯乙。為乙角餘弦

解曰。角無大小。以弧而知其大小。今乙丁正弦。其弧乙己。是丙角最大也。丑壬正弦。其弧丑己。是甲角次大也。丙卯正弦。其弧丙己。是乙角最小也。而對邊之大小亦如之。故皆以正弦為比例也

或疑鈍角之度益大。其正弦反漸小。而其所對之邊則漸大。何以能相為比例乎。曰。此易知也。凡鈍角正弦。即外角之正弦。而外角度。原兼有餘兩角之度。故鈍角之正弦。必大於餘兩角。而得為大邊之比例也

如乙丙甲鈍角形。丙鈍角最大。其正弦乙丁亦最大。而所對乙甲邊亦最大。乙角次大。其正弦丙卯亦次大。而所對甲丙邊亦次大。甲角最小。其正弦丑壬亦小。而所對乙丙邊亦最小截甲丑如乙丙。從丑作丑壬。即甲角正弦

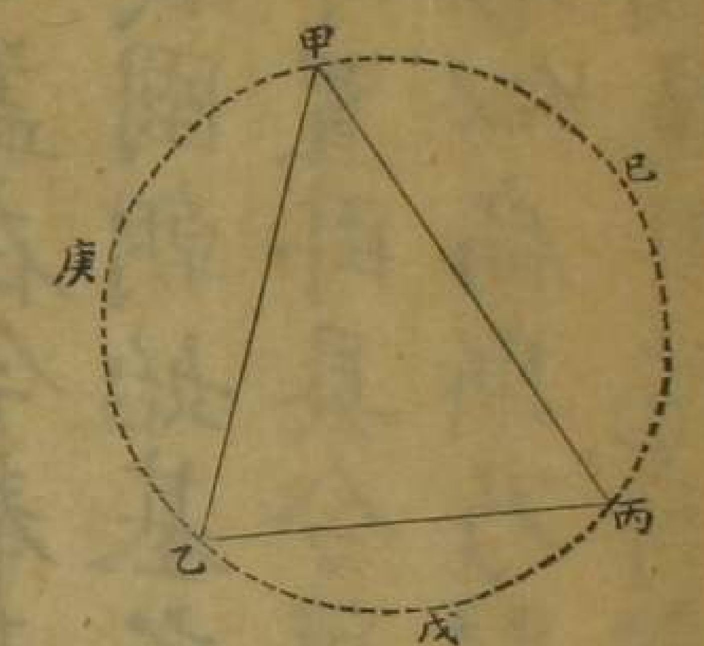


乃從乙作乙庚弧。以丙為心。乙丙為半徑為丙外角之度。又作辛丙半徑。與甲乙平行。分乙庚弧度為兩。則辛庚即甲角之弧度。其餘辛乙亦即乙角之弧度。從辛作辛未正弦。與丑壬等。又自庚截癸庚度如辛乙。則癸庚亦乙角之弧。作癸子正弦與丙卯等。此顯丙外角之度。兼有乙甲兩角之度。其正弦必大於兩角正弦也。雖丙鈍角加大。而外角加小。則乙甲兩角必又小於外角。又何

疑於鈍角正弦。必為大邊比例乎

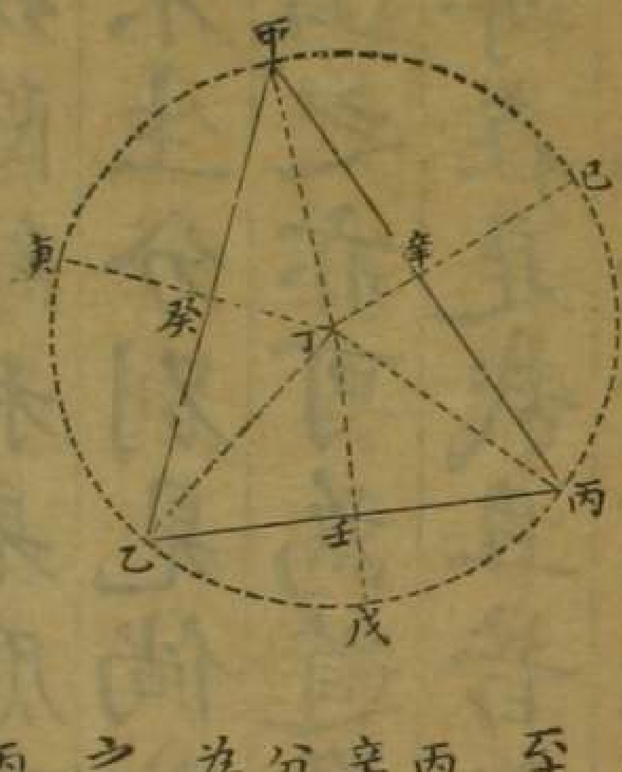
試更以各角切負觀之。則各角之對邊。皆為其對弧之通弦

如圖。三角形。以各角切負。則乙丙邊為丙戊乙弧之通弦。而對甲角。甲丙邊為丙己甲弧之通弦。而對乙角。甲乙邊為乙庚甲弧之通弦。而對丙角。則是各角之對邊。即各角對弧之通弦也。夫通弦者正弦之倍數。則三邊比例。即三正弦之比例矣



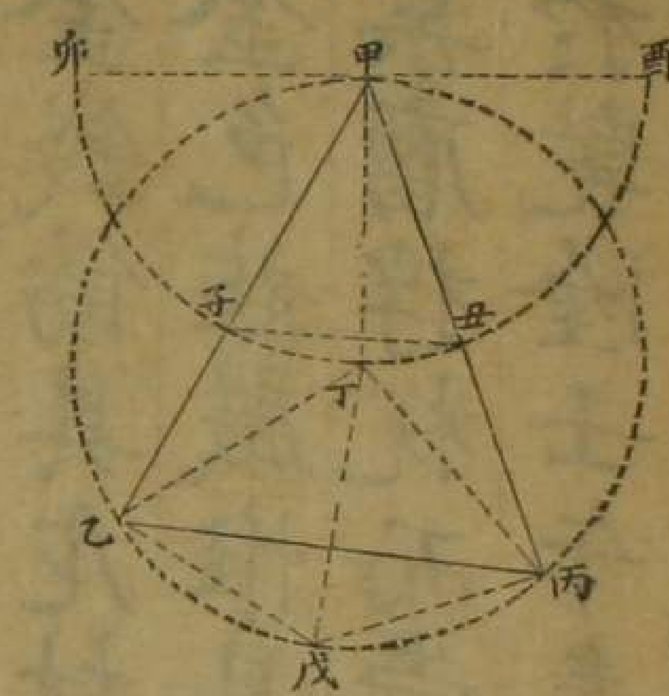
又試以各邊平分之。則皆成各角之正弦

於前圖內。更以各邊所當之弧皆平分之。丙戊乙弧平分於戊點。丙己甲弧平分於己點。乙庚甲弧平分於庚點自負心丁。各作半徑至其點。即分各邊為兩平分。以丁壬戊半徑。分乙丙邊於壬。以丁辛己半徑。分甲丙邊於辛。以丁癸庚半徑。分甲乙邊於癸。則所分之邊。皆為兩平分則弧之平分者。即原設各角之度。而邊之平分者。即皆各角之正弦



丙丁戊角。以丙戊為弧。丙壬為正弦。而丙丁戊角。原為丙丁乙角之半。必與甲角同大。故丙戊半弧。即甲角之本度。丙壬半邊。即甲角之正弦。乙丁戊角亦然。準此論之。則甲丁己角。原為甲丁丙角之半。必與乙角同大。故甲己半弧。即乙角之本度。甲辛半邊。即乙角之正弦。己丁丙角亦然。又乙丁庚角。原為乙丁甲角之半。必與丙角同大。故乙庚半弧。即丙角之本度。乙癸半邊。即丙角之正弦。庚丁甲角亦然夫分其邊之半。即皆成正弦。則邊與邊之比例。亦必如正弦與正弦矣全與全。若半與半也

問三角之本度皆用半弧何也。曰。量角度。必以角為負心。真度乃見。今三角皆切負邊。則所作通弦之弧。皆倍度也。故半之乃為角之本度

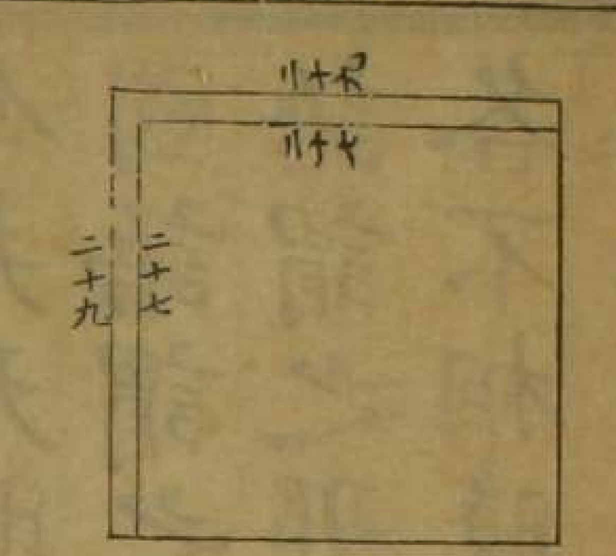


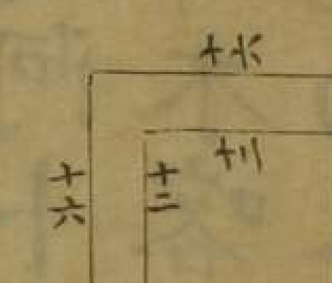
如圖。以甲角為心。甲丁為半徑。作負。則其弧丑丁子。乃甲角之本度也。而平分之丙戊及戊乙兩弧。並與丑丁子弧等試作戊丙及乙戊兩弦必相等。又並與丑子弦等。凡弦等者弧亦等故乙戊丙弧。必為甲角之倍度餘角類推

問三邊求角。何以用和較相乘也。曰。欲明和較之用。當先知和較之根。凡大小兩方。以其邊相併謂之和。相減謂之較。和較相乘者。兩方相減之餘積也

如圖。甲癸小方。丁癸大方。於大方內。依小方邊作已庚橫線。又取已辛如小方邊。作辛壬線。成已壬小方與甲癸等。大方內減已壬小方。則所餘者為乙庚及庚壬兩長方形。夫乙己及丁庚及庚辛並兩邊之較也。甲己庚則和也。若移庚壬長方為乙甲長方。即成丁甲大長方。而為較乘和之積。故凡兩方相減之餘積為實。以和除之得較。以較除之亦得和矣

依此論之。若有兩方形相減。又別有兩方相減。而其餘積等。則為公積。故以此兩方之和較相乘為實。而以彼兩方之和為法除之。得彼兩方之較。或以彼兩方之較為法除之。亦必得和

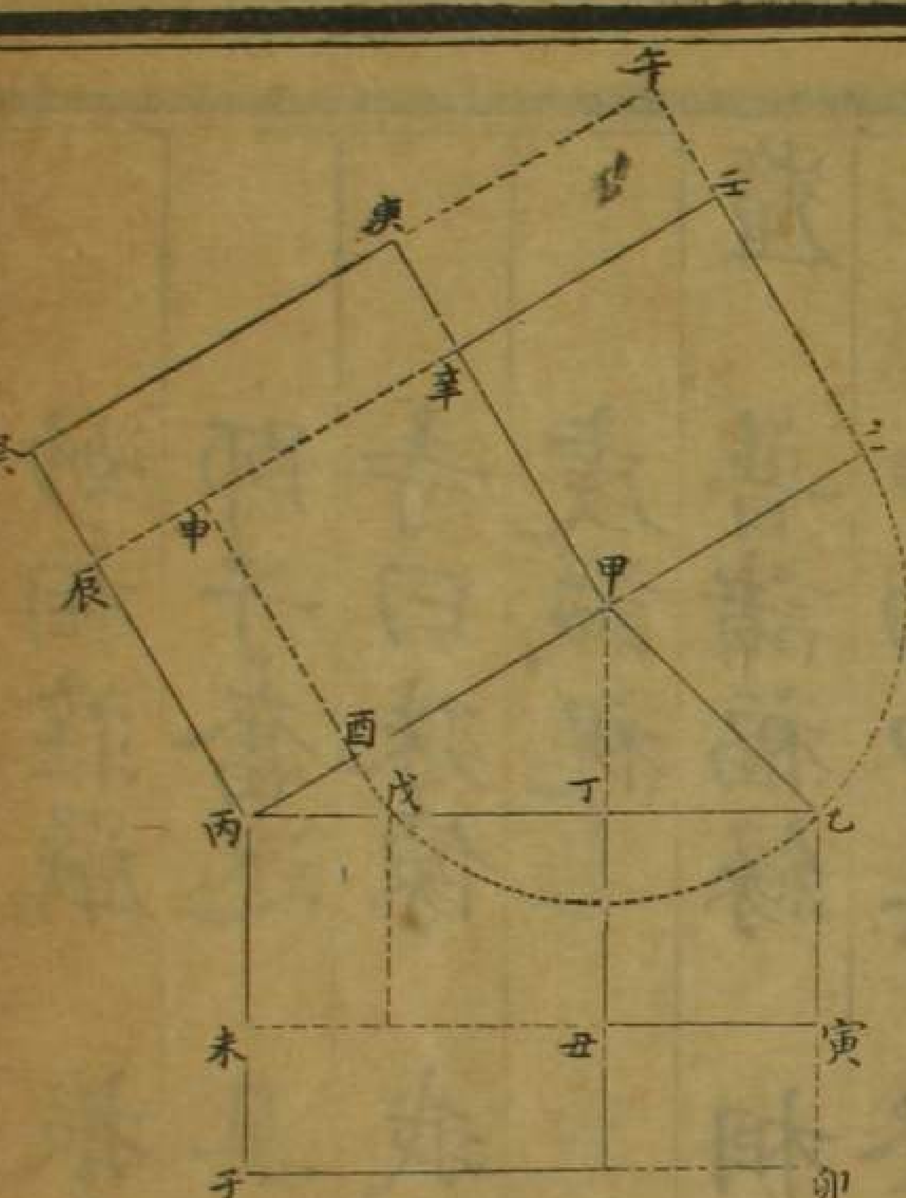




如圖。有方二十九之冪八百四十一。與方二十七之冪七百二十九相減。成較二乘和五十六之積。又有方十六之冪二百五十六。與方十二之冪一百四十四。相減成較四乘和二十八之積。兩積同為一百一十二。故以先有之較二和五十六相乘為實。以今有之和二十八為法除之。即得較四。為今所求數

是故三角形。以兩弦之和乘較為實。以兩分底之和為法除之得較者。為兩和較相乘同積也。兩和較相乘同積者。各兩方相減同積也

何以明之。曰。凡三角形以中長線分為兩句股。則兩形同以中長線為股。而各以分底線為句。是股同而句不同也。句不同者弦不同也。弦大者句亦大。弦小者句亦小。故兩弦上方相減。必與兩句上方相減之餘積等。而兩和較相乘亦等



如圖。甲乙丙三角形。以甲丁中長線分為兩句股形。則丙乙為兩句之和。未寅及子卯並同。丙戊為兩句之較。未子及寅卯並同。未卯長方。為兩句之較乘和也。又丙巳為兩弦之和。辰壬同。酉丙為兩弦之較。辰癸及辛庚壬午並同。

癸壬長方。為兩弦之較乘和也。此兩長方必等積

問兩弦上方。大於兩句上方。何以知其等積。曰。依句股法。弦上方冪。必兼有句股上方冪。是故甲丙弦冪內。即癸甲大方。必兼有甲丁股丙丁句兩冪。乙甲弦冪內。即辛已小方。亦兼有甲丁股乙丁句兩冪。則是甲丁股冪者。兩弦冪所同也。其不同者句冪耳。股冪既同。則弦冪相減時。股冪俱對減而盡。使非句冪不同。已無餘積。然則兩弦冪相減之餘積。於癸甲大方內。減已辛相同之申甲小方。所餘者癸辛申丙兩長方。成罄折形。豈不即為兩句冪相減之餘積乎。於丁子方內。減丁寅相同之戊丑小方。所餘者丑子及戊未兩長方。成罄折形。由是言之。兩和較相乘之等積信矣。於弦冪相減之癸辛申丙罄折形內。移申丙補庚壬。即成和較相乘之癸壬長方。又於句冪相減之丑子未戊罄折形內。移戊未補丑卯。即成和較相乘之未卯長方。兩罄折形既等積。則兩長方亦等積

問和較之列四率與諸例不同。何也。曰。此互視法也。同文筭指謂之變測。古九章謂之同乘異除。乃三率之別調也。何則。凡異乘同除。皆以原有兩率之比例。為今兩率之比例。其首率為法。必在原有兩率之中。互視之術。則反以原有之兩率為二為三。以自相乘為實。其首率為法者。反係今有之率。與異乘同除之序相反。故曰別調也。

然則又何以仍列四率。曰。以相乘同實也。三率之術。二三相乘。與一四相乘同實。故可以三率求一率。二三相乘。以一除之得四。以四除之即仍得一。若一四相乘。以二除之亦可得三。以三除之亦仍得二。互視之術。以原有之兩率自相乘。與今有之兩率自相乘同實。故亦以三率求一率。原兩率自相乘。以今有之率除之。得今有之餘一率。若今兩率自相乘。以原有之率除之。亦即得原有之餘一率。但三率之術以比

例成其同實。互視之術。則以同實而成其比例。既成比例。所有四率。故可以列而求之也

如圖。長方形。對角斜剖。成兩句股則相等。而其中所成小句股亦相等。甲壬戊與甲己戊等。則甲乙丙與甲辛丙等。丙丁戊與丙庚戊等。並長方均剖故也即所成長方之積亦必相等。於甲壬戊句股形內。減去相等之甲乙丙。及丙丁戊兩小句股。存乙丙丁壬長方。又於甲己戊句股形內。減去相等之甲辛丙。及丙庚戊兩小句股。存辛己庚丙長方。所減之數等。則所存之數亦等。故兩長方雖長闊不同。而知其必為等積令以甲乙為首率。乙丙為次率。丙丁為三率。丁戊為四率。則乙丁長方。即乙丙丁壬形。為二三相乘之積。此形以乙丙二率為闊。丙丁三率為長。是二率三率相乘也。辛庚長方。即辛己庚丙形。為一四相乘之積。此形以辛丙為長。丙庚為闊。而辛丙原同甲乙乃一率也。丙庚原同丁戊。乃四率也。是一率四率相乘也既兩長方相等。則二三相乘與一四相乘等實矣。此列率之理也

一　甲乙

二　丙乙

三　丙丁

四　戊丁

在異乘同除本術。則甲乙及丙乙為原有之數。丙丁為今有之數。戊丁為今求之數。其術為以原有之甲乙股比原有之丙乙句。若今有之丙丁股與戊丁句也。故於原有中取丙乙句。與今有之丙丁股。以異名相乘為實。又於原有中取同名之甲乙股為法除之。即得今所求之丁戊句。是先知四率之比例。而以乘

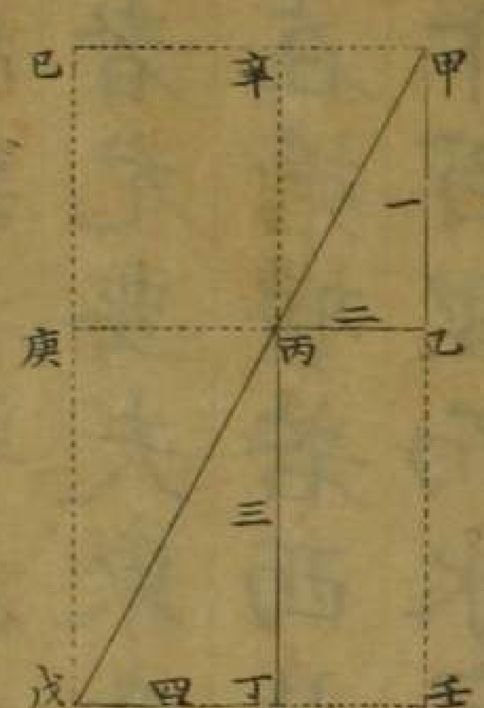
除之故。成兩長方。二率乘三率。成乙丁長方。以首率除之。必變為辛庚長方。故曰以比例成其同實也

互視之術。則乙丙與丙丁為原有之數。甲乙為今有之數。丁戊為今求之數。術為以乙丙較乘丙丁和之積。若丙庚較即丁戊乘丙辛和即甲乙之積。故以原有之乙丙較丙丁和自相乘為實。以今有之甲乙和即丙辛為法除之。即得今所求之丁戊較。即丙庚是先知兩長方同積。而以四率取之。故曰以同實成其比例也

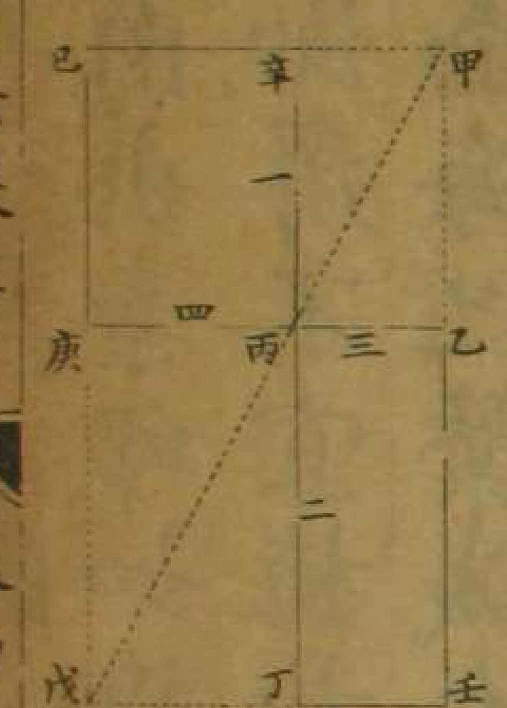
然則又何以謂之互視。曰。三率之用。以原有兩件自相比之例。為今有兩件自相比之例。是視此之差等。為彼之差等。如相慕效。故大句比大股。若小句比小股。大句小於大股幾倍。小句亦小於小股幾倍。又大句大於小句幾倍。大股亦大於小股幾倍。

互視之用。以原有一件與今一件相比之例。為今又一件與原又一件相比之例。是此視彼之所來以往。彼亦視此之所往以來。如互相酬報。故弦之較比句之較。反若句之和比弦之和。弦之和大於句。故句之較反大於弦。若和之數弦大於句幾倍。則較之數句大於弦亦幾倍。是以別之為互視也

三率圖



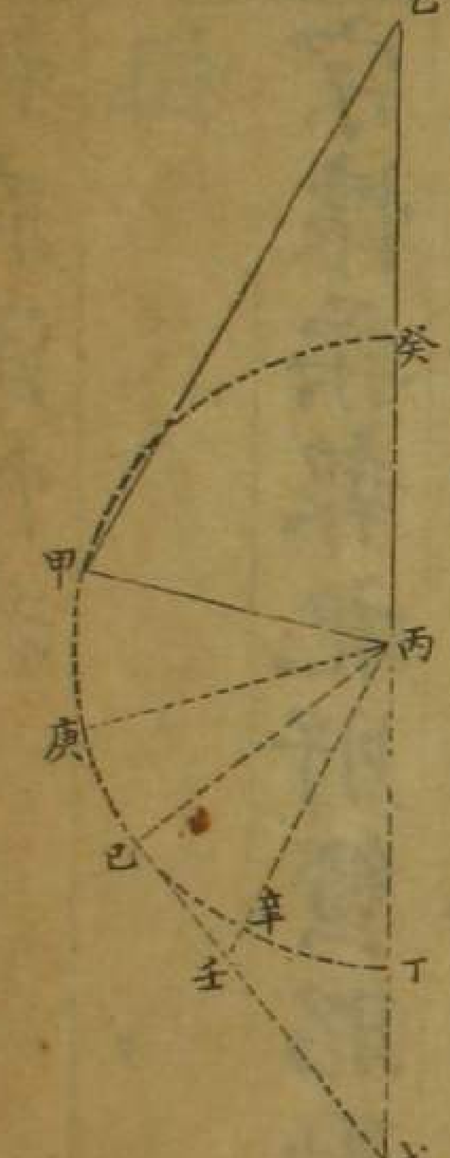
互視圖



如圖。以甲乙為一率。丙乙為二率。丙丁為三率。丁戊為四率。作甲戊弦。成兩句股。次引甲乙及丁戊會於壬。成乙丁長方。為二三相乘之積。亦引乙丙至庚。引丁丙至辛。作甲辛及戊庚線。並引長之。會於已。成辛庚長方。為一四相乘之積。是先有比例而成同實之長方。

如圖。乙丙乘丙丁。為乙丁長方。辛丙乘丙庚。為辛庚長方。兩長方以角相連於丙。次引已辛及乙壬會于甲。引已庚及壬丁會于戊。乃作甲戊線。則辛丙與丙丁。若乙丙與丙庚。是先知同實而成其比例也

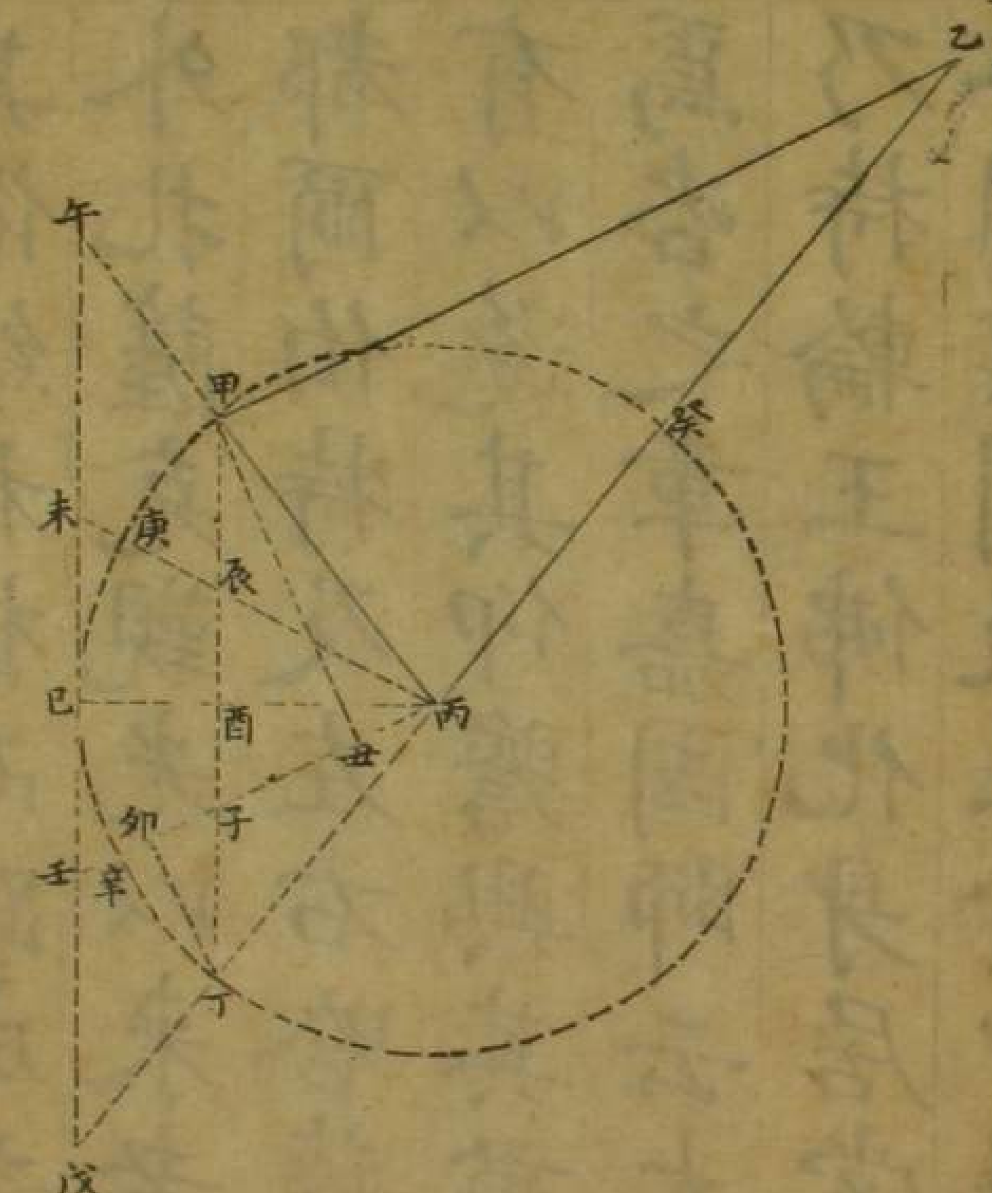
問三角形兩又術。用外角切線。何也。曰。此分角法也。一角在兩邊之中。則角無所對之邊。邊無所對之角。不可以正弦為比例。今欲求未知之兩角。故借外角分之也。然則何以用半較角。曰。較角者。本形中未知兩角之較也。此兩角之度。合之即為外角之度。必求其較角。然後可分。而較角不可求。故求其半。知半較知全較矣。此用半較角之理也



如圖。甲丙乙形。先有丙角。則甲丙丁為外角。外角內作丙辛線。與乙甲平行。則辛丙丁角。與乙角等。辛丙甲角。與甲角等

其辛丙庚角。為兩角之較。而辛丙巳角其半較也。巳丙丁及巳丙甲皆半外角也。以半較角與半外角。相減。成乙角。（於丁丙巳內減辛丙巳。其餘丁丙辛即乙角度。）若相加。亦成甲角。（於巳丙甲。加辛丙巳。成辛丙甲。即甲角度。）半較角用切線何也。曰此比例法也。角與所對之邊。並以正弦為比例。今既無正弦可論。而有其所對之邊。故即以邊為比例。（角之正弦可以例邊。則邊之大小亦可以例角。）是故乙丁者兩邊之總也。乙癸者兩邊之較也。而戊巳者半外角之切線也。壬巳者半較角之切線也。以乙丁比乙癸。若戊巳與壬巳。故以切線為比例也

然則何以不徑用正弦。曰。凡一角分為兩角。則正弦曰度離立。不同在一線。不可以求其比例。其在一線者。惟切線耳。而邊之比例。與切線相應。切線比例。又原與正弦相應。故用切線。實用正弦也。

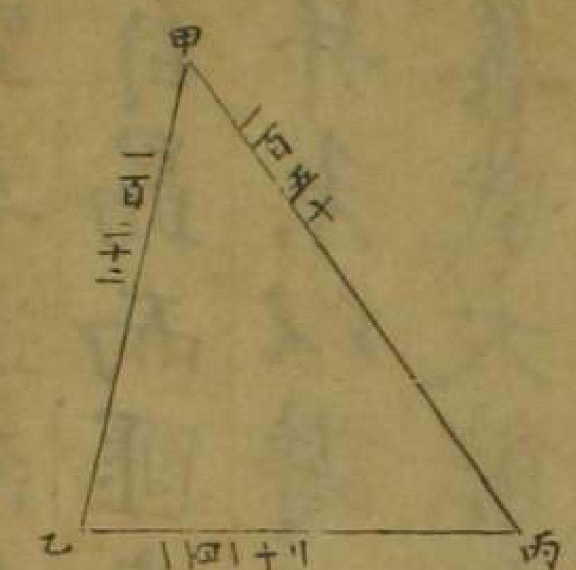


如圖。甲丙丁外角。其弧甲巳丁。於辛作辛丙線。分其角為兩。則小角之弧丁辛。其正弦卯丁。大角之弧辛甲。其正弦甲丑。（小角正弦當乙角之對邊甲丙。大角正弦當甲角之對邊乙丙。）

今欲移正弦之比例於一線。先作甲丁通弦。割分角線於子。則子甲與子丁。若甲丑與卯丁。（甲丑子與丁卯子兩句股形。有子交角等。丑卯皆正角。即兩形相似而比例等。然則子甲者大形之弦。子丁者小形之弦。而甲丑者大形之股。卯丁者小形之股也。弦與弦若股與股。故子甲比子

丁。若丑甲與卯丁。而甲丁即兩正弦之總。甲丁為子甲子丁之總亦即為甲丑卯丁之總辰子即兩正弦之較。以子丁減子甲。其較辰子。是辰子為子甲子丁之較。亦即為甲丑卯丁之較。平分甲丁半之於酉。則酉丁為半總。酉子為半較。其比例同也。全與全若半與半。故甲丁與辰子為兩正弦之總與較。則半之而為酉丁與酉子。亦必若兩正弦之總與較。於是作午戊切負線。引平分線丙酉至巳。分甲巳丁弧於巳。自巳作午戊線。與巳丙為十字垂線。即此線為切負線。與甲丁平行。引諸線至其上。引丙甲至午。引丙丁至戊。引丙辰割庚點至未。引丙卯割辛點至壬。則午戊切線上比例。與甲丁通弦等。而正弦之比例在切線矣。先以甲丁與辰子當兩正弦之總與較。今午戊與未壬亦可當兩正弦之總與較。則先以酉丁與酉子為半總半較者。今亦以巳戊與巳壬為半總半較矣故曰用切線實用正弦也。切線與正弦。所以能同比例者。以有通弦作之合也

問三較連乘之理。曰。亦句股術也。以句股為比例。而以三率之理轉換之。則用法最精之處也。故三較連乘。即得容負半徑上方乘半總之積



假如甲乙丙三角形。甲丙邊。一百五十甲乙邊。一百二十二乙丙邊。一百一十二術以半總一百九十二較各邊得甲丙之較。四十二甲乙之較。七十乙丙之較。八十三較連乘得數。二十三萬五千二百即容負半徑自乘又乘半總之積也。

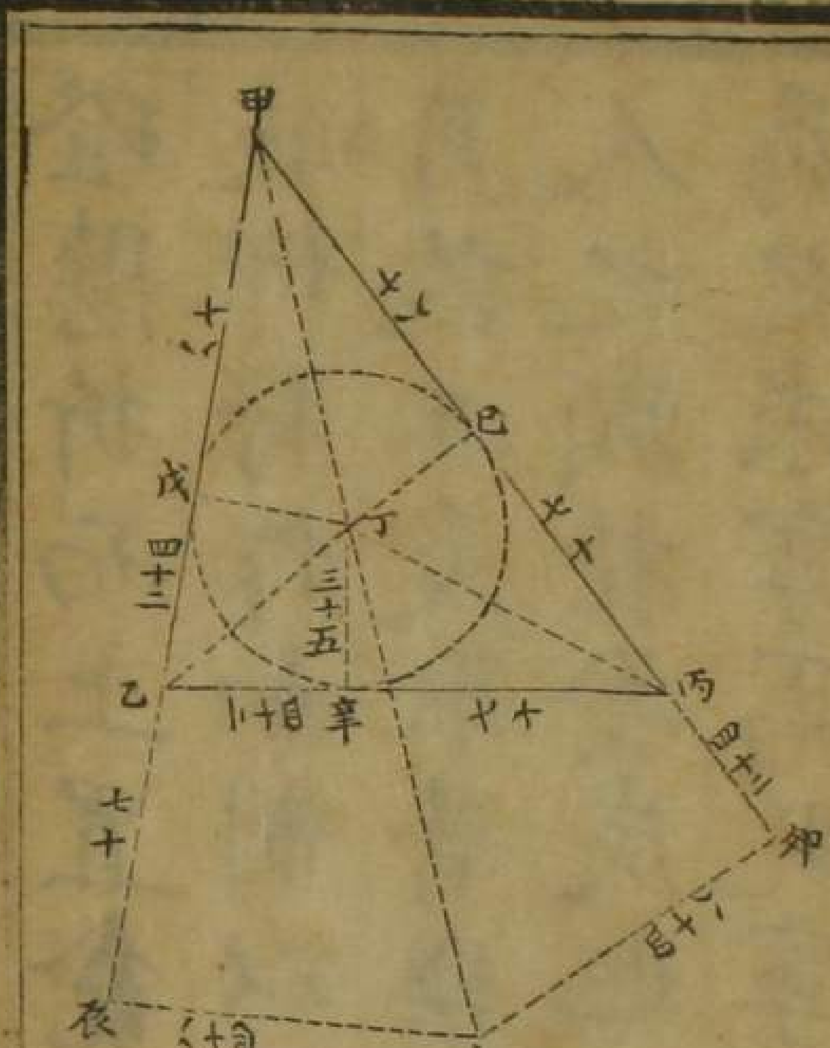
置三較連乘數。以半總除之。得數。一千二百二十五平方開之。得容負半徑。三十五倍之。得容負徑。七十

置三較連乘數。以半總乘之。得數。四千五百一十五萬八千四百平方開之。

得三角形積六千七百二十

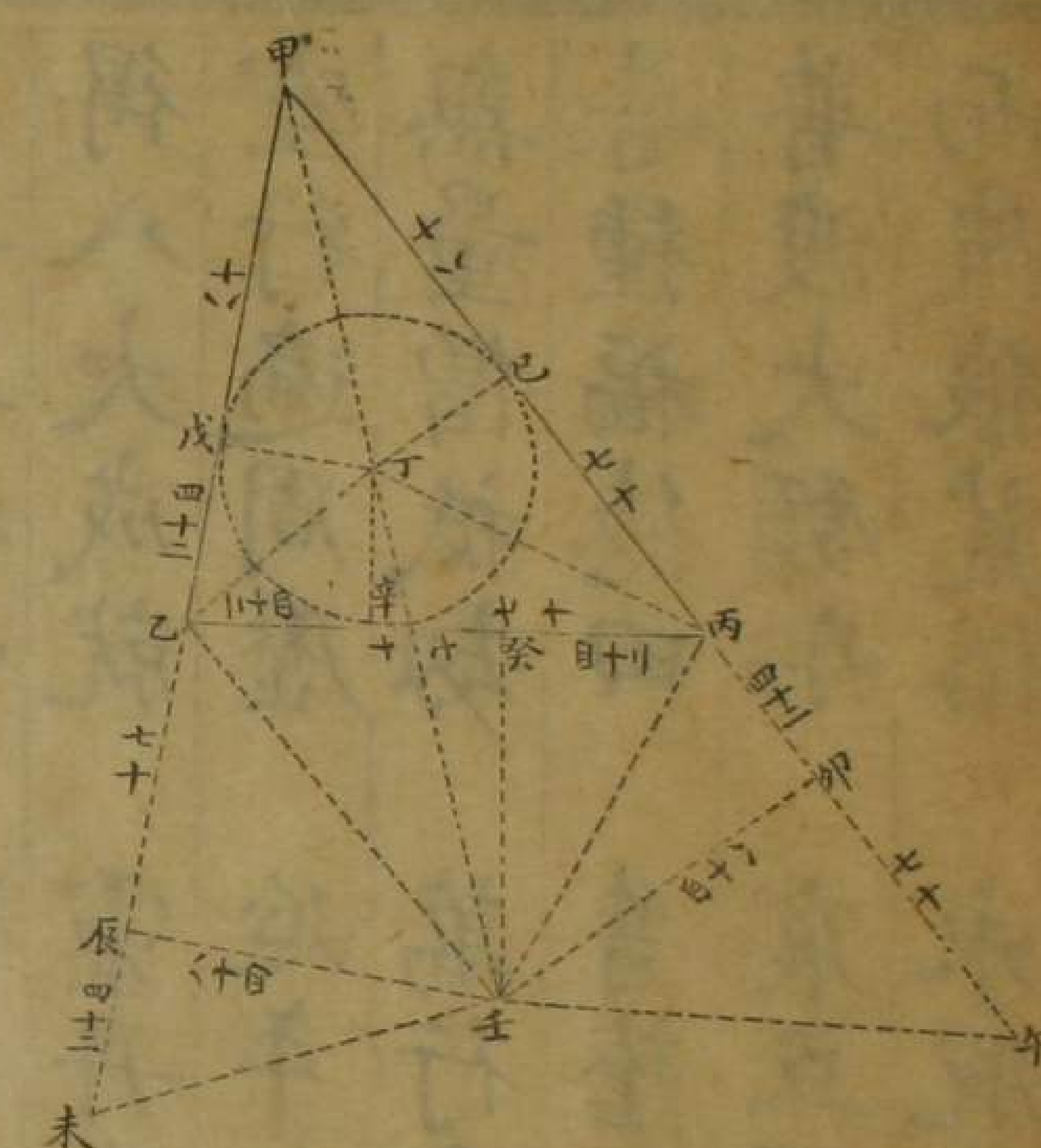
若如常法。求得中長線。一百二十以乘乙丙底而半之。所得積數亦同

然則何以見其為句股比例。曰。試從形心如法作線。分為六句股形。形心。即容員心。又引甲丙邊至卯。使卯丙如乙戊。引甲乙邊至辰。使乙辰如己丙。則甲卯甲



辰並半總。六小句股形之句。各於其兩相同者而取其一。即成半總而丙卯為甲丙邊之較。即乙戊。或乙辛乙辰為甲乙邊之較。即己丙。或辛丙甲己為乙丙邊之較。己丙同辛丙。又丙卯同乙辛。則卯己同乙丙。而甲己為其較。若用辰戊以當乙丙。則甲戊為較。亦同又從卯作卯壬十字垂線至壬。此線與丁己員半徑平行引甲丁分角線出形外。遇於壬。成甲卯壬大句股形。與甲己丁小句股之比例等。從辰作辰壬線。成甲辰壬大句股。與甲戊丁小句股為比例。亦同術為以丁己比壬卯。若甲己與甲卯也。次以丁己自乘方為一率。以丁己乘壬卯之長方為次率。則其比例仍若甲己三率與甲卯四率也。乘之者並丁己。故所乘之丁己與壬卯。比例不變也以數明之。甲己八十。甲卯一百九十二。為二倍四分比例。丁己三十五。壬卯八十四。亦二倍四分比例。丁己自乘一千二百二十五。丁己乘壬卯二千九百四十。亦二倍四分比例。故曰比例等

又移辛點至癸。截丙癸如丙卯。則乙癸亦如乙辰。引丙卯至



午。使卯午同乙辰。亦同乙癸引乙辰至未。使辰未同丙卯。亦同丙癸則午丙及未乙並同乙丙。又作丙壬。乙壬。午壬。未壬。四線。成午丙壬。及乙未壬。及乙丙壬。各三角形皆相等。丙卯壬句股形。與未辰壬等。則丙壬必等未壬。又午卯壬句股形。與乙辰壬等。則午壬等乙壬。兩午丙壬及乙未壬。兩三角形必等矣。其乙丙壬三角形。既以乙丙與兩三角形同底。又同用丙壬乙壬兩弦。亦不得不等於是自癸作癸壬垂線。卯壬辰壬並垂線。故癸壬亦必垂線成丙癸壬句股形。與丙卯壬形等。即成癸丙卯壬四邊形。與丁已丙辛小四邊形。為相似形。卯與癸俱方角。而小形之已與辛亦方角。則大形之丙角與壬角合之亦兩方角也。而小形之丙角。原為大形丙角之外角。合之亦兩方角也。則小形之丙角。與大形之壬角等。而小形之丁角。亦與大形之丙角等。是大小兩形之四角俱等。而為相似形則丁已丙句股形。與丙卯壬形亦相似。而比例等。大小兩四邊形各均。剖其半以成句股。則其相似之比例不變。全與全。若半與半也術為以丁已比已丙。若丙卯與卯壬也

一　丁已

二　已丙

三　丙卯　即甲丙之較戊乙

四　卯壬

凡三率法中。二三相乘。一四相乘。其積皆等。則已丙乘丙卯之積。即丁已乘卯壬之積。可通用也。先定以丁已自乘。比丁

己乘卯壬。若甲己與甲卯。今以三率之理通之。為以丁己自乘。比己丙乘丙卯。亦若甲己與甲卯。

一　丁己自乘方　即容貟半徑自乘

二　己丙乘丙卯長方　即甲乙之較乘甲丙之較

三　甲己　即乙丙之較

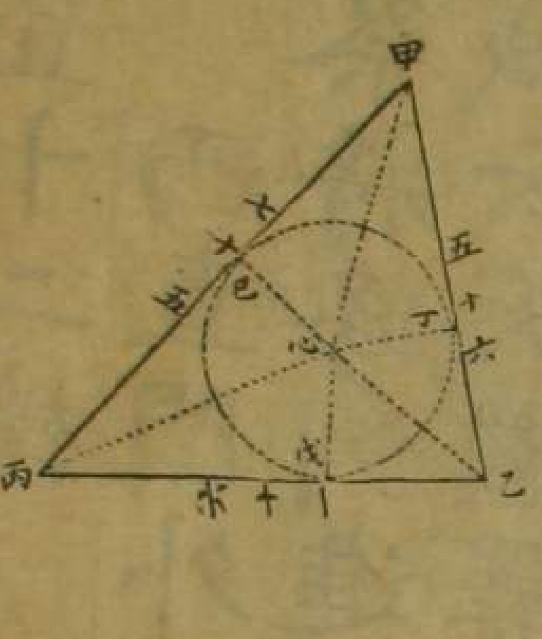
四　甲卯　即半總

復以三率之理轉換用之。則三較連乘之積（以己丙較乘戊乙較為二率。又以甲己較為三率乘之。是二三相乘。即三較連乘也。）即容貟半徑自乘方乘半總之積（以丁己半徑自乘為首率。以甲卯半總為四率乘之。是一四相乘也。凡一四相乘。必與二三相乘之積等。）以數明之。丁己（三十五）卯壬（八十四）相乘。得二千九百四十。己丙（七十）丙卯（四十二）相乘。亦二千九百四十。故可通用

己丙乘丙卯（二千九百四十）。又以甲己（八十）乘之。得二十三萬五千二百。丁己自乘（一千二百二十五）。又以甲卯（一百九十二）乘之。亦二十三萬五千二百。故可通用

問三較之術可以求角乎。曰可。其所求角皆先得半角。即銳鈍通爲一術矣。

術曰以三邊各減半總得較。各以所求角對邊之較乘半總爲法。以餘兩較各與半徑全數相乘。又自相乘爲實。法除實得數。平方開之爲半角切線。撿表得度。倍之爲所求角



假如甲乙丙三角形。甲丙邊。七十五甲乙邊。五十六乙丙邊。六十一與半總九十六各相減。得甲丙之較。二十一甲乙之較。四十乙丙之較三十五

今求乙角。術以乙角所對邊甲丙之較。二十一乘半總。九十六得數。二〇一六爲法。以餘兩較甲乙較四〇乙丙較三五各乘半徑全數。又自相乘得

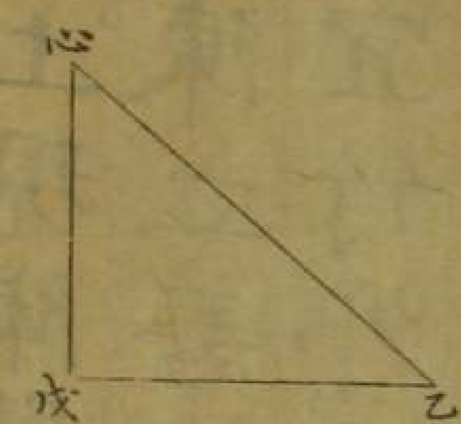
數一四〇〇〇〇〇〇〇〇〇〇〇〇為實。法除實得數。六九四四四四四四四四四平方開
之。得數。八三三三三為半角切線。檢表三十九度四十八分一十九秒倍之得乙
角七十九度三十六分三十八秒
次求丙角。術以丙角所對邊甲乙之較。四〇乘半總。得數。三八四〇
為法。餘兩較甲丙二一乙丙三五各乘半徑全數。又自相乘。得數。七三五〇
〇〇〇〇〇〇〇〇〇為實。法除實得數。一九一四〇六二五〇〇平方開之得半
角切線。四三七五〇檢表二十三度三十七分五十二秒半倍之得丙角四十七度一十
五分四十五秒
次求甲角。術以甲角所對邊乙丙之較。三五乘半總。得數。三三六〇
為法。餘兩較甲丙二一甲乙四〇各乘半徑全數。又自相乘得數。八四〇〇
〇〇〇〇〇〇〇〇〇為實。法除實得數。二五〇〇〇〇〇〇〇〇平方開之得半

角切線。五〇〇〇檢表二十六度三十三分五十三秒倍之得甲角五十三度〇七分四
十六秒
問前條用三較連乘。今只用一較為除法。何也。曰。前條求總積。
故三較連乘。今有專求之角。故以對邊之較為法也。然則用對
邊何也。曰。對邊之較。在所求角之兩旁。為所分小句股形之句。
令求半角切線。故以此小句為法也

如求乙半角。則所用者角旁小句股。心戊乙或心丁
乙。其句乙戊或乙丁並二十一。即對邊甲丙之較
也。術為以乙戊比心戊。若半徑與乙角小形之角
即半角也之切線
其與半總相乘何也。曰。將以半總除之。又以小形句即對邊之較除

之。今以兩除法（一半總。一對邊之較。即小形句）相乘。然後除之。變兩次除為一次除也（古謂之異除同除）用兩次除亦有說乎。曰。前條三較連乘。必以半總除之。而得容負半徑之方冪。今欲以方冪為用。故亦以半總除也。然則又何以對邊之較除。曰。非但以較除也。乃以較之冪除也。何以言之。曰。原法三較連乘為實。今只以兩較乘。是省一乘也。既省一對邊之較乘。又以對邊之較除之。是以較除兩次也。即如以較自乘之冪除之矣

餘兩較相乘。先又各乘半徑。何也。曰。此三率之精理也。凡線與線相乘除。所得者線也。冪與冪相乘除。所得者冪也。先既定乙戊句為首率。心戊股（即容負半徑）為次率。半徑為三率。乙角切線為四率。而今無心戊之數。惟三較連乘中。有心戊（即容負半徑。）自乘之冪。（即三較連乘。半總除之之數）故變四率並為冪。以乙戊句冪為首率。（即對邊之較除兩次）心戊股冪為次率。（即半總除連乘數）半徑之冪為三率。（即半徑自乘）得半角切線之冪為四率（即分形之乙角）



一	乙戊	今用乙戊自乘
二	心戊	心戊自乘
三	半徑	半徑自乘
四	乙角切線	切線自乘

故得數開方。即成切線

又術

以三較連乘。半總除之。開方為中垂線。即容圓半徑 以半徑全數乘之。為實。各以所求角對邊之較除之。即得半角切線

一	乙戊 乙角對邊之較	丙戊 丙角對邊之較	甲己 甲角對邊之較
二	心戊中垂線	心戊中垂線	心己中垂線 亦即心戊
三	半徑全數	半徑全數	半徑全數
四	乙半角切線	丙半角切線	甲半角切線

此即用前圖可解。乃本法也

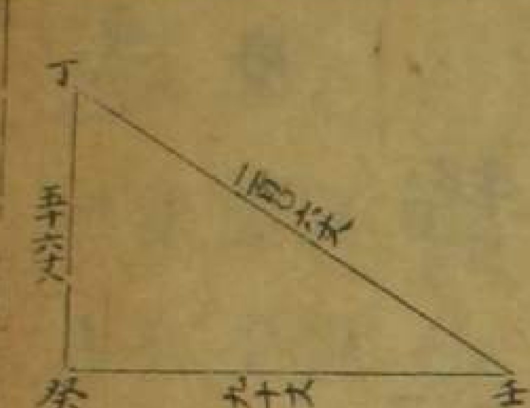
論曰。常法三邊求角。倘遇鈍角。必於得角之後。又加審焉。以鈍角與外角同一八線也。今所得者既為半角。則無此疑。實為求角之捷法

四卷補遺

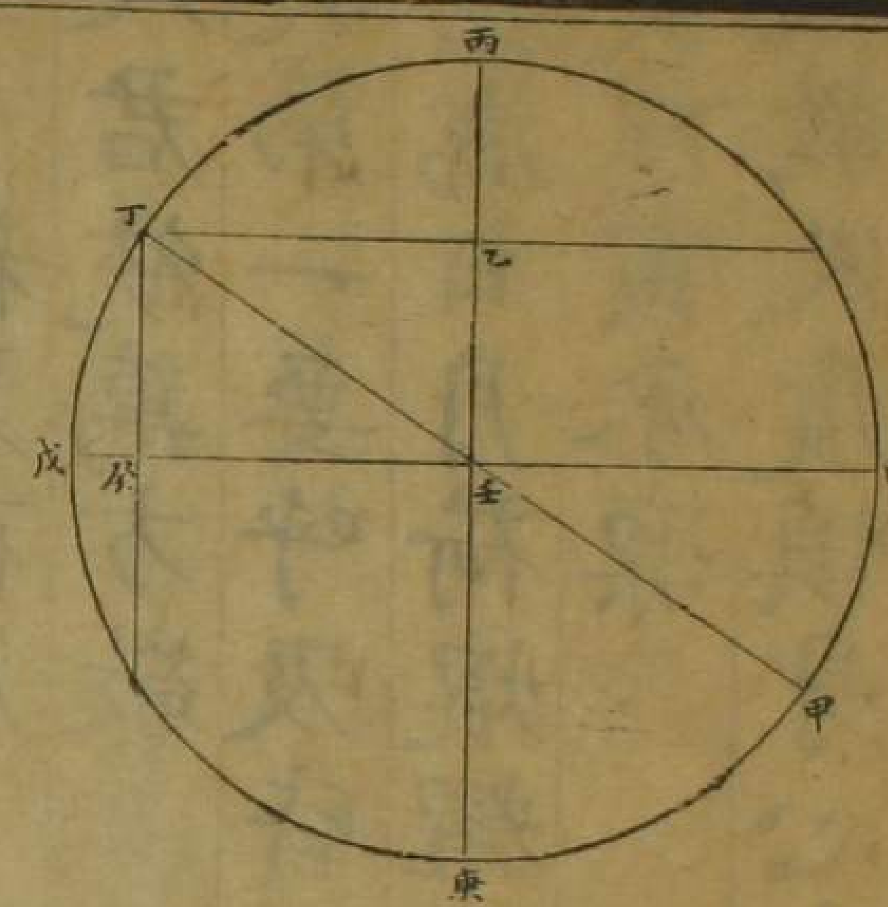
問以邊求角。句股第二術 因和較乘除而知正角。乃定其為句股形。何也。曰。古法句弦較乘句弦和。開方得股。今大邊壬丁與小邊癸丁以和較相乘為實。癸壬邊為法除之。而仍得癸壬。是適合開方之積也。則大邊小邊之和較。即句弦之和較。而癸為正角。成句股形矣凡句股形。弦為大邊。而對正角。今丁壬邊最大。即弦也。故所對之癸角為正角

試再以丁壬與壬癸之和較求之

如法。用丁壬壬癸相加得和。一百九十六丈相減得較。十六丈較乘和三千一百三十六丈為實。丁癸五十六丈為法除之。亦仍得五十六丈。何則。股弦較乘和。亦開方得句。故也



然則句股弦和較之法。又安從生。曰。生於割圜



試以丁壬弦為半徑。作戊丁丙巳圜

全徑二百一十二 半徑一百〇六

乙丁正弦九十即癸壬股 乙壬餘弦五十六即癸丁句

丙乙正矢五十即句弦較 乙庚大矢一百六十二即句弦和

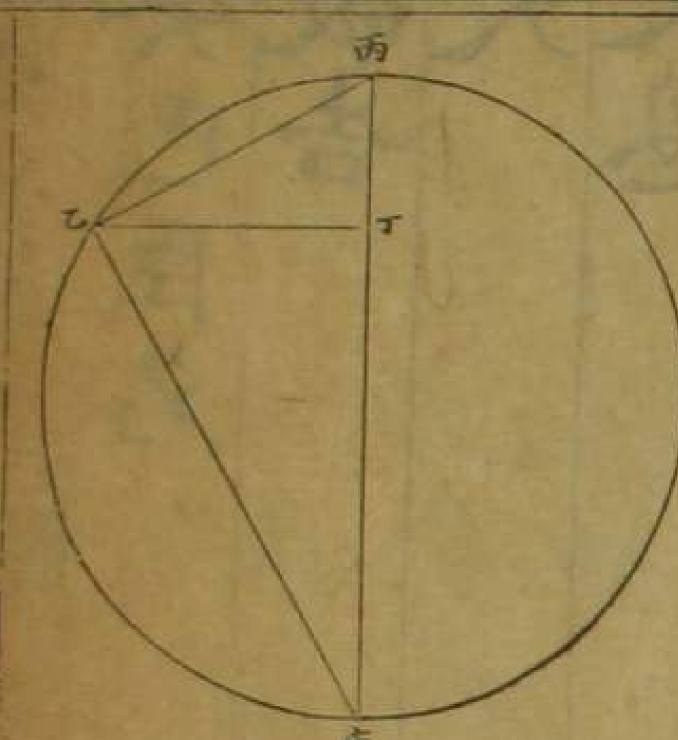
正矢乘大矢。得數八千一百。開方得正弦即句弦和乘較。開方得股

然則此八千一百者。既為正矢大矢相乘之積。又為正弦自乘之積。故以正弦自乘為實。而正矢除之。可以得大矢。大矢除之。亦得正矢即乙丁股自乘為實。而以句弦較丙乙除之。得乙庚為句弦和。若以句弦和除之。亦得句弦較

更之。則正矢乘大矢為實。以正弦除之。仍得正弦矣即句弦較丙乙。乘句弦和乙庚為實。以乙丁股為法除之。而仍復得股

論曰。句股形在平圜內。其半徑恒為弦。若正弦餘弦。則為句為股。可以互用。故其理亦可互明以丁壬及丁癸二邊。取和較。求壬癸邊。為句弦求股。以丁壬及壬癸二邊取和較。求丁癸邊。為股弦求句。一而已矣

問數則合矣。其理云何。曰。仍句股術也



如上圖。於圜徑兩端如丙如庚各作通弦線。至正弦丁乙之銳。如庚乙丙乙成丙乙庚大句股形。

又因中有正弦。成大小兩句股形。乙丁庚為大形。乙丙丁為小形而相似。以乙丁線分正角為兩。則小形乙角。為大形乙角之餘。而與庚角等。即大形乙角。亦與小形丙角等。故兩形相似則乙丁正

弦。既為小形之股。又為大形之句。其比例為丙丁（小形句）與乙丁（小形股）。若乙丁（大形句）與丁庚（大形股）也。故正矢（丁丙）乘大矢（丁庚）與正弦（乙丁）自乘等積（丙庚全徑。為正弦所分。其一丁丙正矢。為小形之句。而乙丁正弦為其股。其一丁庚大矢。為大形之股。而乙丁正弦為其句）

一　丁丙正矢　小形句

二　乙丁正弦　小形股

三　乙丁正弦　大形句

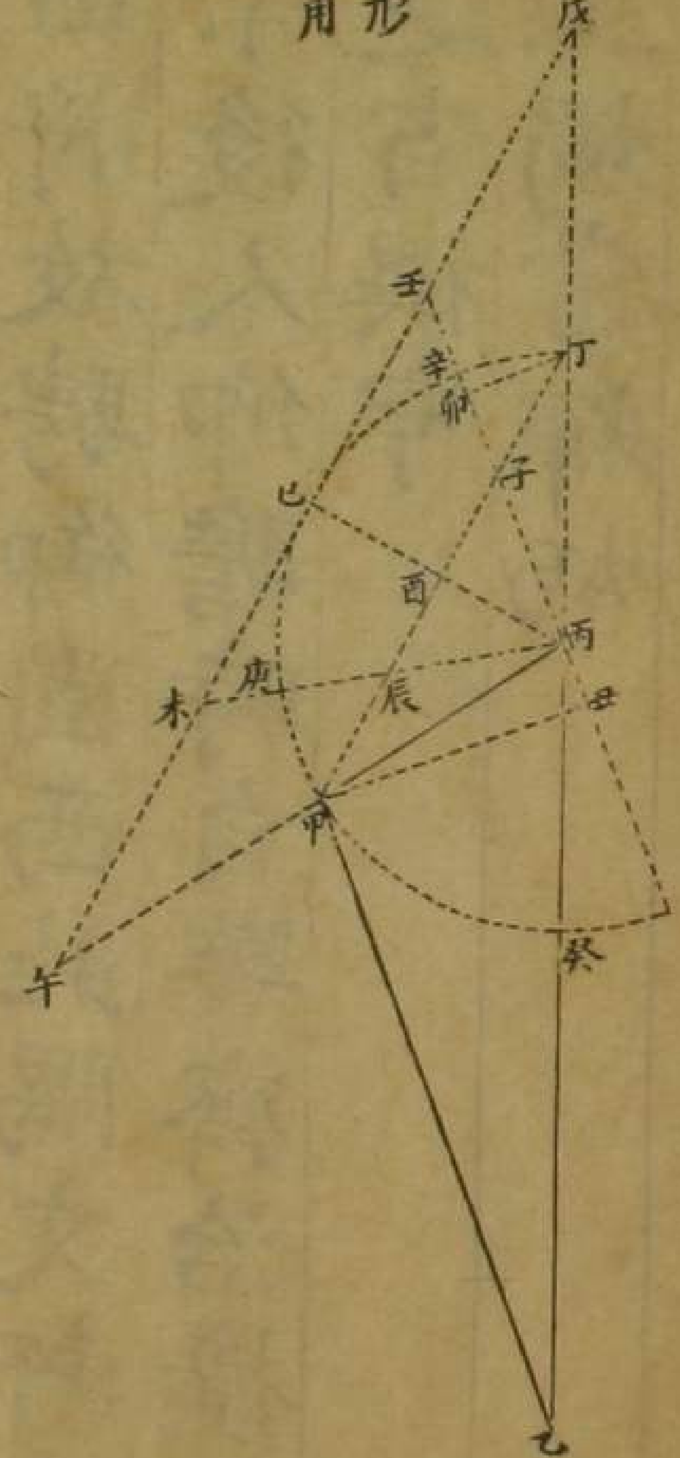
四　丁庚大矢　大形股

凡二率三率相乘。與一四相乘等積。故乙丁自乘。即與丁丙丁庚相乘等積也

論曰。凡割圜算法。專恃句股。古法西法所同也。故論句股者必以割圜。而論割圜者仍以句股。如根株華實之相須。乃本法。非旁證也

或疑切線分外角。以正弦為比例。恐不可施於鈍角。作此明之

鈍角形用外角一



甲丙乙鈍角形。先有丙角。及丙甲丙乙二邊。求餘角

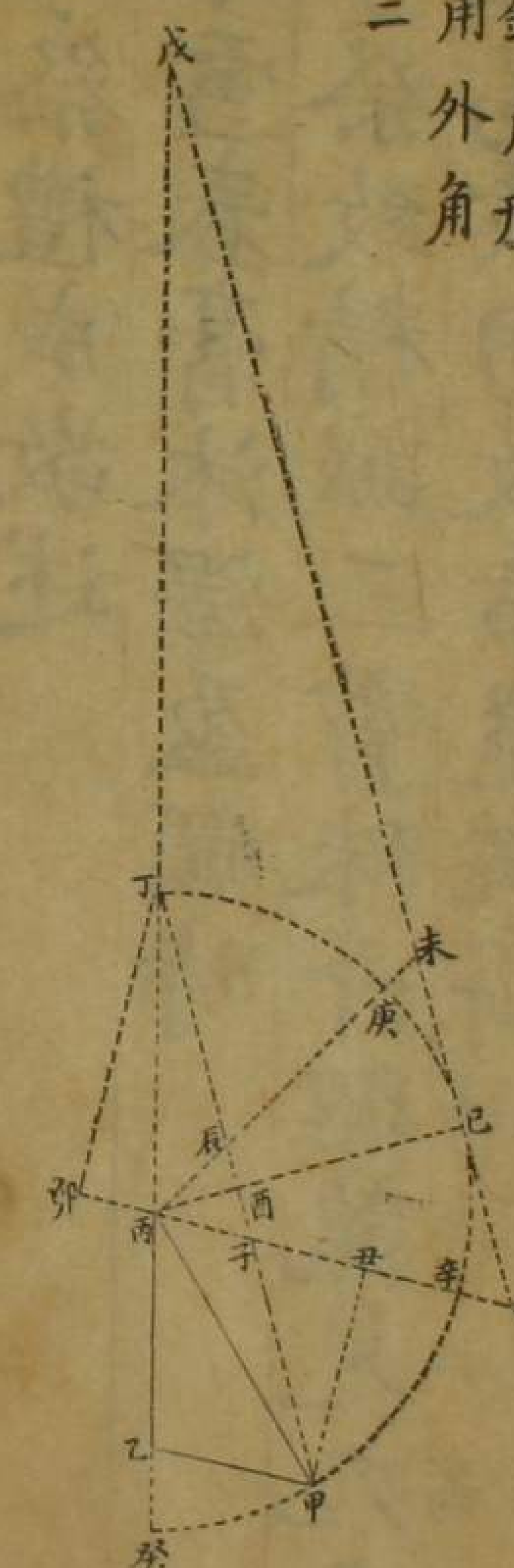
一率丁乙（邊總）二率癸乙（邊較）三率巳戊（半外角切線）四率壬巳（半較角切線）

論曰。試作壬丙線。與乙甲平行。分外角為兩。則壬丙丁即乙角。其正弦卯丁。又甲丙壬即甲角。其正弦甲丑。以兩句股（丑子甲。卯子丁）相似之故。能令兩正弦（丑甲。卯丁）之比例。移於通弦。以成和較。（丑甲與卯

丁。既若子甲與子丁。則丁甲即兩正弦之和。辰子即兩正弦之較。而半外角半較角之算以生。半外角爲和。半較角爲較。並與兩正弦之和較同比例。即與兩邊之和較同比例。並如銳角

又論曰。此所分大角爲鈍角。故甲丑正弦作於形外。然雖在形外。而引分角線至丑。適與之會。即能成丑子甲句股形。與卯子丁相似。而生比例

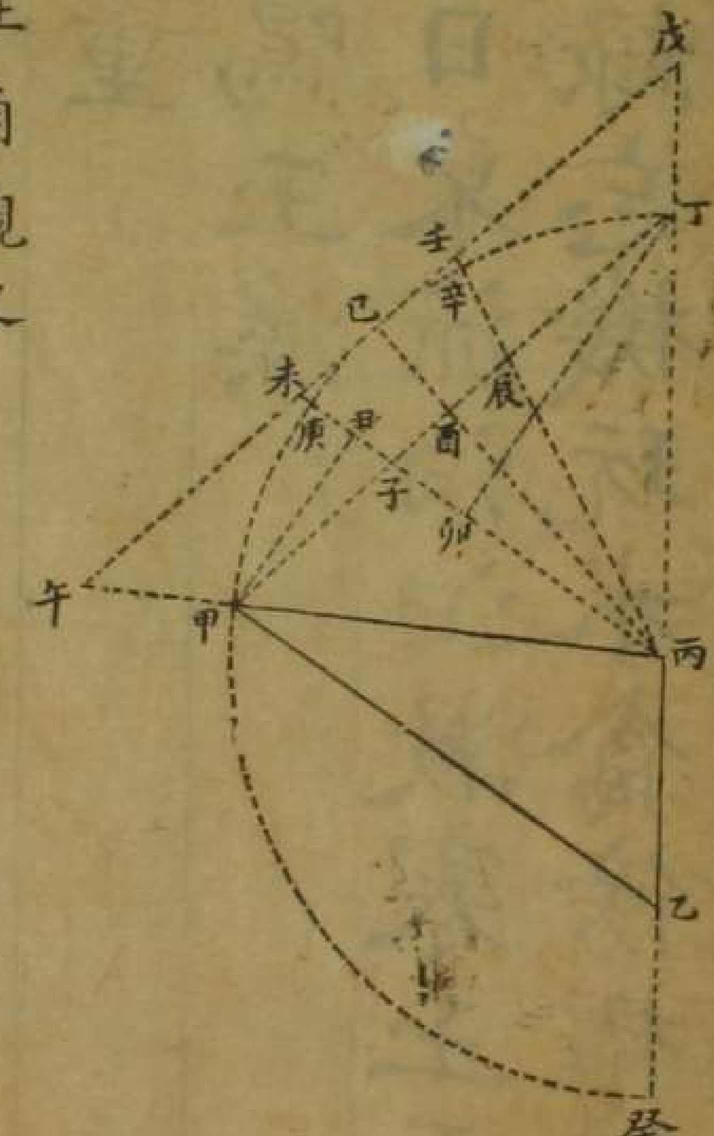
鈍角形用外角二



丙乙甲形。先有丙角。求餘角法爲邊總丁乙。與邊較乙癸。若半外角切線戊己。與半較角切線未己

此亦因所分爲鈍角。故卯丁正弦在形外。又大邊爲半徑。故乙癸較亦在形外。而丁乙爲和。餘並同前

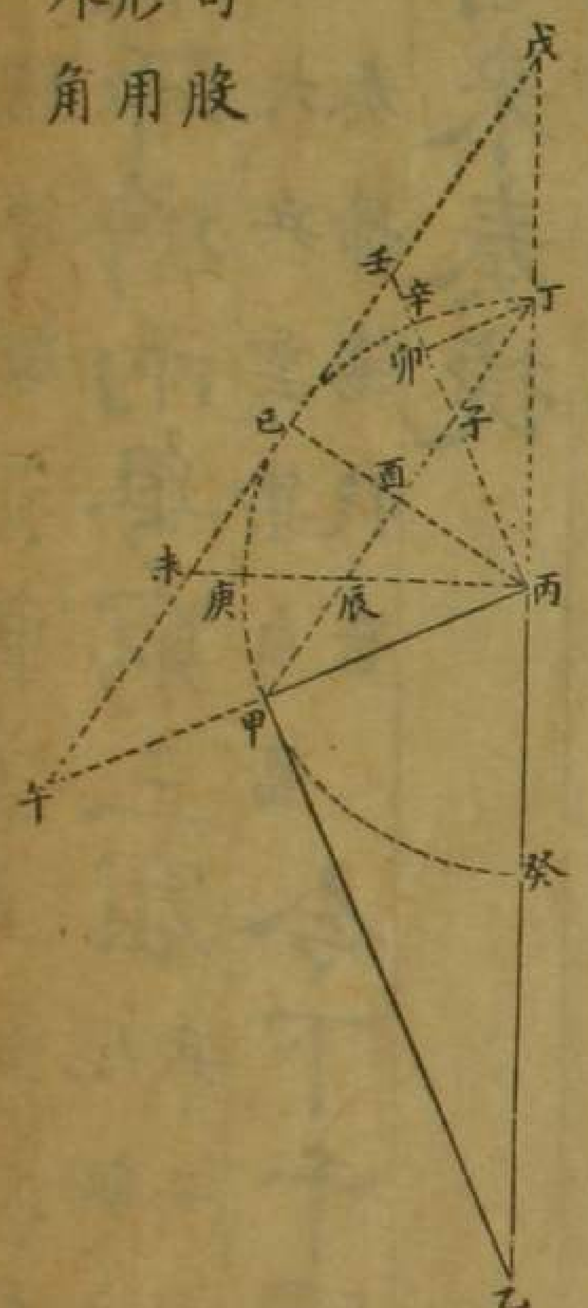
鈍角形用外角三



丙甲乙形。先有丙角。求餘角法爲邊總丁乙。與邊較乙癸。若半外角切線己戊。與半較角切線己壬。此因先得鈍角。故所分之內。反無鈍角。而正弦所作之小句股。並在外角之內。同銳角法矣

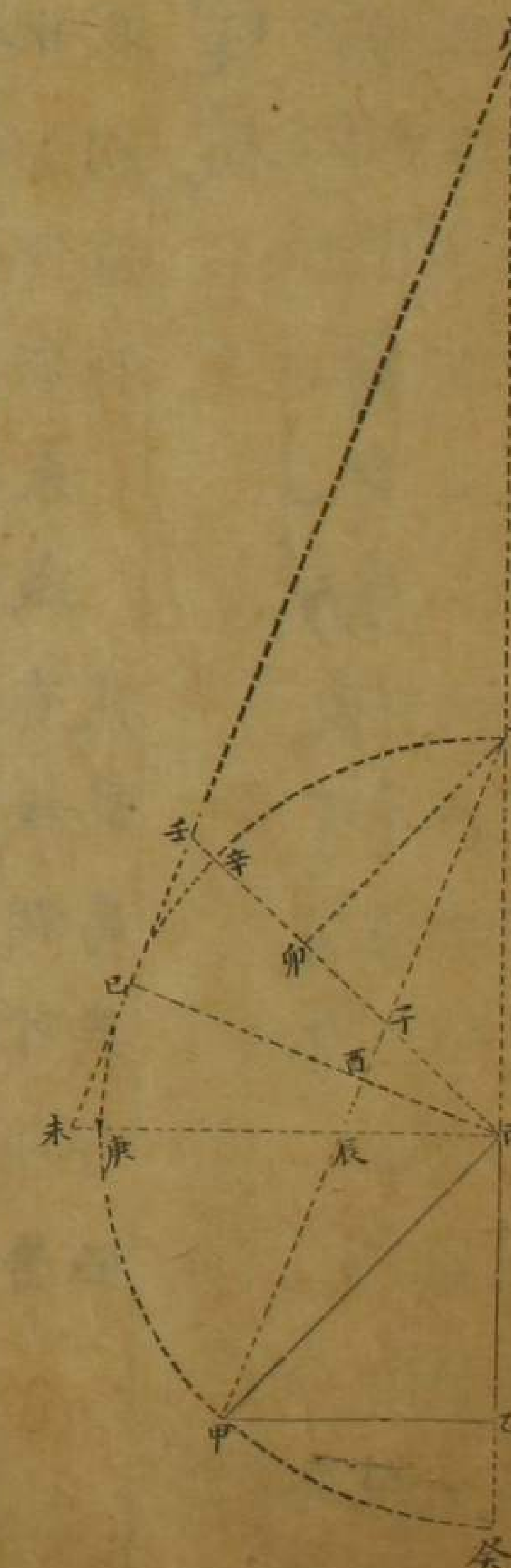
又以正角觀之

句股形用外角一



丙甲乙形。先得丙角。及丙甲句。乙丙弦。如法作丙壬線。與乙甲股平行。分外角爲兩。則句弦和丁乙。與句弦較癸乙。若半外角切線己戊。與半較角切線己壬。此以丙甲爲半徑。作外角弧。而即用丙甲爲正弦。知所得爲正角

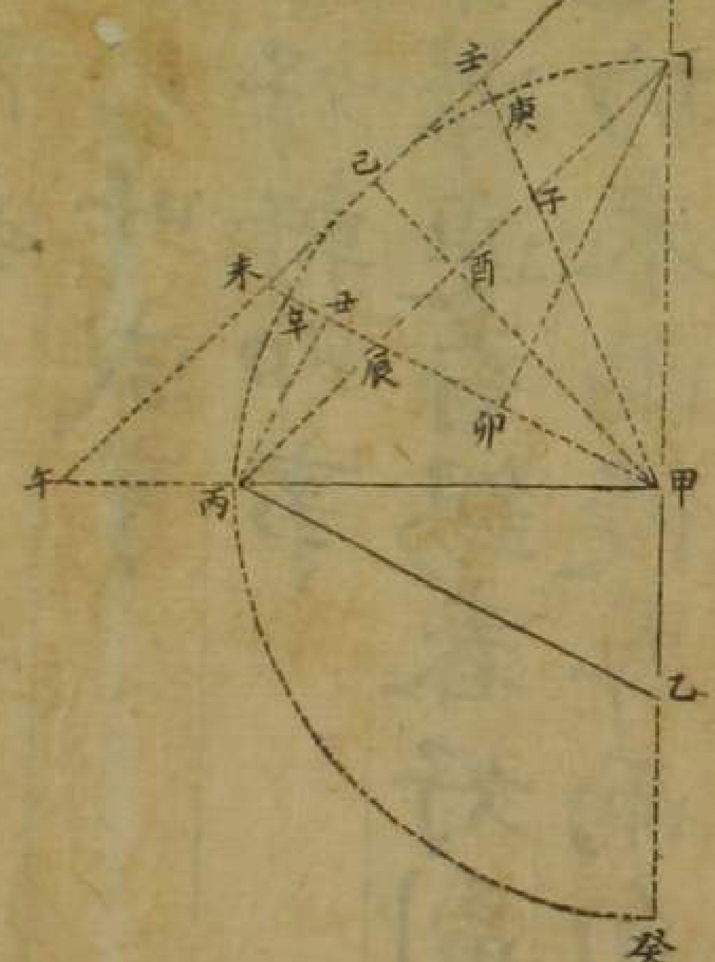
句股形用外角二



甲乙丙形。先得丙角。求餘角如法作丙庚線。與乙甲句平行。次截辛丁如庚甲。作辛丙線。分外角為兩。則小角之正弦卯丁。大角之正弦即丙甲。而成兩句股相似。為切線比例法為句弦和丁乙。與句弦較乙癸。若半外角切線已戊。與半較角切線已壬此以丙甲為半徑。作外角弧。而即用丙甲為正弦。知辛丙甲為正角。而丁辛同庚甲。即辛丙甲同丁丙庚。又即同丙乙甲。而乙為正角矣。以乙正角減外角。餘為甲角

論曰。右並以先不知其為句股形。故求之而得正角。凡正角之弧九十度。別無正弦。而即以半徑全數為正弦。得此明之

句股形用外角三



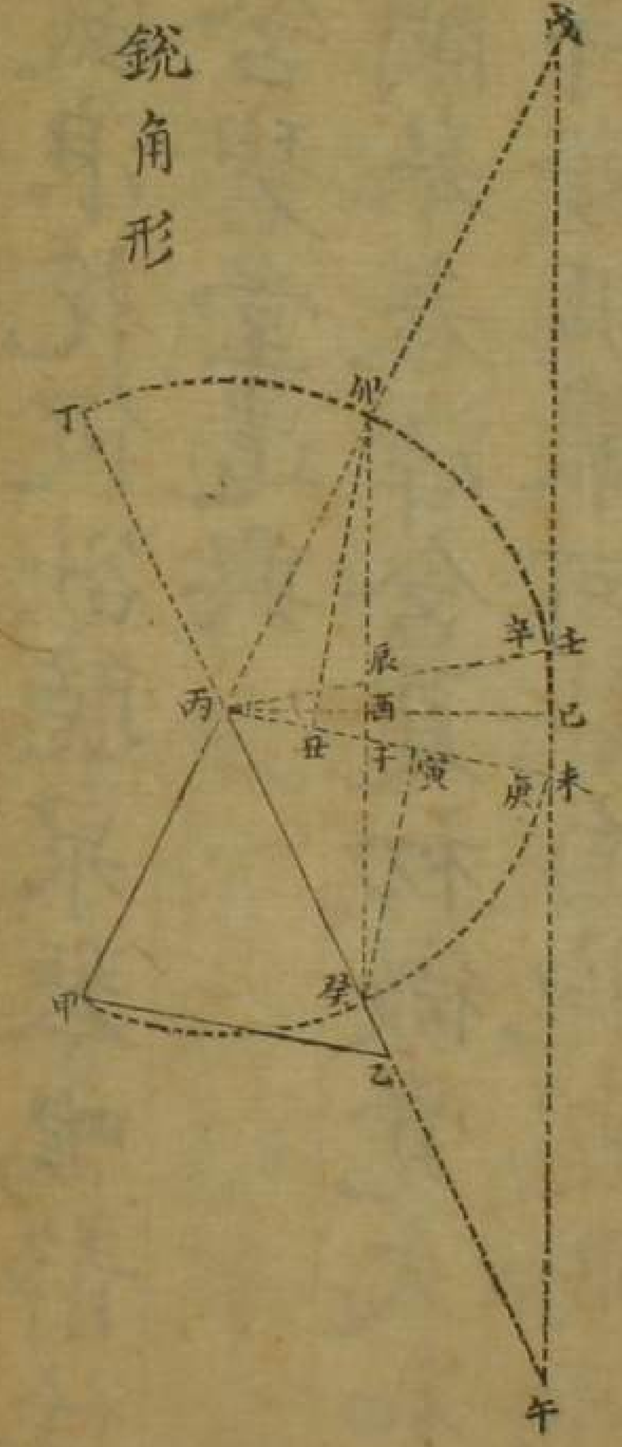
甲乙丙形。已有正角。求餘角法為句股和丁乙。與句股較癸乙。若半外角切線戊已。與半較角切線已壬

論曰。此因先得者為正角。故其外角亦九十度。而半外角四十五度之切線。即同半徑全數。餘並同前

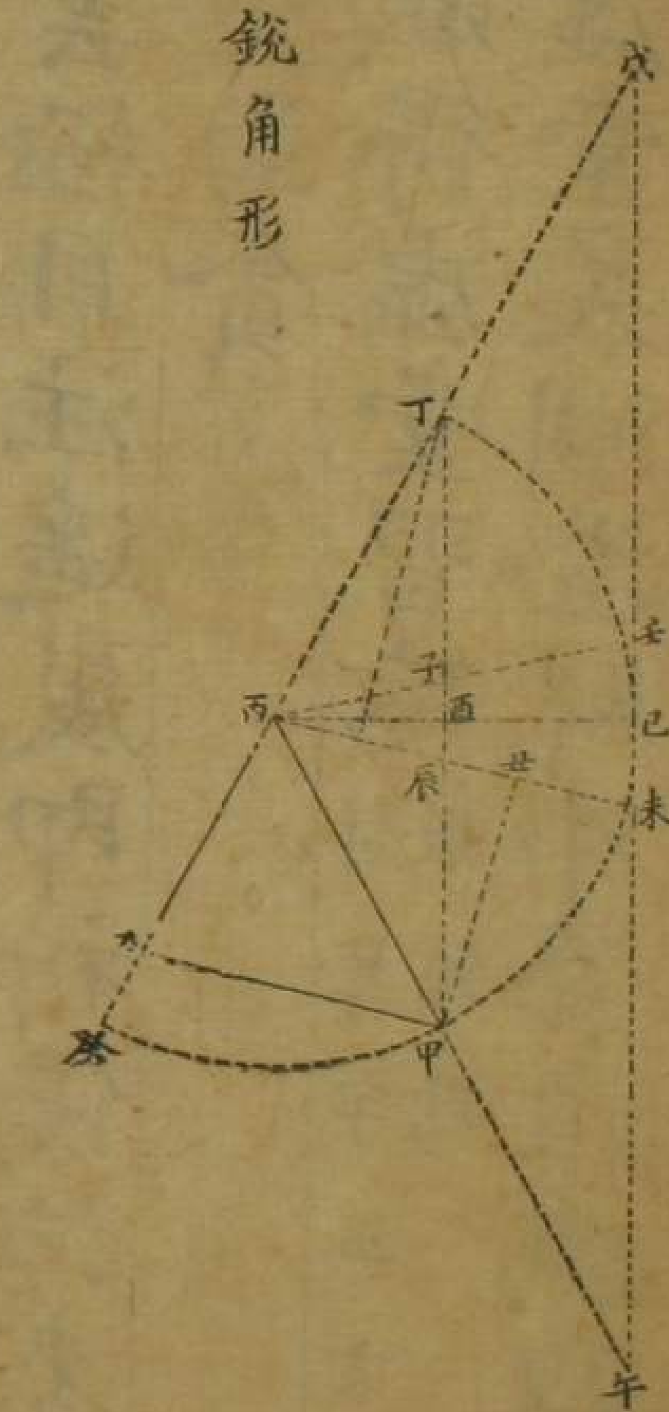
又論曰。句股形求角本易。不須外角。而外角之用。得此益明

又仍徵之鈍角以盡其變

鈍角形



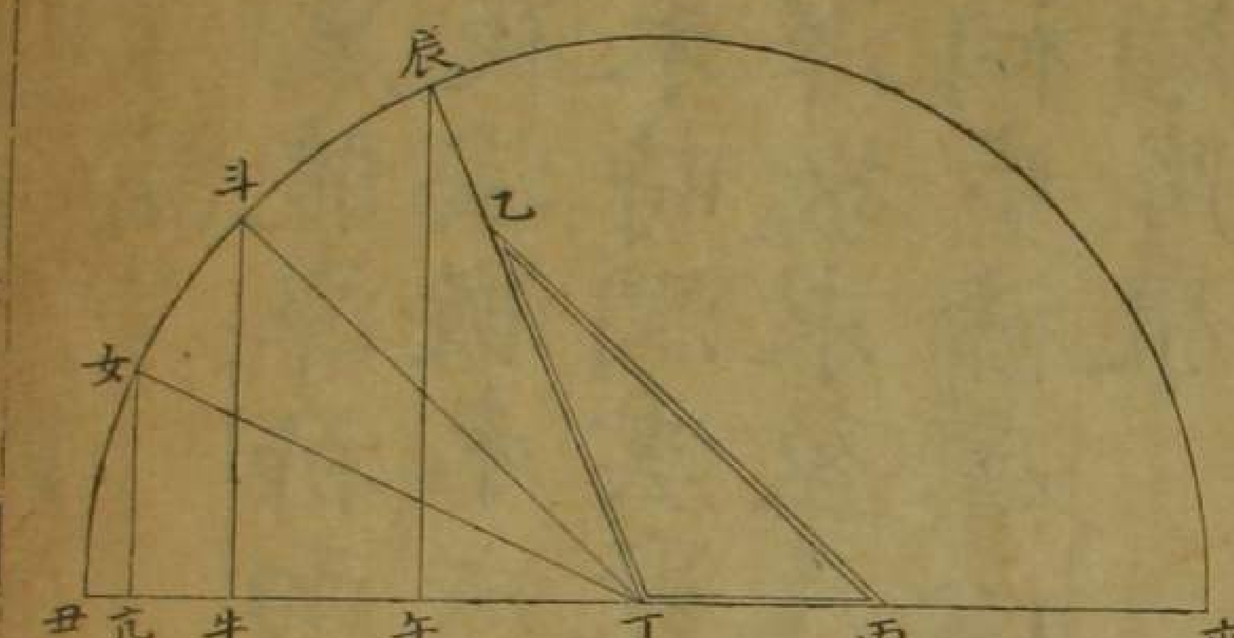
鈍角形



以大邊為半徑。作外角弧。分角線丙未。與次大邊平行　邊總乙丁。與邊較乙癸。若半外角切線戊己。與半較角切線壬已

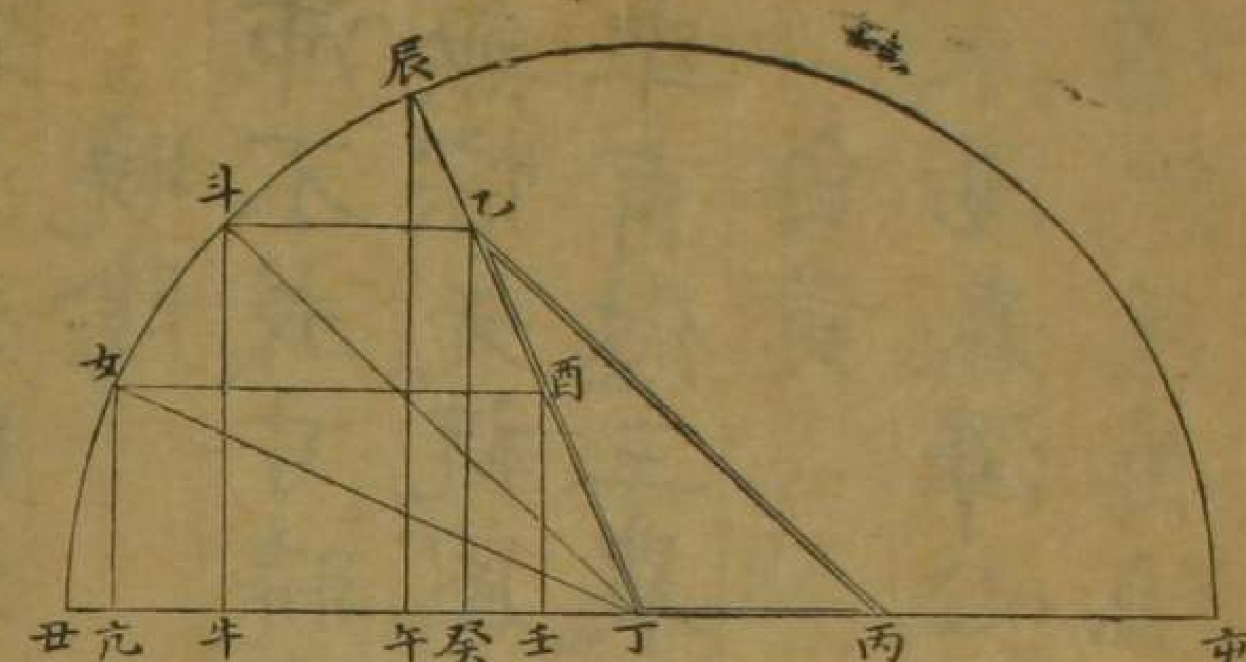
以次大邊為半徑。作外角弧。分角線丙未。與小邊乙甲平行。大邊總丁癸。與邊較乙癸。若半外角切線己戊。與半較角切線己壬

問平三角形。以一邊為半徑得三正弦比例。不識大邊亦可以為半徑乎。（小邊次邊為半徑。已具前條。故云）曰。可



如乙丙丁鈍角形。引乙丁至辰。如乙丙大邊。而用為半徑。以丁為心。作丑辰亥半弧。從辰作辰午。為丁鈍角正弦。又作丁斗半徑。與乙丙平行。則斗牛為丙角正弦。又截女丑弧如辰斗。作女丁半徑。則女亢為乙角正弦。合而觀之。丁角正弦（辰午）最大。故對邊乙丙亦大。丙角正弦（斗牛）居次。故對邊乙丁亦居次。乙角正弦（女亢）最小。故對邊丁丙亦小。

又問若此則三邊任用其一。皆可為半徑而取正弦。是已。然此乃同徑異角之比例也。若以三邊為弦。三正弦為股則同角異邊之比例也兩比例之根不同。何以相通曰。相通之理。自具圖中。乃正理。非旁證也。試於前圖。用乙丁次



邊為弦。其股乙癸。與斗牛平行而等。則丙角正弦也。又截酉丁。如丁丙小邊為弦。其股酉壬。與女亢平行而等。則乙角正弦也。又辰丁大邊為弦。即乙丙其股辰午。原為丁大角正弦也。于是三邊並為弦。三對角之正弦並為股。成同角相似之句股形。而比例皆等。可以相求矣

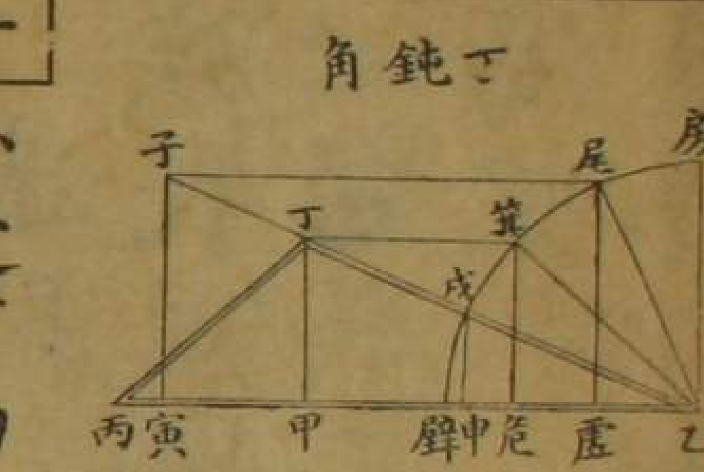
一	二	三	四
大邊乙丙即辰丁	丁角正弦辰午	次邊乙丁	丙角正弦乙癸
		小邊丁丙即酉丁	乙角正弦酉壬

此如先得大邊。乙丙即辰丁求餘二句股也。乙癸丁酉壬丁與所對大角。丁故用辰午丁大句股形為法。求餘二句股形相似。故法可相求。其實三正弦皆大邊為半徑所得。故其理相通。而法可相求者。故曰皆正理。非旁證也。

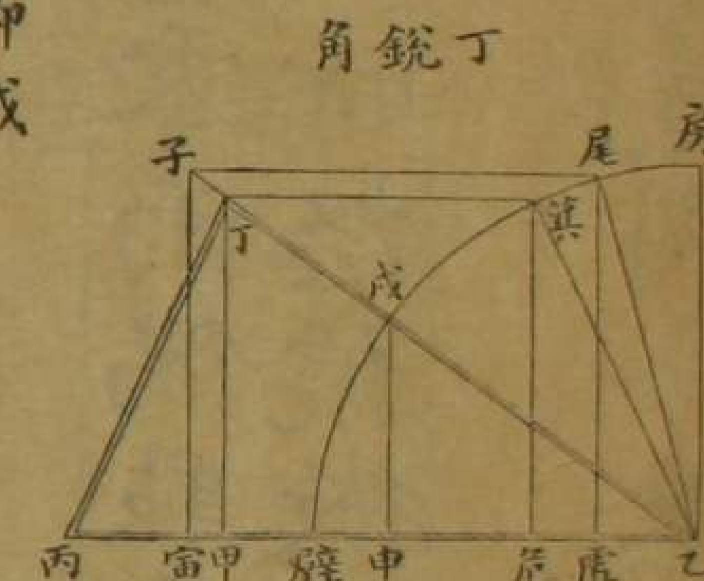
一	二	三	四
丁角正弦辰午	大邊乙丙	丙角正弦乙癸	次邊乙丁
		乙角正弦酉壬	小邊丁丙

又試于乙丙丁形。或鈍角。或銳角。同理以丁丙小邊為半徑。作房箕壁象弧。以乙為心如上法。取三正弦。以尾壁弧為丁角度。其正弦尾虛。又箕壁弧為丙角度。其正弦箕危。又戌壁弧為乙角度。其正弦戌申成同徑異角之比例。又如法用三邊為弦。三正

丁鈍角



丁銳角



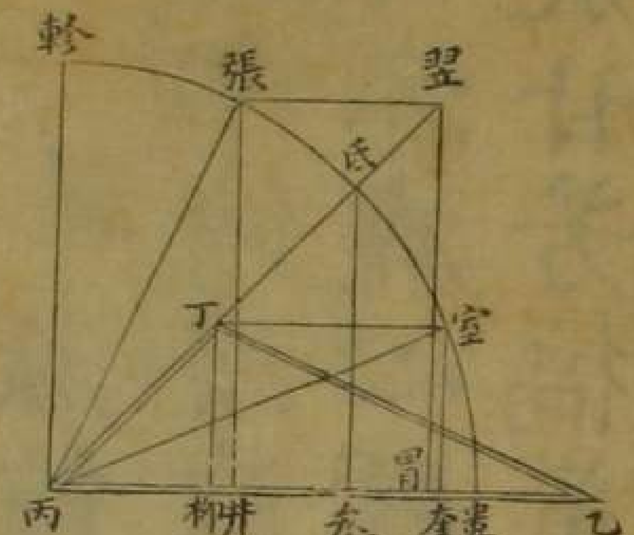
弦為股。（乙戊即丁丙小邊。配乙角正弦戊申。原如弦與股。又本形乙丁次邊為弦。則丁甲為股。與箕危平行而等。丙角正弦也。又引乙丁至子。成子乙。即乙丙大邊。以為弦。則子寅為股。與尾虛平行而等。丁角正弦也）則並為相似之句股形。而比例等

角求邊者則反用其率。（下同）

一　小邊丁丙（即戊乙）
二　乙角正弦　戊申
三　大邊乙丙（即子乙）　次邊丁乙
四　丁角正弦　子寅（即尾虛）　丙角正弦　丁甲（即箕危）

此如先得小邊。（丁丙）與所對小角。（乙）故以戊申乙小句股形為法。求兩大句股也。（丁甲乙。子寅乙。）皆同用乙角而形相似

又試以乙丁次邊為半徑。作象限如前。（以丙為心）取三正弦。（張婁為丁角弧度。張井其正弦。氐婁為丙角弧度。氐參其正弦。室婁為乙角弧度。室奎其正弦。）成同徑異角之比例。又仍用三邊為弦。三正弦為股。（引丁丙至翌。與大邊乙丙等。成翌丙弦。其股翌胃。與張井平行而等。丁角正弦也。又乙丁次邊成氐丙弦。其股氐參。原為丙角正弦。又丁丙小邊為弦。其股丁桺。與室奎平行而等。乙角正弦也）即復成相似之句股形。而比例等

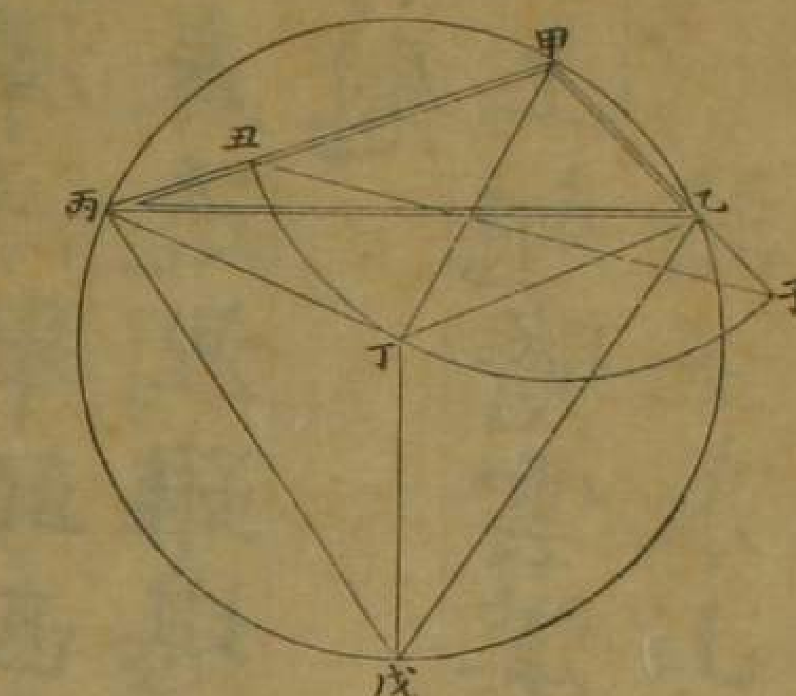


一　次邊乙丁（即氐丙）
二　丙角正弦　氐參
三　大邊乙丙（即翌丙）　小邊丁丙
四　丁角正弦　張井（即翌胃）　乙角正弦　丁桺（即室奎）

此如先得次邊。（乙丁）及所對丙角。故以氐參丙句股為法。求大小

二句股也。求翌冑丙。為以小求大。求丁柝丙。為以大求小。皆同用丙角而比例等

問負內三角形。以對弧為角倍度。設有鈍角小邊。何以取之。或問內原設鈍角。兩邊並大于半徑。故云曰。法當引小邊。截大邊。



作角之通弦。如圖。乙甲丙鈍角形在平負內。以各角切負。而乙甲邊小于半徑。則引乙甲出負周之外。乃以甲角為心。平負心丁為界。作子丁丑弧。截引長邊于子。截大邊于丑。則丑甲子甲並半徑。與丁甲等。而丑子為通弦又平分對邊。作兩通弦。從負心作丁乙丁丙兩半徑。截乙戊丙負周。為甲角對邊所乘之弧。而半之于戊。作乙戊丙戊二線。成兩通弦則此兩通弦自相等。又並與丑子通弦等。夫子丁丑弧。甲角之本度也。丙戊弧。乙戊弧。皆對弧之半度也。而今乃相等。通弦等者弧度亦等是甲角之度。適得對弧乙戊丙之半。而乙戊丙對弧。為甲角之倍度矣