

Faint, illegible markings within a blue rectangular border on the left page, possibly bleed-through from the reverse side.

1113 - 1114

三角法舉要卷三

內容外切 三角測量之用。在邊與角。而其內

內容有二。曰本形。曰他形。

一三角求積

積謂之冪。亦謂之面。乃本形所有

一三角容負

一三角容方

以上皆形內所容之他形

外切惟一

一三角形外切之負



三角求積第一術
底與高相乘。折半見積

內分二支

一 句股形。即以句股為底為高

一 銳角鈍角形。任以一邊為底。而求其垂線為高

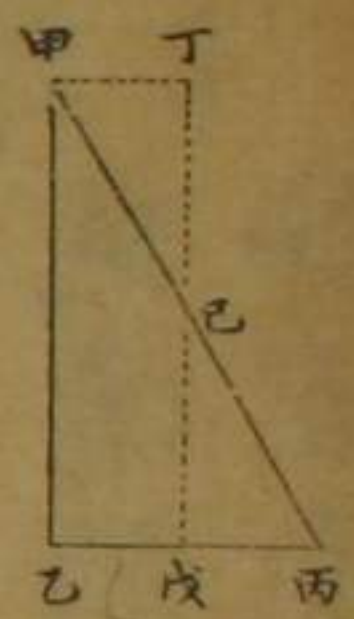
假如句股形。甲乙股 十尺 一百二 乙丙句 三十 五尺 求積

術以甲乙股乙丙句相乘。 四百二十 折半得積 二百一十

凡求得句股形積。二千一百尺

如圖。甲乙股與乙丙句相乘。成甲乙丙丁長方形。其形半實半虛。故折半見積





或以句折半。尺十七乘股。亦得積。二千一百尺
 如圖。乙丙句折半於戊。以乙戊乘甲乙。成甲
 乙戊丁形。是移丙成己。補甲丁己也。



或以股折半。尺六十乘句。亦得積。二千一百尺
 如圖。甲乙股折半於己。以己乙乘乙丙。成己
 乙丙丁形。是移甲己戊。補戊丁丙也。

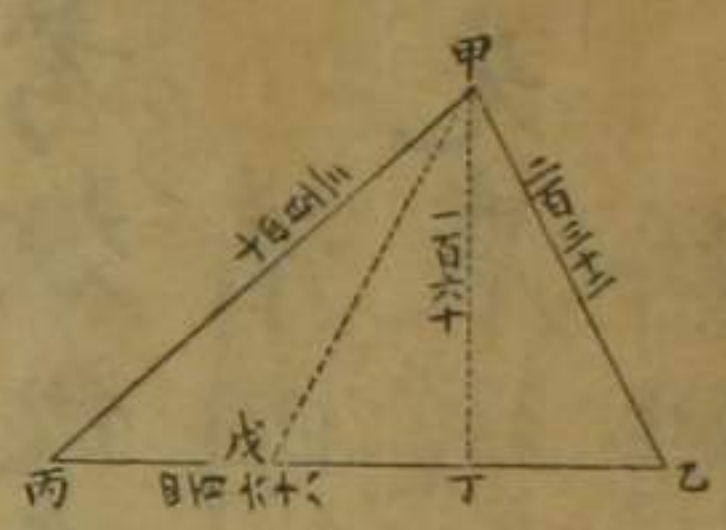
右句股形。以句為底。以股為高。若以股為底。則句又為高。可
 互用也。

句股形。有立有平。若平地句股。以句為闊。以股為長。其理無

二

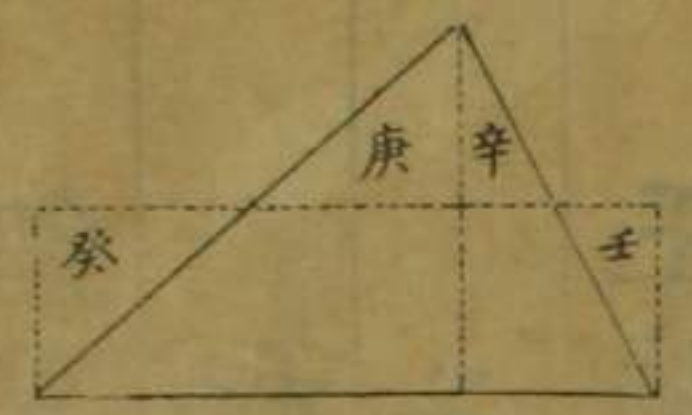
論曰。凡求平積。皆謂之冪。其形如網目。又似窗櫺之空。皆以橫
 直相交如十字。亦如機杼之有經緯而成布帛。故句股是其正
 法。何也。句股者。方形斜剖之半也。折半則成正剖之半方形矣。
 其他銳角鈍角。或有直無橫。有橫無直。必以法求之。使成句股。
 然後可算。故句股者。三角法所依以立也。

積
 假如銳角形。甲乙邊。二百三十三尺。甲丙邊。三百四十二尺。乙丙邊。四百六十八尺。求

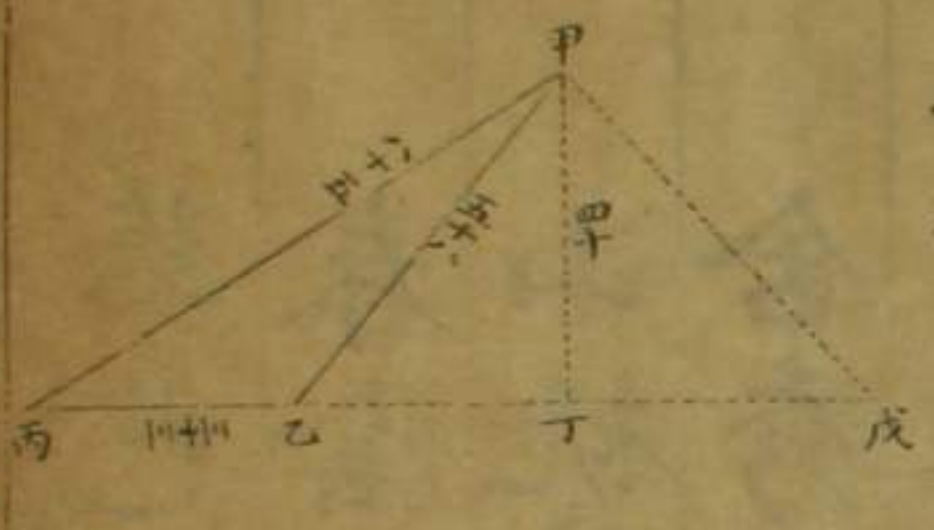


術先求垂線。用銳角第三術。任以乙丙邊為底。以甲丙甲乙為兩弦。兩弦之較數。一百。總數。五百七相乘。六萬一千七百七。為實。以乙丙底為法。除之。得數。一百三十七。轉減乙丙。餘數。三十六。得乙丁。一百六十八。依句股法。以乙丁自乘。二千八百四。與甲乙自乘。五萬三千八百。相減。餘數。二萬九千。得甲丁垂線。一百一十六。以甲丁垂線折半。乘乙丙

底得積。六百平方開之。得甲丁垂線。一百一十六。以甲丁垂線折半。乘乙丙。凡求得銳角形積。三萬七千四百四十尺。



如圖。移辛補壬。移庚補癸。則成長方形。即垂線折半乘底之積。右銳角形。任以乙丙邊為底。取垂線求積。若改用甲乙或甲丙邊為底。則所得垂線不同。而得積無異。故可以任用為底。



假如鈍角形。甲乙邊。八十五步。甲丙邊。八十五步。乙丙邊。三十三步。求積。術求垂線立於形外。用鈍角第三術。以乙丙為底。甲乙甲丙為兩弦。總數。一百四。較數。七。相乘。一千一百六。為實。乙丙底為法。除之。得數。十七。內減。十一。餘數。六。折半。為乙丁。三。引長。依句股法。乙丁自乘。九。甲乙自乘。七千三百。相減。得甲丁垂線。一百一十四步。

三角求積第二術

以中垂線乘半周得積。謂之以量代算。

假如鈍角形。乙丙邊。五十步。甲乙邊。一百一十七步。甲丙邊。八十步。求積。

術。平分甲乙兩角。各作線會於心。從心作十

字垂線至乙甲邊。即中垂線也。乃量取

中垂線。得數。八步。合計三邊而半之。一百

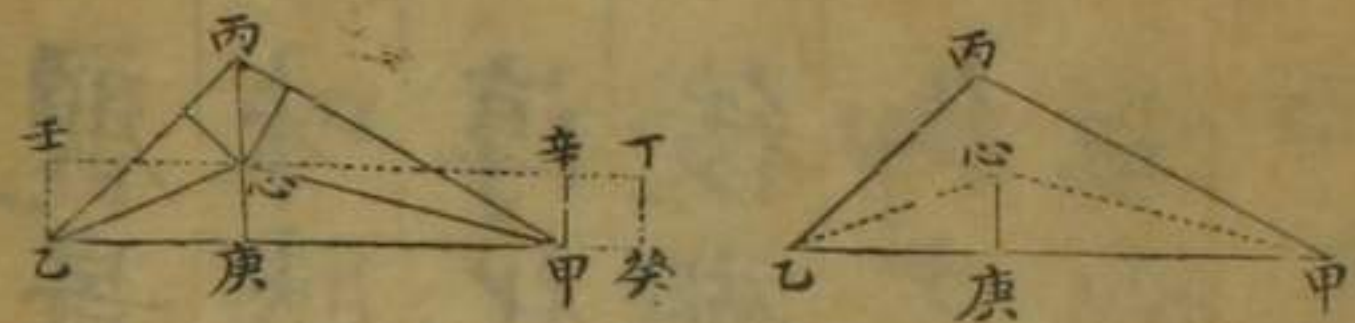
步。為半周。以半周乘中垂線。得積。

凡求得鈍角形積。二千三百四十步。

又術。如前取中垂線。為闊。半周為長。如乙

丁別作一長方形。如乙壬。即與丙乙。鈍角形

等積。



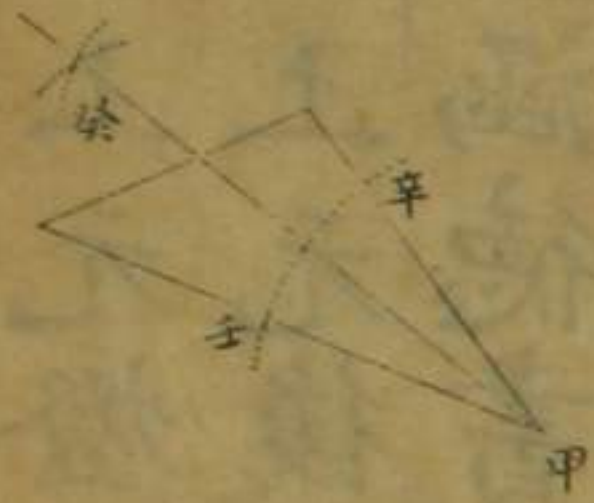
解曰。凡自形心作垂線至各邊皆等。故中垂線乘半周。為一切有法之形所公用。方負及五等面六等面至十等面以上並同。故以中垂線為闊。半周為長。其所作長方形。即與三角形等積。又解曰。中垂線至邊。皆十字正方形。即分各邊成句股形。以乘半周得積。即句股相乘折半之理。

附分角術。有甲角。欲平分之。

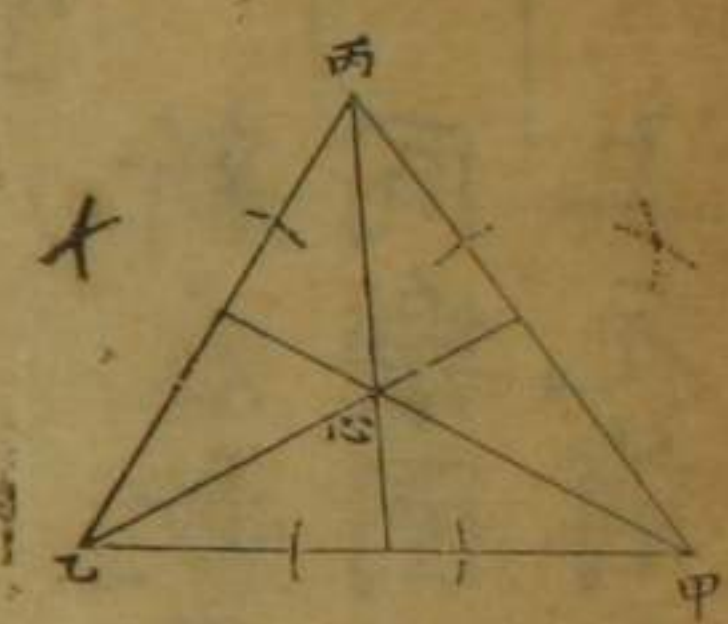
術。以甲角為心。作虛半規。截角旁兩線。得辛

壬二點。乃自辛自壬各用為心。作弧線相遇

于癸。作癸甲線。即分此角為兩平分。



三角求心術



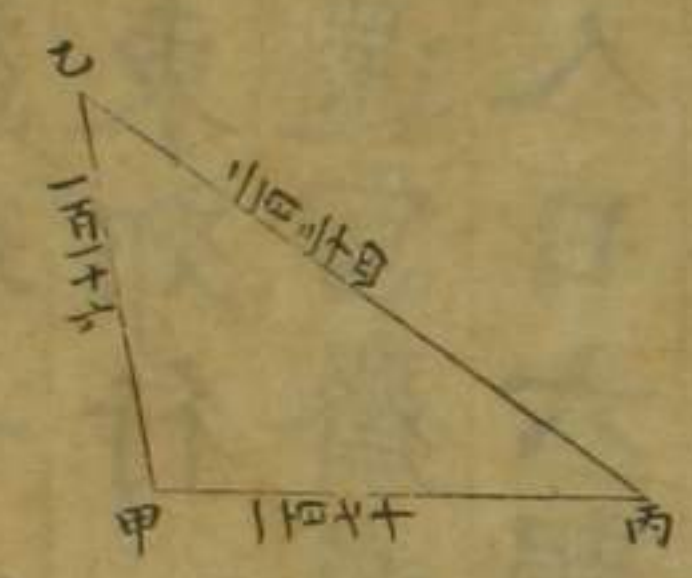
如上分角術。於甲角平分之。於乙角又平分之。兩平分之線。必相遇成一點。此一點即三角形之心。
 解曰。試再於丙角如上法分之。則亦必相遇於原點。

三角求積第三術

以三較連乘。又乘半總。開方見積。

積

假如鈍角形。甲乙邊。一百一十六尺。甲丙邊。一百一十七尺。乙丙邊。二百一十四尺。求積。



術合計三邊而半之。二百一十六為半總。以與甲乙邊相減。得較。十四尺。與甲丙邊相減。得較。二尺。三較連乘。以較相乘得數。又以得數。三十三萬六千。以餘一較乘之也。得數。九百六十六。以半總乘之。得數。九千七百六十六。平方開之。得積。

凡求得鈍角形積。九千三百六十尺。

若係銳角同法
 解曰。此亦中垂線乘半周之理。但所得為冪乘冪之數。故開方見積。詳或問

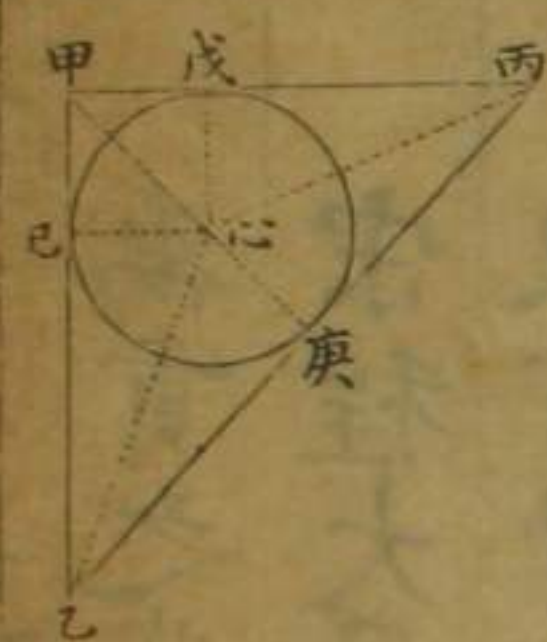
三角容負第一術

以弦與句股求容負徑此術惟句股形有之。凡句股相併為和。以和與弦併為弦和。以和與弦相減為弦和較。

假如甲乙丙句股形。甲丙句。二十步。乙甲股。二十步。乙丙弦。二十步。求容負徑。

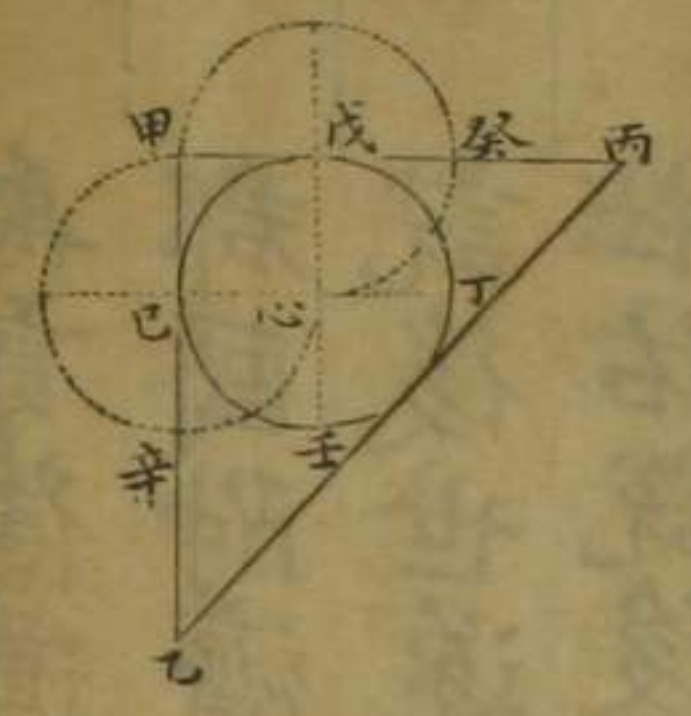
術以句股和四步與弦相減。得數為容負徑。凡求得內容負徑。一十二步。

解曰。此以弦和較為容負徑。



如圖。從容負心作半徑至邊。又作分角線至角。成六小句股形。則各角旁之兩線相等。如角丙。庚兩線。在丙角旁。則相等。乙庚乙已在乙角旁。甲戊甲已在甲角旁。並兩線相等。

其在正方形旁者。甲戊乃弦和較也。於乙丙弦內分丙庚以對
則其餘為甲戊及甲己。此即句股和與乙丙弦相較之數也。然即為內容負徑何也。各角旁
 兩線並自相等。而正方形旁之兩線。又皆與容負半徑等。正角
兩小形之角。皆平分方角之半。則句股然則弦和較者。正角
自相等。而甲戊等心戊甲己等心己旁兩線甲己之合。即容負兩半徑心己之合也。故弦和較即容
 負徑也。



試以甲戊為半徑作負。則戊心亦半徑。而
 其全徑甲戊與容負徑丁心等。以甲己為
 半徑作負。則己心亦半徑。而其全徑甲辛
 與容負徑壬心亦等。

三角容負第二術

以周與積求容負徑

內分二支

一 句股形。以弦和為用。亦可

一 銳角鈍角形。以全周半周為用。

假如 甲乙丙 句股形。甲丙句。十六步 甲乙股。三十步 乙丙弦。三十步 求

容負徑

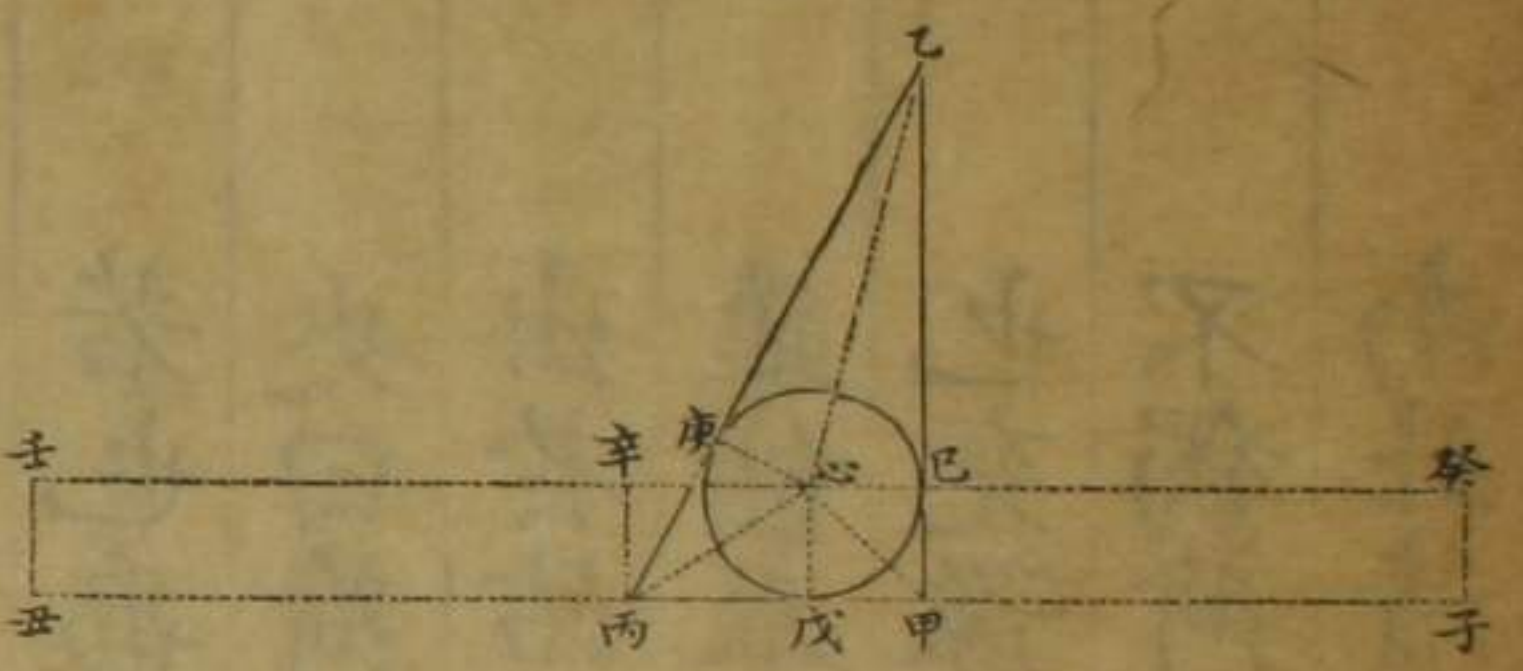
術以句股相乘得數四百八為實。併句股弦數共八十步為法。除之。

得數倍之。為容負徑

凡求得容負徑。一十二步

解曰。此以弦和和除句股倍積。得容負半徑也。

闊即為乙心
丙形之倍
求積故以弦和除句股相乘積得容負半徑

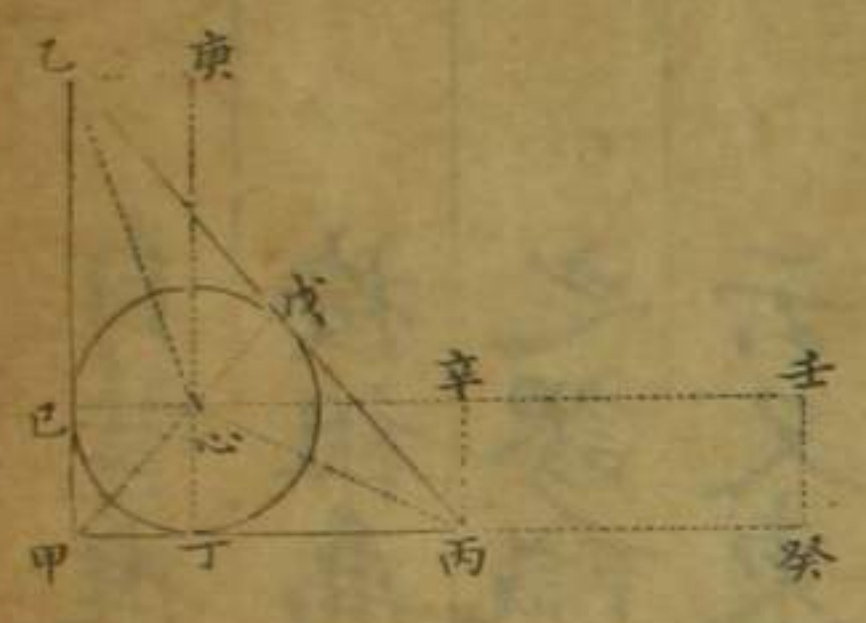


如圖從容負心作對角線分其形為三
一甲心乙乃於甲丙句線兩端各引長之截
子甲如乙甲股截丙丑如丙乙弦則子丑線
即弦和和也乃自負心作癸壬直線與丑子
平行兩端各聯之成長方又作辛丙線分為
三長方形其闊並如負半徑其長各如句如
股如弦而各為所分三小形之倍積
丙句之長而以心戊半徑為闊即為甲心丙
分形之倍甲癸長方如乙甲股之長而以同
心己之半徑為闊即為乙心甲股之長而以
長方如丙乙弦之長而以同心庚之半徑為
即為本形倍積與句股相乘同也為倍積見

假如甲乙丙句股形甲丙句八尺甲乙股一百乙丙弦三十

術以句股相乘而半之得積二千六百為實併句股弦數而半
之十五尺為法除之得數倍之為容負半徑

凡求得內容負徑五十六尺
解曰此以半周除句股形積而得容負半徑也



如圖從容負心分本形為六小句股則同角之
句股各相等可以合之而各成小方形同甲角
股成丁己小方形同丙角之兩句股可合之成
丁辛長方形以心辛丙兩形等丙戊心也同乙角
之兩句股可合之成己庚長方形乃移己庚長
形以乙庚心形等心戊乙也
為辛癸長方形則癸甲即同半周而癸己大長

即為半周乘半徑。而與句股積等也。六小形之句皆原形之周。變為長方。則兩兩相得。而各用其半。是半周也。癸甲及壬己之長。並半周。壬癸及己甲辛丙之闊。並同心丁。是半周乘半徑也。辛癸長方。與己庚等積。即與乙角旁兩句股等積。又丁辛長方。與丙角旁兩句股等積。即等積。再加丁己形。即與原設乙甲丙句股形等積矣。然則以句股相乘而半之者。句股形積也。故以半周除之。即容負半徑矣。

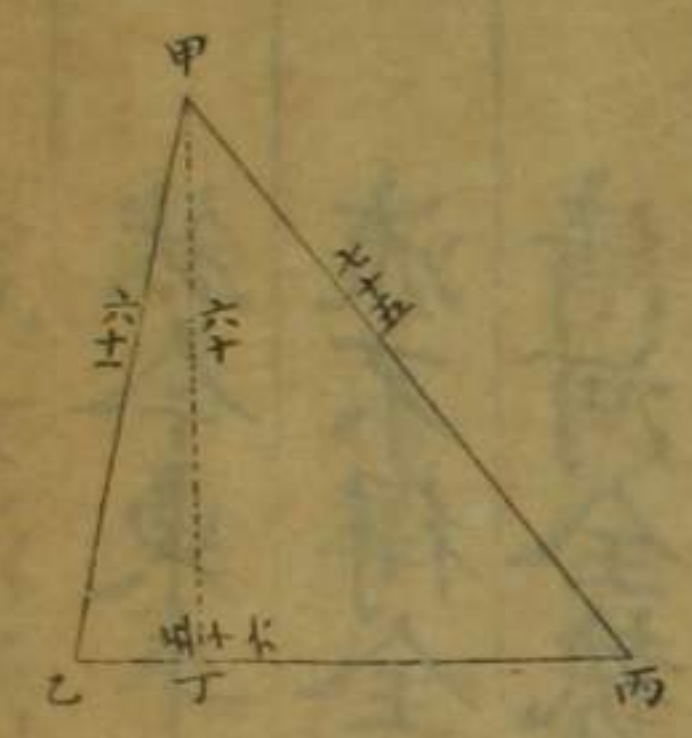
或以弦和和除四倍積。得容負全徑。並同前論

論曰。句股形。古法以弦和較為容負徑。與弦和和互相乘除。乃至精之理。測負海鏡引伸其例。以為測望之用。其變甚多。三角容負。蓋從此出。故為第一支。

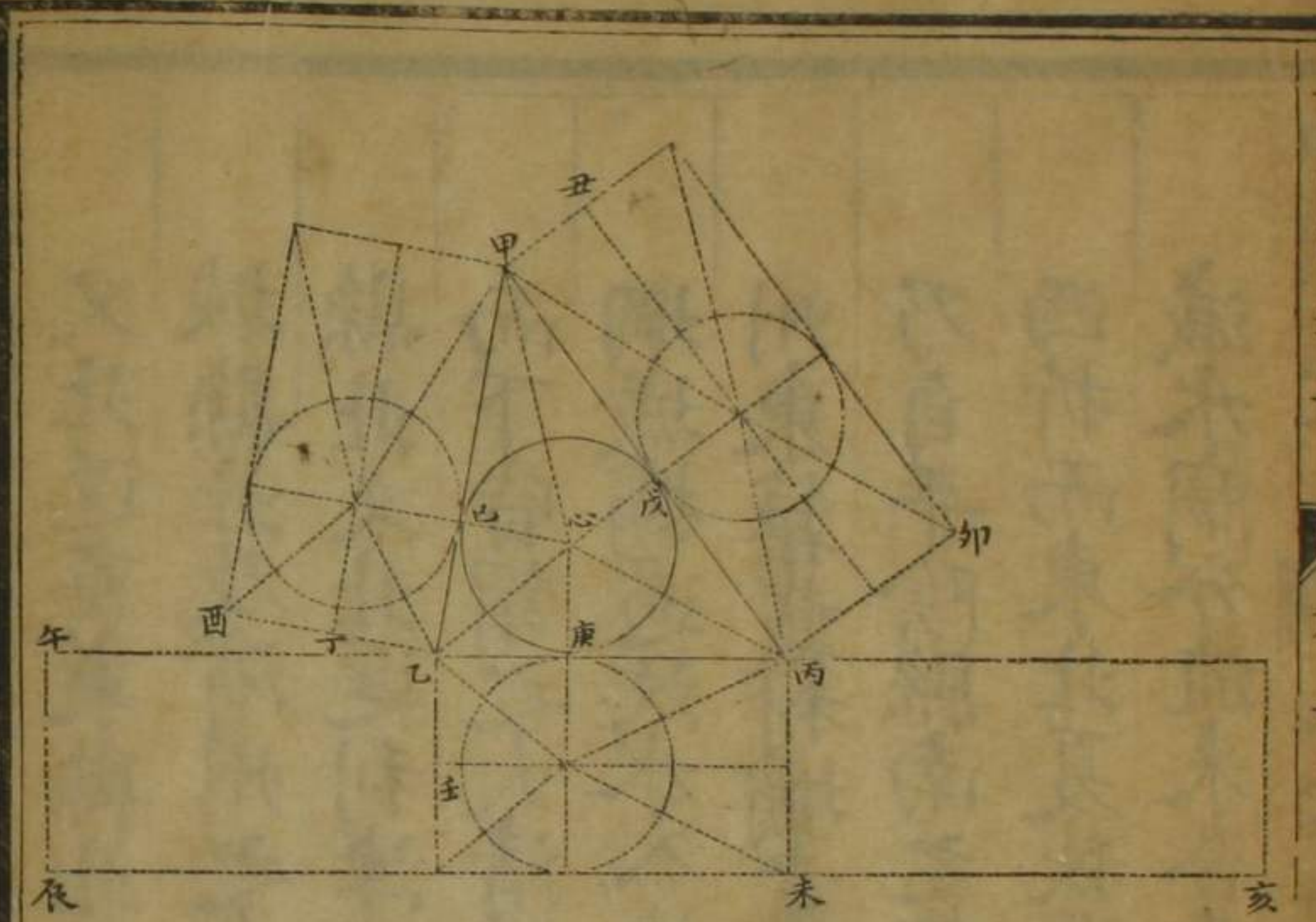
假如甲乙丙 銳角形。乙丙邊。六尺。甲丙邊。七尺。甲乙邊。六尺。求

容負徑 術以乙丙邊為底。求得甲丁中長線。六十尺。法見求積。以乘底。得數千三百六。倍之。六十七百。為實。合計三邊。共一百九。為法除之。得容負徑。

凡求得內容負徑。三十五尺



解曰。此以全周除四倍積。得容負徑也。



如圖自容負心作對角線分為
 小三角形三各以負半徑為高
 各邊為底若於各邊作長方而
 各以邊為長半徑為闊必倍大
 於各小三角形如壬丙長方倍
 於丙長方倍大於甲乙形又
 甲丁長方倍大於甲乙形又
 作加一倍之長方則四倍大於
 各小三角如未乙長方倍大於
 丙心乙三角則卯甲亦四倍於
 丙心甲而甲酉亦四倍於甲心
 乙於是而通為一大長方移卯
 方為夾丙移甲酉為乙辰必四
 則前夾午大長方形矣必四

倍原形之冪而以三邊合數為長以容負之徑為闊然則以中
 長線乘底而倍之者正為積之四倍也以三邊除之豈不即得
 負徑乎

或以全周除倍積得容負半徑
 或以半周除積得容負半徑並同

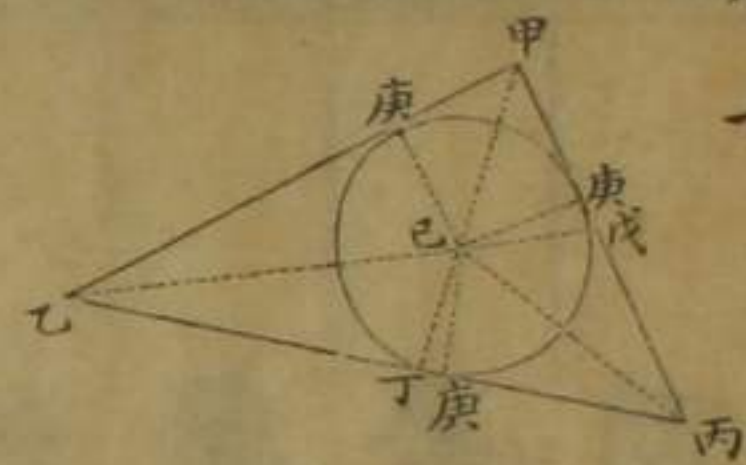
若鈍角形亦同上法

論曰銳角鈍角並以周為法此與句股形用弦和和同但必先
 求中長線故為第二支

三角容負第三術

以中垂線為負半徑。曰以量代算

假如 甲乙丙 三角形。求容負徑。既不用算。故不言邊角之數。



如求積術。均分甲乙二角之度。各作虛線交於己。即己為容負之心。次以己為心。儘一邊為界。運規作負。此負界必切三邊。

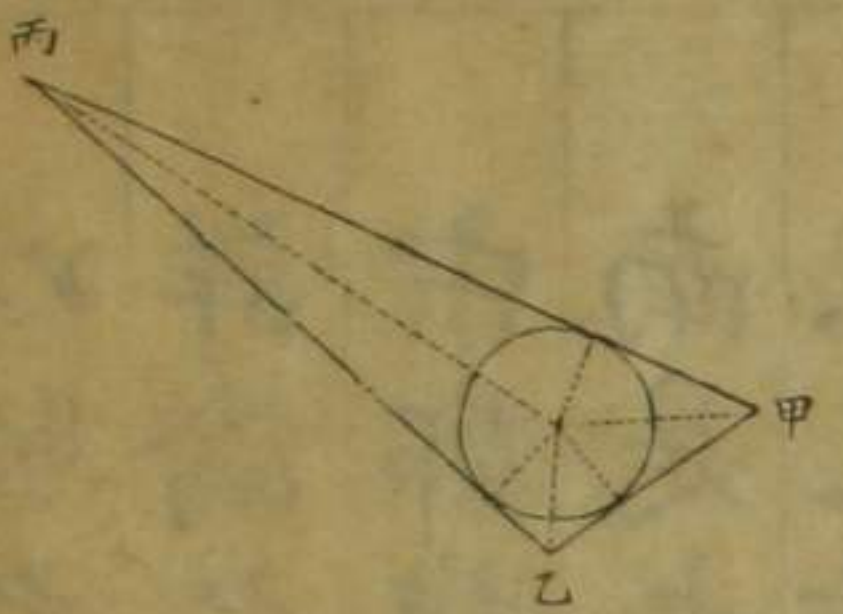
於是從己心向三邊各作十字垂線。必俱在切負之點而等。為負半徑。知半徑。知全徑矣。半徑各如已庚線。論曰。此容負心。即三角形之心。故以容負半徑乘半總。即得積也。又案此術。亦向股及銳鈍兩角通用。

三角容負第四術

用三較連乘

假如 甲乙丙 鈍角形。乙丙邊。四十二尺。甲丙邊。五百尺。甲乙邊。一百四十尺。

求容負徑



術以半總。五十四尺。求得乙丙邊較。八尺。甲丙邊較。四十二尺。乙甲邊較。三百九十二尺。三較連乘得數。一百一十二尺。以半總除之。得數。三十六尺。因之。為實。平方開之。得容負徑。一百一十二尺。

銳角同法

解曰。此所得者。為容負徑上之自乘方冪。故開方得徑。

三角容方第一術
合底與高除倍積得容方徑
內分二支
一 句股形。即以句股為底為高。即句股和也。其容方依正角。
一 三角形以一邊為底。求其垂線為高。句股形以弦為底。銳角形三邊皆可為底。鈍角形以大邊為底。其容方並依為底之邊。
假如 甲乙丙 句股形。甲丙股。三十一尺。乙丙句。一十八尺。求容方。依正角。而以容方之一角切於弦。術以句股相乘得數。六百四十八尺。為實。以句股和。五十四尺。為法。除之。得所求。求到內容方徑。一十二尺。

三角容方第一術

合底與高除倍積得容方徑

內分二支

一 句股形。即以句股為底為高。即句股和也。其容方依正角。

一 三角形以一邊為底。求其垂線為高。句股形以弦為底。銳角形三邊皆可為底。鈍角形以大邊為底。其容方並依為底之邊。

假如 甲乙丙 句股形。甲丙股。三十一尺。乙丙句。一十八尺。求容方。依正角。

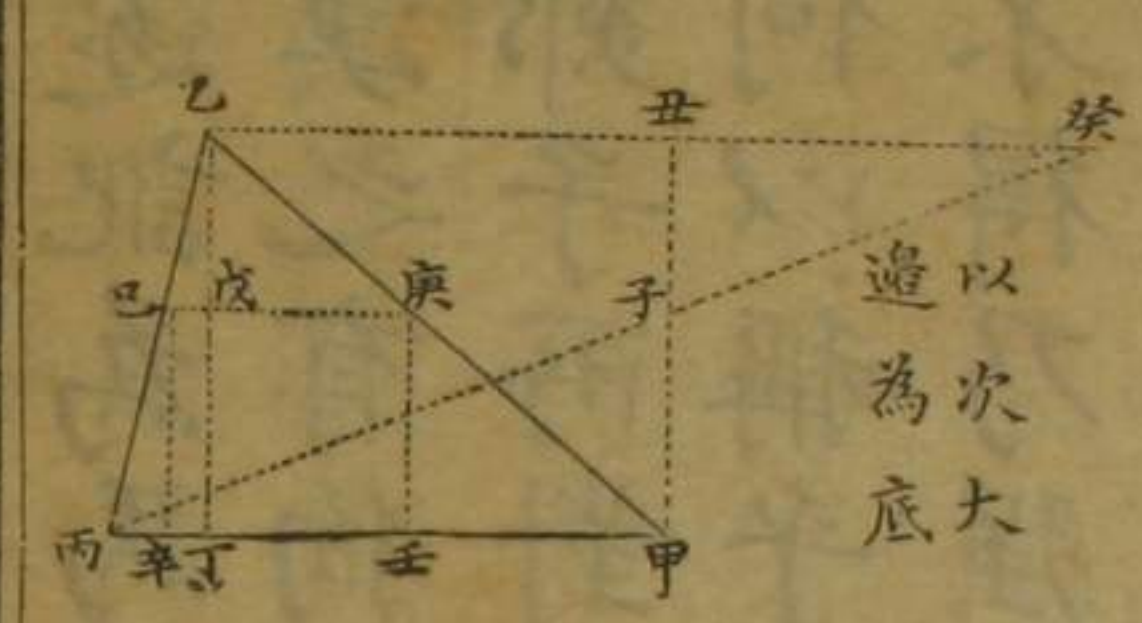
角。而以容方之一角切於弦。

術以句股相乘得數。六百四十八尺。為實。以句股和。五十四尺。為法。除之。得

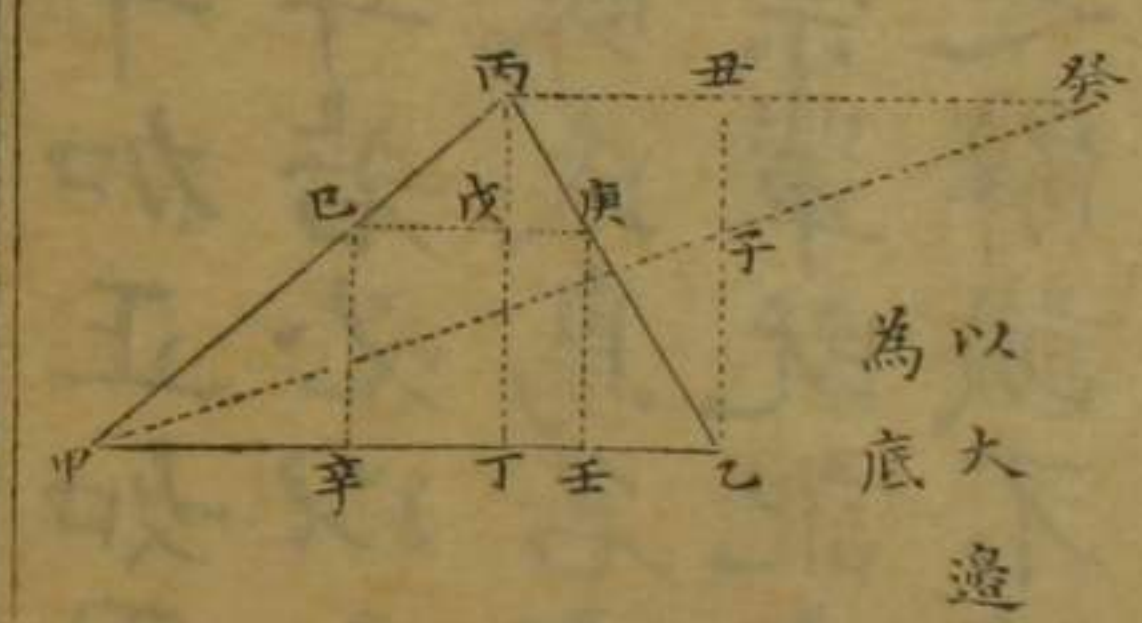
所求

求到內容方徑。一十二尺。

戊即戊丁為容方之徑。從戊作己庚。又從己作線至辛。從庚作線至壬。即所求容方。解曰。甲戊與戊丁。若甲丁與乙丙。子乙句。若丑癸股與乙丙股。而丑子原與甲戊等。子乙句與戊丁等。丑癸與甲丁等。則甲戊與戊丁。亦若甲丁與乙丙。又甲戊與己庚。若甲丁與乙丙。似。則甲戊與己庚。若甲丁與乙丙。必相合。兩比例觀之。則甲戊與戊丁。若甲戊與己庚。而已庚即戊丁。



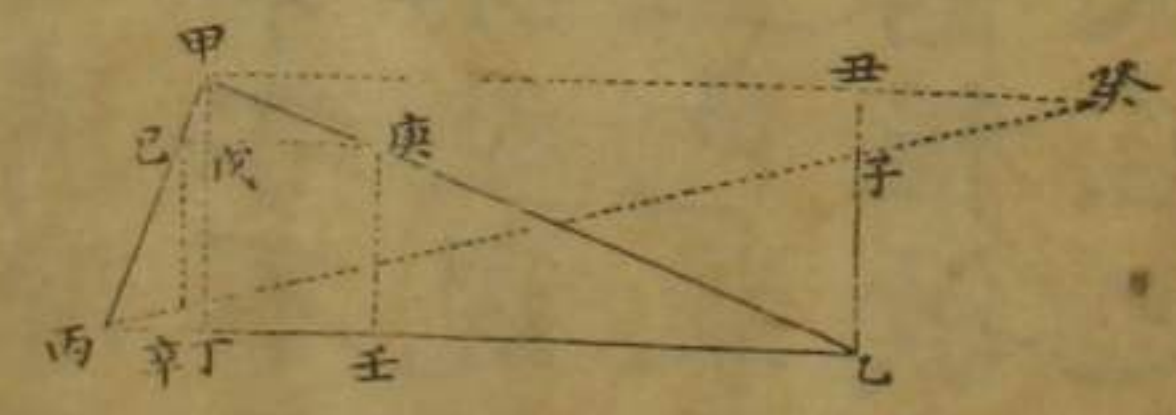
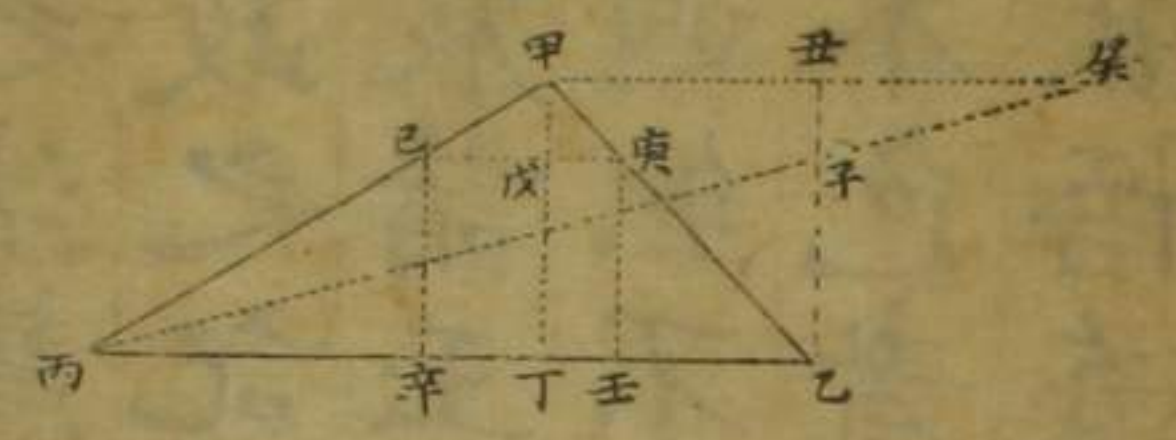
以次大邊為底



以大大邊為底

以上並銳角形。凡銳角三邊並可為底。而皆一法。

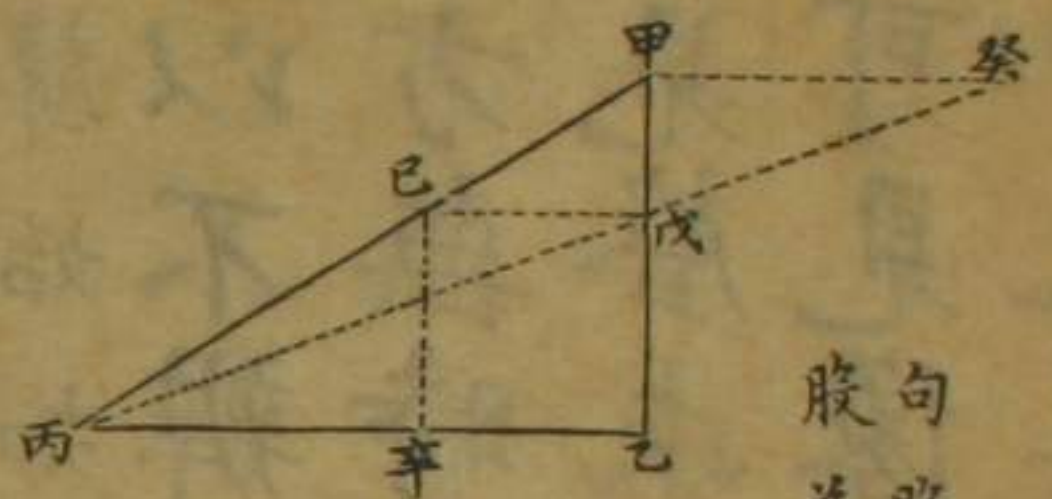
假如鈍角形求容方。則惟有大邊可為底。法同。銳角。



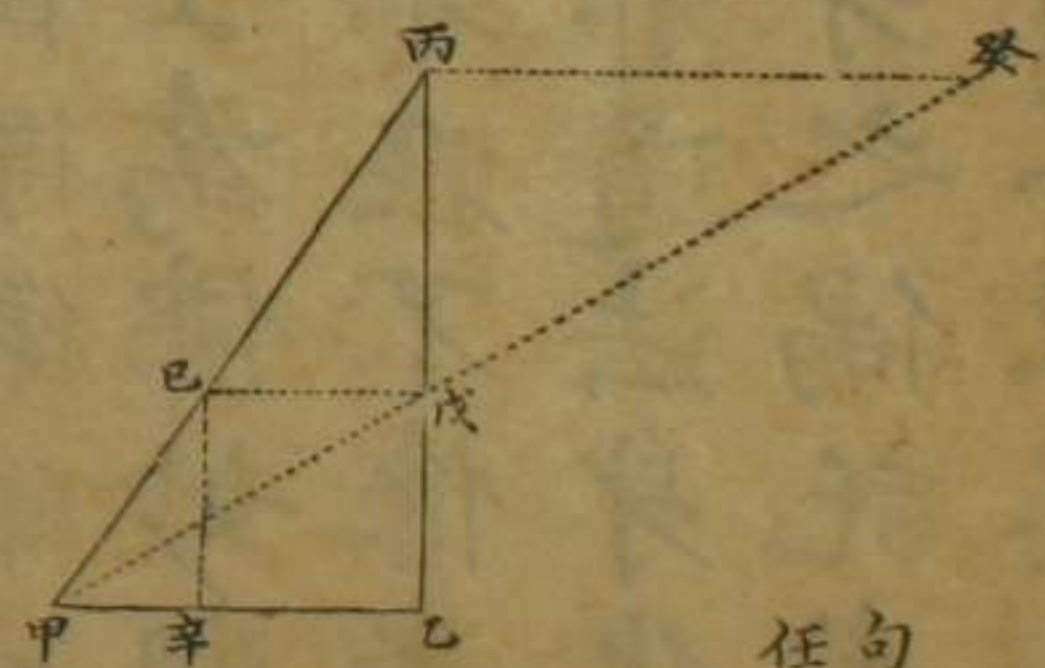
假如句股形求容方。以弦為底。法亦同。鈍銳兩角。

假如句股形求容方。以股為底。則於句端甲作橫線。與股平行。而截之於癸。使癸甲如甲乙句。乃自癸向丙作斜線。割甲乙句於戊。則戊乙即容方之一邊。末作己戊與股平行。作己辛與句平行。即成容方。或以句為底。則從股端丙作丙癸橫線與股等。亦作癸甲斜線。割丙乙股於戊。其所得容方亦。

同圖如左



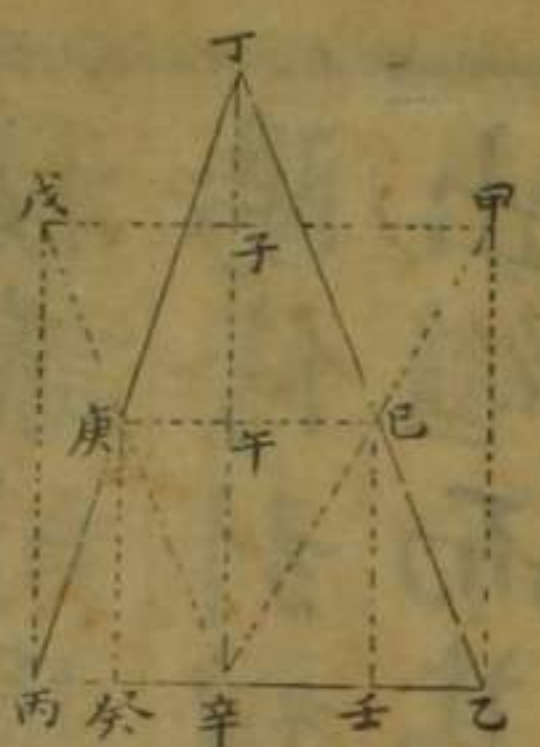
句股形以戊為底



句股形以句為底

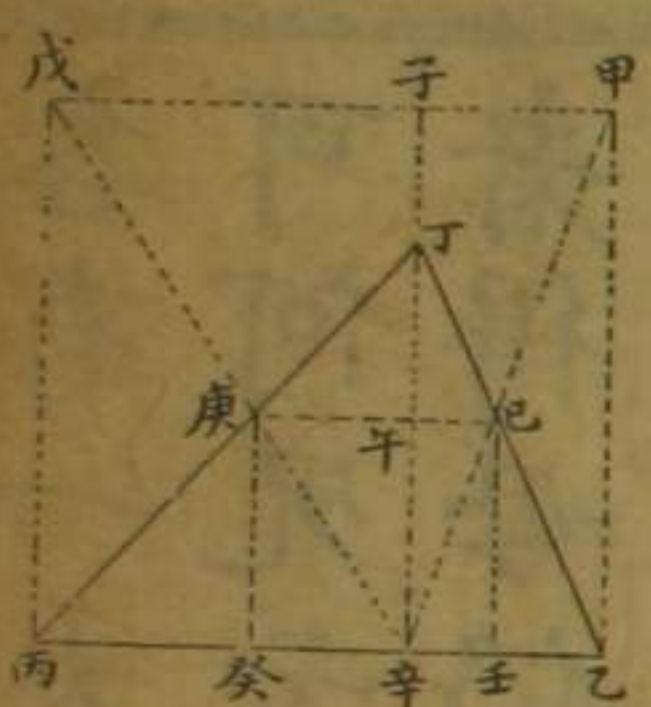
論曰。銳角鈍角。皆截中長線為容方徑。句股形以弦為底亦然。惟句股形以句為底。即截其股為容方徑。用股為底即截句不另求中長。而與截中長之法並同。是為第二術之第一支。

假如乙丙丁三角求容方 依乙丙邊為底



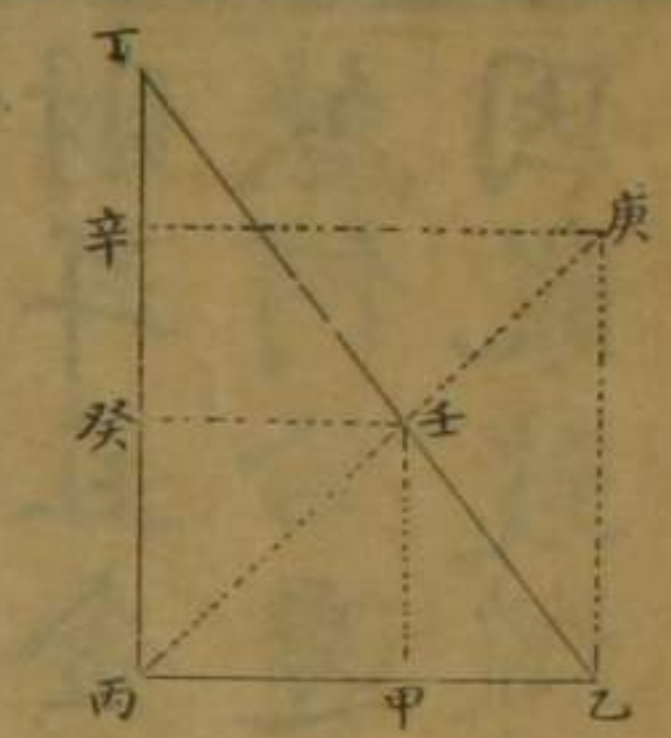
如圖以乙丙底作正方形。即甲乙丙戊方又作丁辛對角線。次作甲辛及戊辛兩斜線。割原形之兩斜線於己於庚。乃作己庚線為所求容方之一邊。末作己壬及庚癸兩線。成小方形於形內。即所求之切形。則其橫與直之比

解曰。甲戊與己庚。若子辛與午辛也。已庚辛三角形為甲戊辛之切形。則其橫與直之比等例相。而甲戊與子辛。同為方徑而等。則己庚與午辛。亦同為小



方徑而等。若底上方形大。則其徑亦大於對角線。則如第二圖引丁辛線至子。其理亦同。有此二法。則三邊並可為底。

鈍角形用大邊為底。句股形用弦為底。並同第二圖。



若句股形以句為底。求容方。如圖。即用乙丙句作庚丙方形。從方角庚向丙作斜線。割丁乙弦於壬。從壬作癸壬及甲壬二線。即所容方。或用股上方。則引出句邊如股。

解曰。庚丙線分丙角為兩平分。則其橫直線自相等。壬癸與癸丙相等。壬甲與甲丙相等。而成正方。嘉禾陳礪菴用分角法求容方。與此

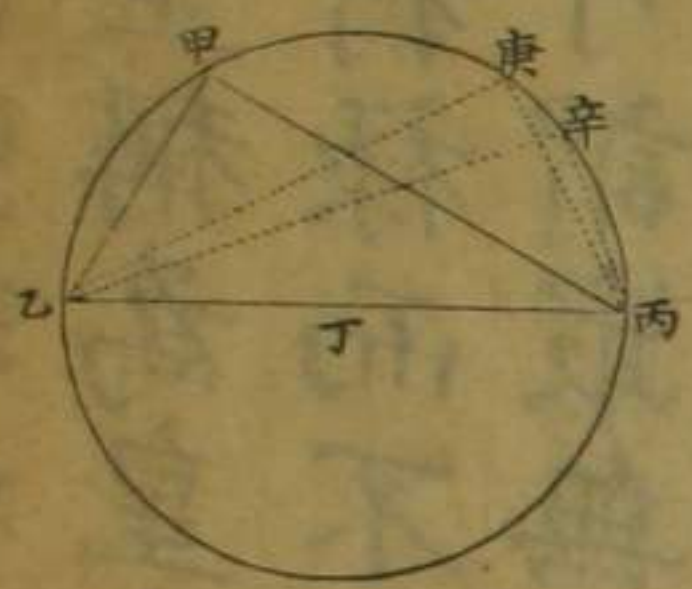
同理

論曰。此皆以底上方形為法。而得所求小方也。故不論頂之偏正。其所得容方並同。惟句股容方依正方角。則中長線與原邊合而為一。法雖小異。其用不殊。是為第二術之第二支。

三角形外切平負第一術

句股形以弦為徑

假如甲乙丙句股形。乙丙弦長四尺五寸二分。求外切負術。以弦折半取心。得半徑二尺二寸六分。其弦長四尺五寸二分。即外切平負全徑。以平負周率三五五乘之。徑率一一三除之。得負周一十四尺二寸。



如圖。乙丙負徑。即句股形之弦。折半于丁。即負心也。以乙丁半徑為度。從丁心運規作負。必過甲。而句股形之三角。皆切負周矣。

論曰。凡平負徑上。從兩端各作直線。至負周相會。則成正方角。

如乙丙徑之兩端于丙于乙各作而為句股形。假令兩線相遇直線會于甲則甲角必為正角故不問句股長短而並以其弦為外切負之徑

又論曰。徑一百一十三。而周三百五十五。此鄭端清世子所述祖冲之術也。見律呂精義按古率周三徑一。李淳風等釋古九章以為術從簡易。舉大綱而言之。誠為通論。諸家所傳。徑五十。周一百五十七。則魏劉徽所改。謂之徽率。徑七。周二十二。則祖冲之所定。謂之密率。由今以觀。冲之自有兩率。一為七與十二。一為一三與三五。蓋以其捷者為恒用之須。而存其精者明測算之理。亦可以觀古人之用心矣。

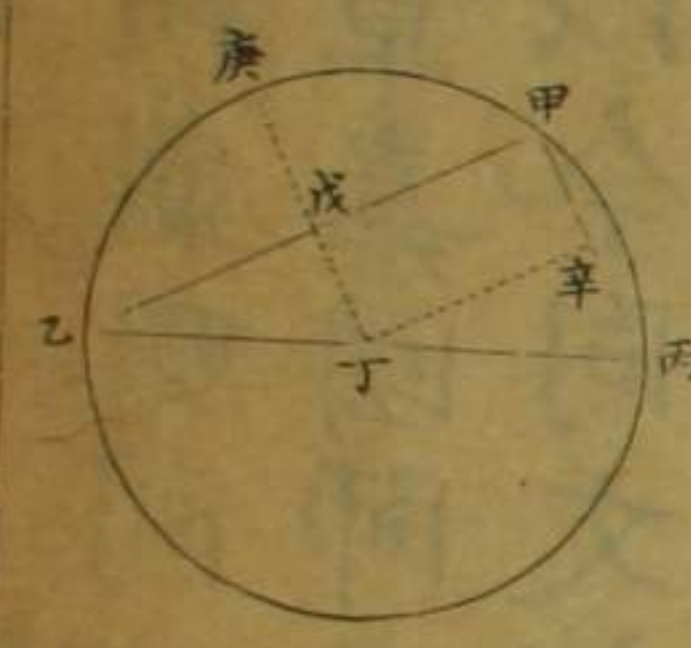
三角形外切平負第二術

分邊取負心。內分二支。並以圖算

- 一 句股形。但分一邊。即得負心。其心在弦
- 一 銳角形。鈍角形。並分二邊。可得負心。銳角形。負心在形內。鈍角形。負心在形外。

假如甲乙丙句股形。求外切負

術任於句或股平分之。作十字正線。此線過弦線之點。即為負



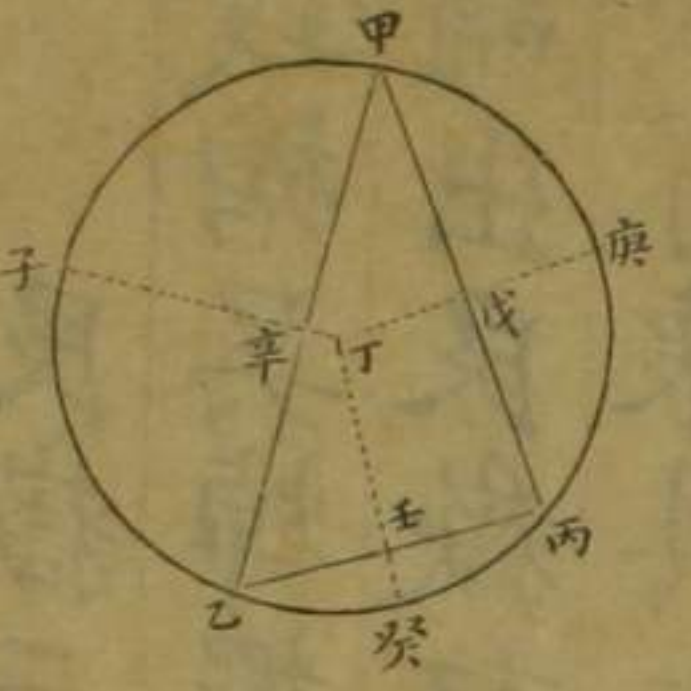
心。如圖。甲乙丙形。以甲乙股平分于戊。從戊作庚丁正十字線。至乙丙弦。即分弦為兩平分。而丁即負心。從丁運規作外切負。則

甲乙丙三點並切負周。而乙丁丙丁庚丁皆半徑。論曰。若平分甲丙句于辛。從辛作十字正線。亦必至丁。故但任分其一邊。即可得心。

又論曰。若依第一術。先得丁心。從丁心作直線與句平行。即此線能分股線為兩平分。如丁庚線與甲丙句平行。過甲乙股。即平分股線于戊。若與股平行而分句線亦然。如丁辛線與甲乙股平行。即分句線于辛。

右句股形。外切平負之心。在弦線中央。

假如銳角形。求形外切負。術任以兩邊各平分。作十字線。引長之。必相遇於一點。即為負心。



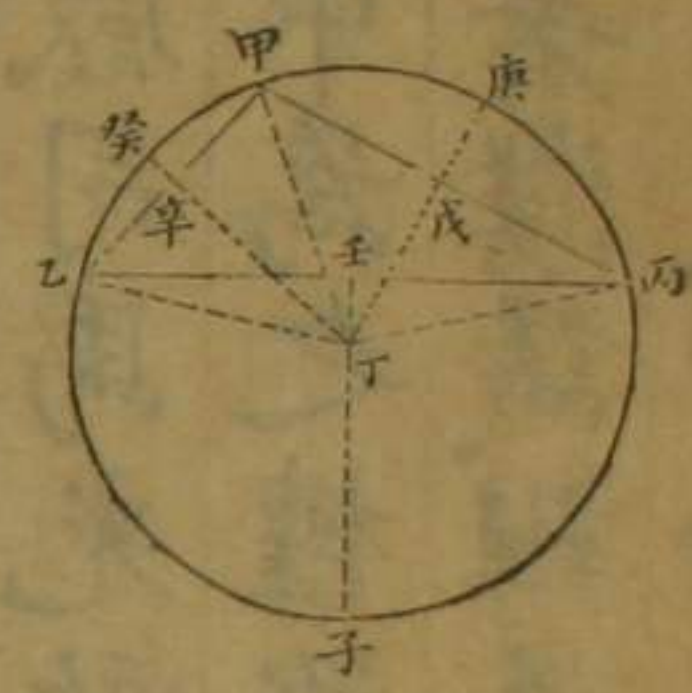
如圖。甲乙丙銳角形。任以甲丙邊平分。于戊。作庚戊丁十字線。又任以乙丙邊平分。于壬。作癸壬丁十字線。兩直線稍引長之。相遇於丁。以丁為心作負。則甲乙丙

三角並切負周。而丁癸丁庚皆半徑。

論曰。試於餘一邊再平分。作十字正線。亦必會于此點。故此點必負心。如甲乙邊再平分。于辛。此十字線亦必相遇于丁點。

右銳角形。外切平負之心。在形之內。

假如鈍角形求形外切負 術同銳角



如圖甲乙丙形。甲為鈍角。任分甲丙于戊。分甲乙于辛。各作十字線。會于丁心。從丁作負。則丁庚丁癸皆半徑。而三角並切負。周若用大邊。平分于壬。作壬丁子線。亦同。論曰。試於丁心作線至丙至乙至甲。必皆成負半徑。與丁庚丁癸同。故丁為負心也。

右鈍角形外切平負之心。在形之外

總論曰。此與容負之法不同。何也。內容負之心。即三角形之心。故其半徑皆與各邊為垂線。而不能平分其邊。然後心作線至角。即能分各角為兩平分。此分角求心之法。所由以立也。外切

負之心。非三角形之心。其心或在形內。或在形外。距邊不等。而能以十字線剖各邊為兩平分。此分邊求心之法。所由以立。蓋即三點串負之法也。

附三點串負



有甲乙丙三點。欲使之並在負周。術任以甲為心。作虛負分。用元度。以丙為心。亦作虛負分。兩負分相交于戊于辛。作戊辛直線。又任以乙為心。以丙為心。各作同度之虛負分。相交于庚于壬。作庚壬直線。兩直線相遇于丁。以丁為心作負。則三點並在負周。負周有三點。不知其心。亦用此法。

五者對也... 亦亦何向... 筆也... 請... 亦不... 那... 亦不...

亦亦何向... 筆也... 請... 亦不... 那... 亦不...

