三角法舉要目錄

御製詩初集目録六

臣黃鉞恭校

三角法舉要卷一

宣城梅文鼎定九父撰

受業宿遷徐用錫壇長
安溪李鍾倫世得
陳萬策對初
景州魏廷珍君壁同校字

測筭名義

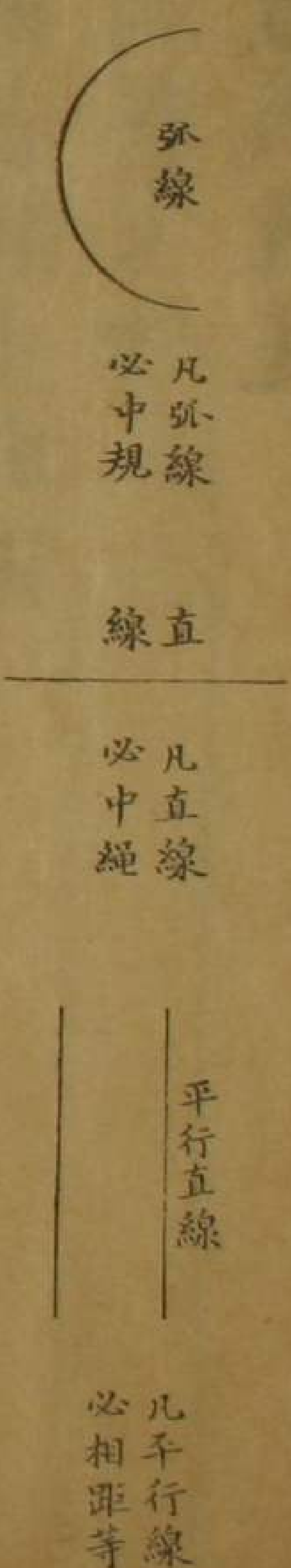
古用句股有割圓弧背弦矢諸名。今用三角。其類稍廣。不可以不知。爰摘綱要。列於首簡

點

點如針芒。無長短闊狹可論。然筭從此起。譬如筭日月行度。只論日月中心一點。此點所到。即為躔離真度

線

線有弧直二種。皆有長短而無闊狹。自一點引而長之。至又一點止。則成線矣

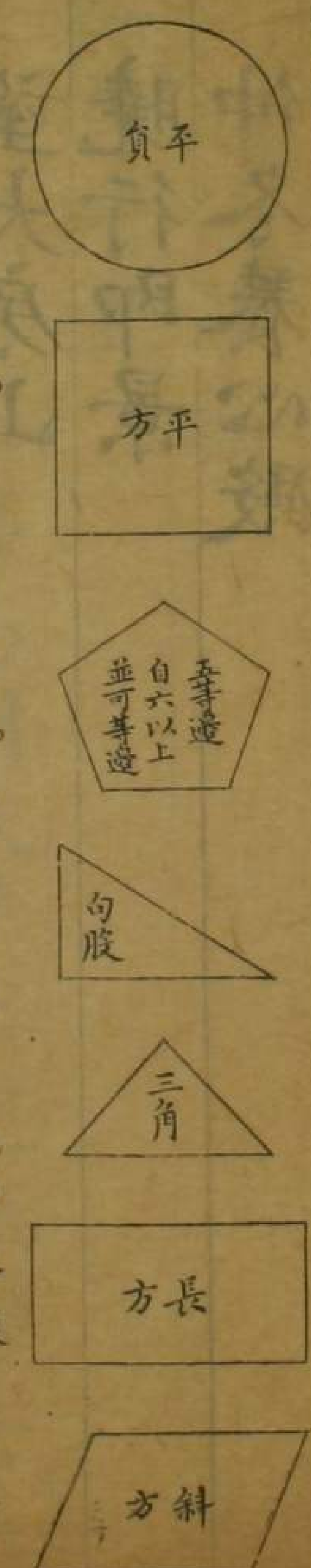


如測日月相距度。皆自太陽心筭至太陰心。是為弧線。如測日月去人遠近。皆自人目中一點筭至太陽太陰天。是為直線

凡句股三角之法。俱論線。線兩端各一點。故線以點為其界

面

面有方員各種之形。皆有長短。有闊狹。而無厚薄。故謂之冪。冪者所以冒物。如量田疇界域。只論土面之大小。不言深淺



面之方員各類。皆以線為界面之線亦曰邊惟員面是一線所成。乃弧線也。若直線。必三線以上始能成形

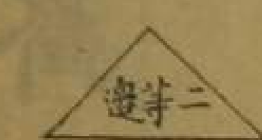
體

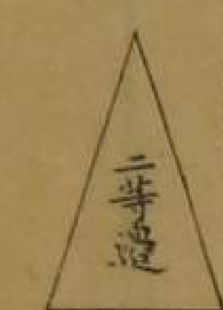
體或方或員。其形不一。皆有長短。有闊狹。又有厚薄或淺深高下之類

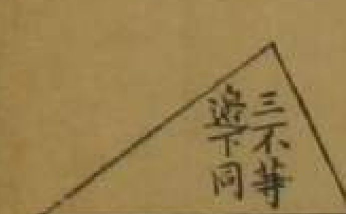
負體如球如柱。方體如櫃如㪷。或如負塔方塔。皆以面為界以上四者。謂點線面體略畫測量之事矣。然其用皆在線。如論點則有距線。論面則有邊線。論體則有稜線。面與面相得則成稜線凡所謂長短闊狹厚薄淺深高下。皆以線得之。三角法者。求線之法也長短闊狹厚薄等類。皆以量而得。而量者必於一線正中。若稍偏於兩旁。則其度不真矣。故凡測量所求者。皆線也

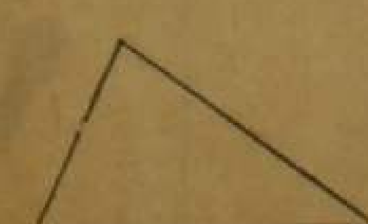
三角形

欲明三角之法。必詳三角之形

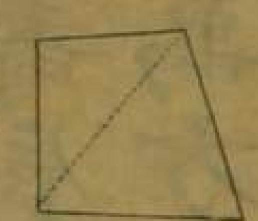


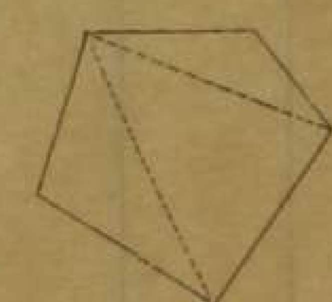






兩直線不能成形。成形者必三線以上。而三線相遇則有三角。故三角形者形之始也


四邊形可分為兩


五邊形可分為三


六邊形可分為四餘可類推

多線皆可成形。析之皆可成三角。至三角則無可析矣。故三角能盡諸形之理

凡可算者為有法之形。不可算者為無法之形。三角者有法之形也。不論長短斜正皆可以求其數。故曰有法。若無法之形。析之成二角則可量。故三角者量法之宗也

角

三角法異於句股者。以用角也。故先論角

兩線相遇則成角平行兩直線。不能作角。何也。線既平行。則雖引而長之。至於無窮。終無相遇之理。角安從生。是故作角者必兩線相遇。必不平行也。

角有三類。一正方角。一銳角。一鈍角

如右圖。以兩線十字縱橫相遇。皆為正方角亦曰直角亦曰方角

如右圖。以兩線斜相遇。則一為銳角。一為鈍角

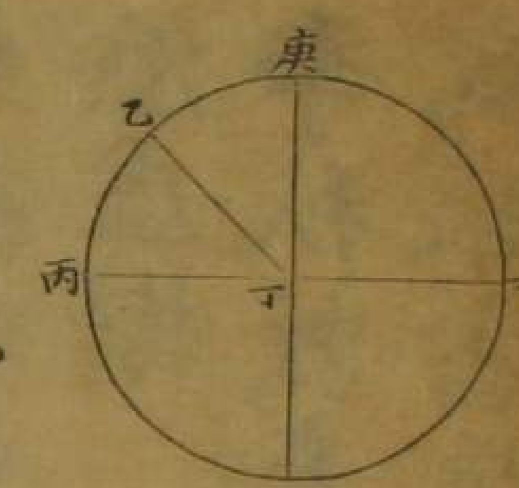
凡銳角。必小於正方角。凡鈍角。必大於正方角

正方角止一。銳角鈍角則有多種。而算法生焉

弧

角在小形與在大形。無以異也。故無丈尺可言。必量之以對角之弧

法以角之端為負心。用規作負負周分三百六十度。乃視本角所對之弧。於全負三百六十度中。得幾何度分。其弧分所對。正得九十度者。為正方角。九十度者。全負四之一。謂之象限若所對弧分。不滿九十度者。為銳角。自八十九度。以至一度。並銳角也所對弧分在九十度以上者。為鈍角自九十一度至百七十九度。並鈍角也



如圖。丁為角。即用為貟心。以作貟形。其庚丁丙角。凡論角度。並以中一字為所指之角。此言庚丁丙。即丁為角也所對者庚丙弧。在全貟為四之一。正得象限九十度。是為正方角

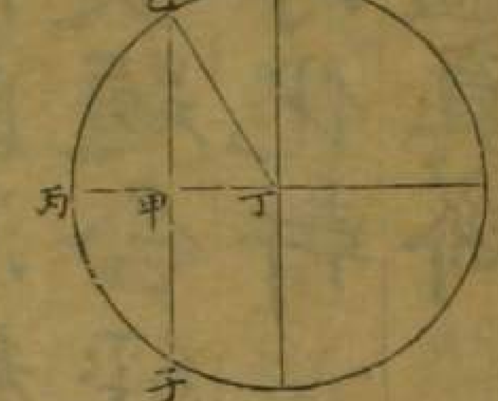
若乙丁丙角。所對者乙丙弧。在象限庚丙弧之內。小於象限九十度。是為銳角

又乙丁壬角。所對乙庚壬弧。過於壬庚弧。壬庚弧。亦象限九十度。故庚丁壬亦方角大於象限九十度。是為鈍角

角之度。生於割貟

割貟弧矢

有弧則有矢。弧矢者。古人割貟之法也



如圖。以乙子直線割平貟。則成弧矢形。所割乙丙子貟分。如弓之曲。古謂之弧背。以弧背半之。則為半弧背如乙丙

通弦正弦

割貟直線。如弓之弦。謂之通弦如乙子

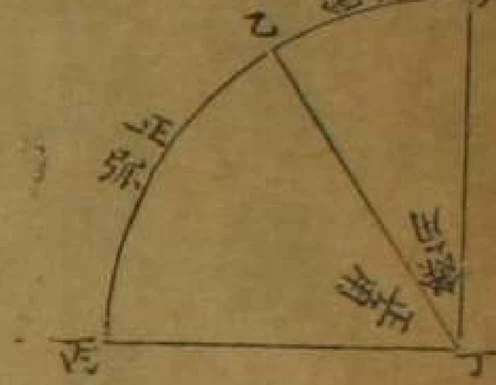
通弦半之。古謂之半弧弦。今曰正弦如乙甲

矢線

正弦以十字截半徑。成矢。如丁丙橫半徑。為乙甲正弦所截。成甲丙矢謂之正矢

以上二條。俱仍前圖

正弧餘弧正角餘角

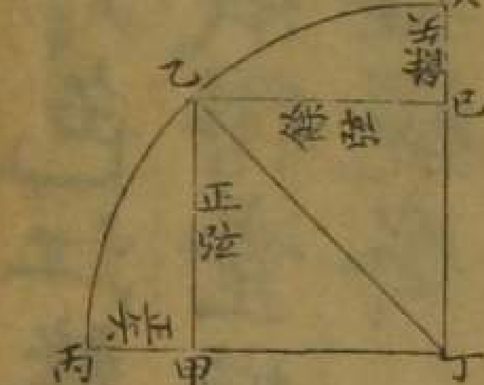


所用之弧度為正弧。以正弧減象限。為餘弧。如庚丙象限內。減乙丙正弧。則其餘乙庚為餘弧

正弧所對。為正角如正弧乙丙。對乙丁丙角。則為正角

以正角減正方角。為餘角如以乙丁丙正角。去減庚丁丙方角。則其餘乙丁庚角。為餘角

正弦餘弦正矢餘矢



有正弧正角。即有正弦。如乙甲有正矢。如甲丙

亦即有餘弦。如乙己有餘矢如己庚

正弦。正矢。餘弦。餘矢。皆乙丙弧所有。亦即乙丁丙角所有

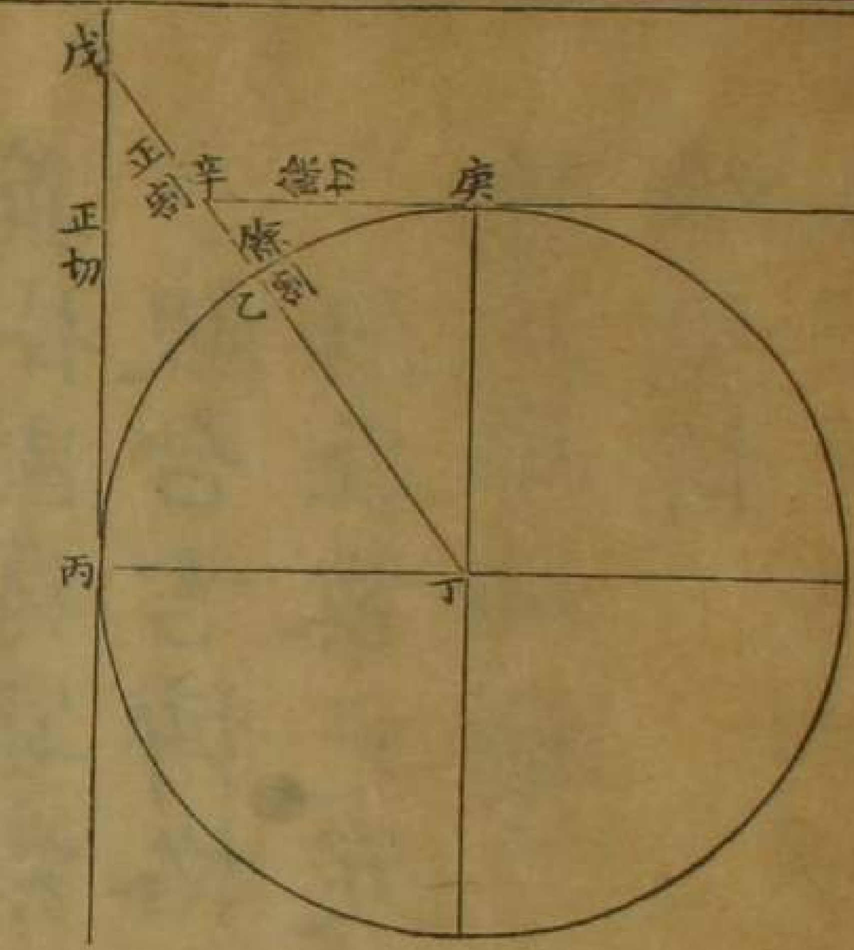
自一度至八十九度。並得為乙丙。並得為正弧。即正餘弦矢畢具

若用乙庚為正弧。則乙丙反為餘弧

角之正餘亦同

割線切線

每一弧一角。各有正弦餘弦正矢餘矢。已成四線。於平員內古人用句股割員。即此法也。蓋此四線。已成倒順二句股再引半徑。透於平員之外。與切員直線相遇。為割線切線。而各有正餘。復成四線。正割。正切。餘割。餘切。復成倒順二句股共為八線。故曰割員八線也



又以半貟切庚辛直線於庚。與乙丁透出線相遇於辛。則庚辛為乙丙弧之餘切線。亦即為乙丁丙角之餘切線。而辛丁為乙丙弧之餘割線。亦即為乙丁丙角之餘割線

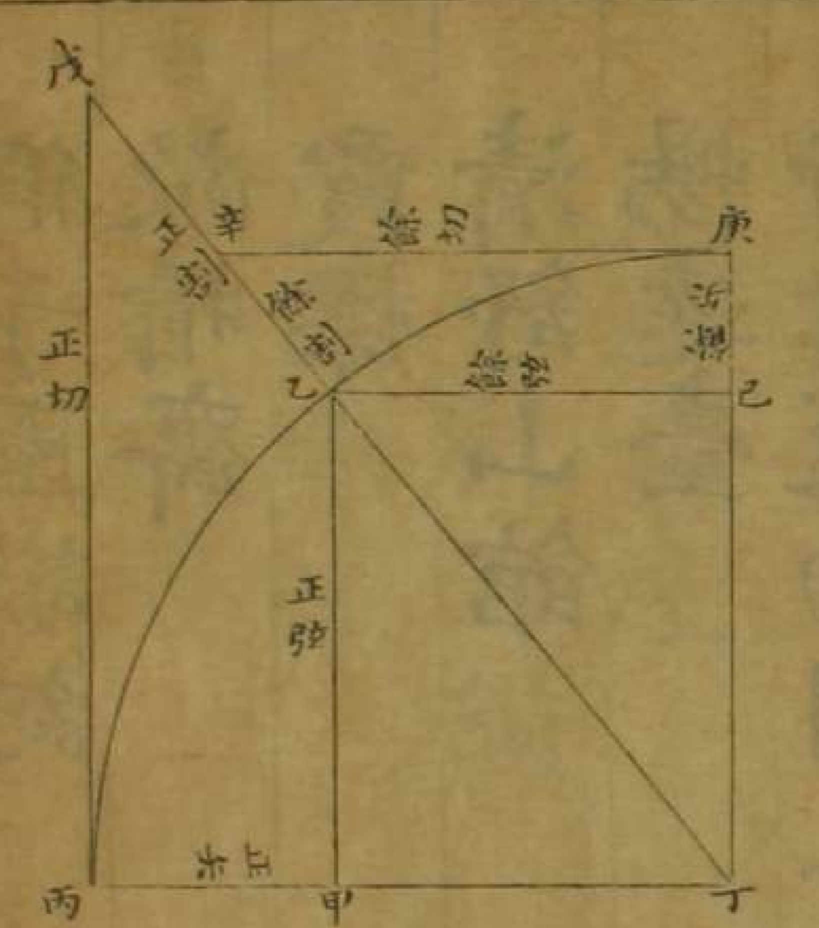
如圖。庚乙丙半貟。切戊丙直線於丙。又引乙丁半徑透出貟周外。使兩線相遇於戊。則戊丙為乙丙弧之正切線。亦即為乙丁丙角之正切線。而戊丁為乙丙弧之正割線。亦即為乙丁丙角之正割線

割貟八線

凡用一弧。即對一角。用一角。亦對一弧。故可互求

凡一弧。即有八線。正弦。正矢。正割。正切。餘弦。餘矢。餘割。餘切角亦然

凡一弧之八線。即成倒順四句股。角亦然



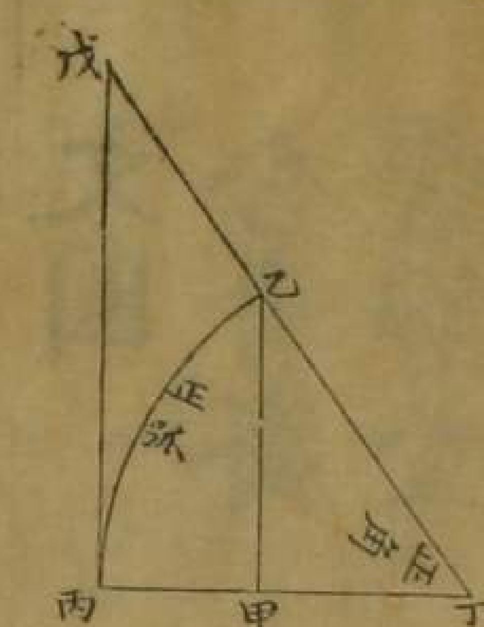
如圖。庚丙象弧共九十度。庚丁丙為九十度十字正方角。任分乙丙為正弧。乙丁丙為正角。則乙庚為餘弧。乙丁庚為餘角

正弦乙甲同丁己　餘弦乙己同丁甲　正矢甲丙　餘矢庚己　正切戊丙　餘切辛庚　正割戊丁　餘割辛丁

以上八線。為乙丙弧所用。亦即為乙丁丙角所用。自一度至八十九度、並同

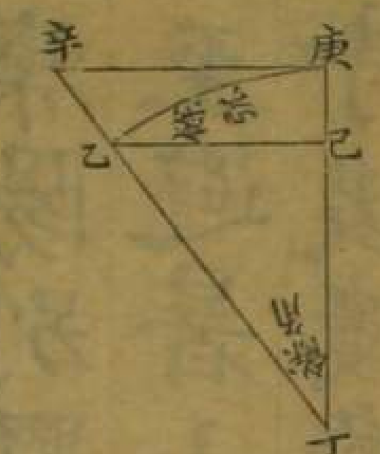
若用乙庚弧。亦同此八線。但以餘為正。以正為餘

兩順句股等角圖

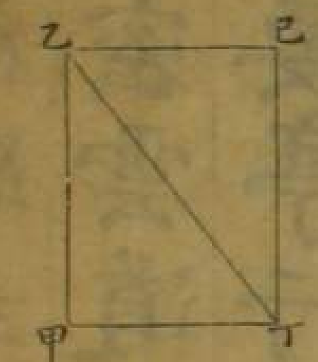


乙甲丁句股形。乙丁半徑為弦。乙甲正弦為股。丁甲餘弦為句　戊丙丁句股形。戊丁正割為弦。戊丙正切為股。丙丁半徑為句　以上兩順句股形。同用乙丁甲角。故其比例等凡句股形一角等。則餘角並等

兩倒句股等角圖



順倒兩句股等邊等角圖

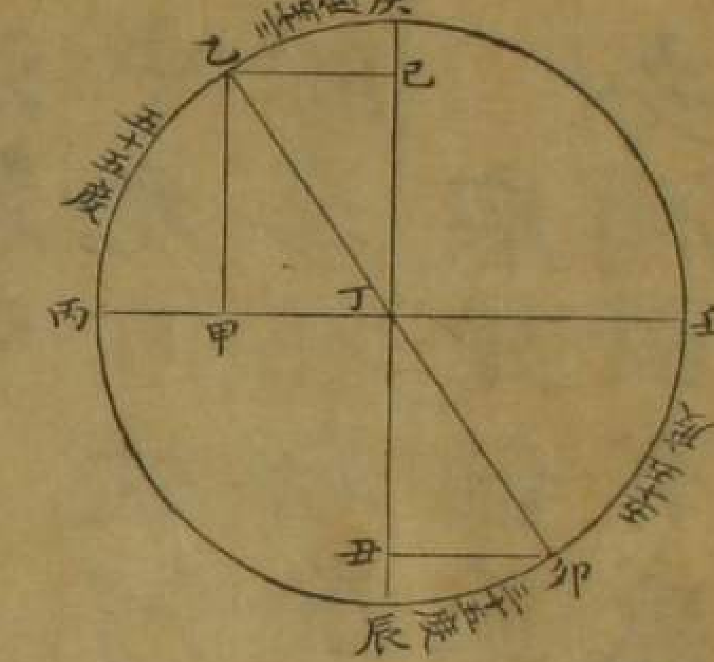


乙己丁倒句股形。乙丁半徑為弦。己丁正弦為股。乙己餘弦為句　辛庚丁倒句股形。辛丁餘割為弦。丁庚半徑為股。辛庚餘切為句　以上兩倒句股形。同用乙丁己角。故其比例亦等

乙甲丁句股形。乙丁半徑為弦。乙甲正弦為股。甲丁餘弦為句　丁己乙倒句股形。乙丁半徑為弦。己丁正弦為股。乙己餘弦為句　此倒順兩句股形。等邊又等角。倒形之丁角。即順形丁角之餘。倒形之乙角。即順形乙角之餘竟如一句股也。準此論之。則倒順四句股之比例。亦無不等矣

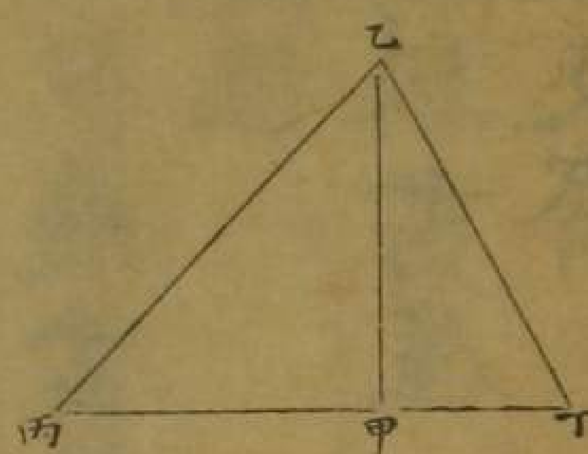
角度

凡三角形。併三角之度。皆成兩象限（共一百八十度）



假如乙甲丁句股形。其丁角五十五度。（當乙丙弧）則乙角必三十五度。（當乙庚餘弧）其甲角正方。兩角共一象限九十度。原係九十度。合三角。成一百八十度

乙角何以必三十五度也。試引乙丁弦過心至卯。則卯丁丑角。與丁乙甲角等。（卯丁乙同為一線。丁丑線又與乙甲平行。則所作之角必等）而卯丁丑固三十五度也。則乙角亦三十五度矣



又假如丙乙丁三角形。從乙角作乙甲直線。至丁丙邊。分為兩句股形。（乙甲丁。乙甲丙）準前論。乙甲丁句股形。以乙分角與丁角。合之。成一象限九十度。又乙甲丙句股形。以乙分角與丙角。合之。成一象限九十度。然則以乙全角（即兩分角之合）與丁丙兩角。合之必兩象限一百八十度矣（乙為鈍角並同）

以此推知三角形。有兩角。即知餘角。（併兩角。以減半周一百八十度得之）句股形。有一角。即知餘角（句股原有正方角九十度。則餘兩角共九十度。故得一可知其二）

相似形

既知角。可以論形。有兩三角形。其各角之度相等。則為相似形。

而兩形中各邊之比例相等（謂此形中各邊自相較之比例。亦如彼形中各邊自相較之比例也）

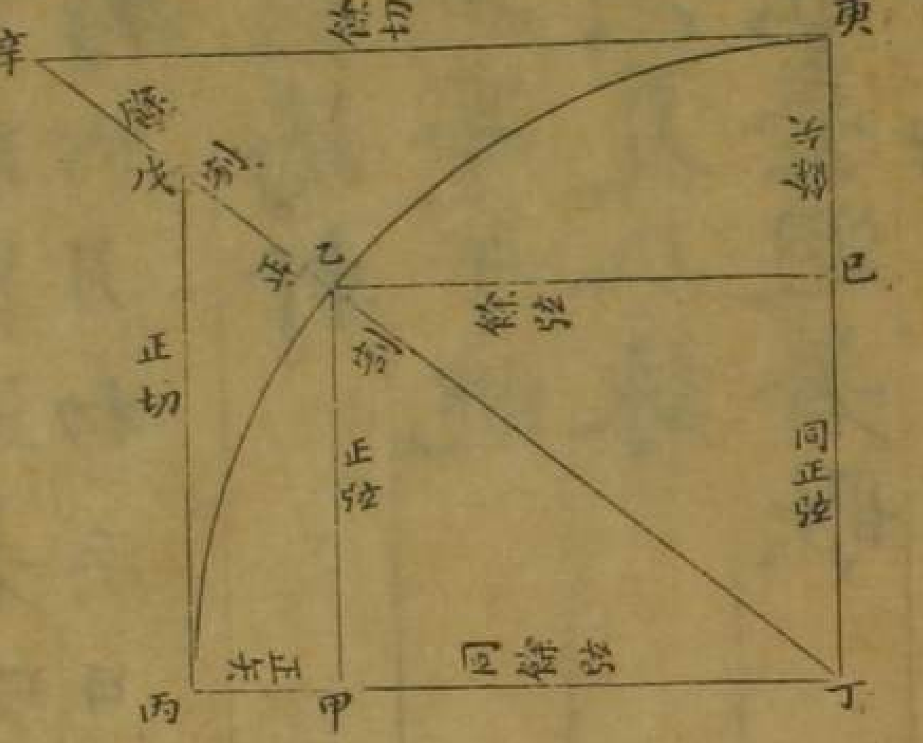
比例

兩數相形則比例生。比例者。或相等。或大若干。或小若干。乃兩數相比之差數也。有兩數於此。又有兩數於此。數雖不同。而其各兩數自相差之比例同。謂之比例等

或兩小數相等。又有兩大數相等。是為相等之比例。數雖有大小。其相等之比例。均也。或兩小數相差三倍。又有兩大數亦相差三倍。是為三倍之比例。或兩小數相差為一倍有半。又有兩大數相差亦一倍有半。是為一倍有半之比例。數雖有大小。其為三倍之比例。及一倍有半之比例。均也

論八線之比例有二

一為八線自相生之比例

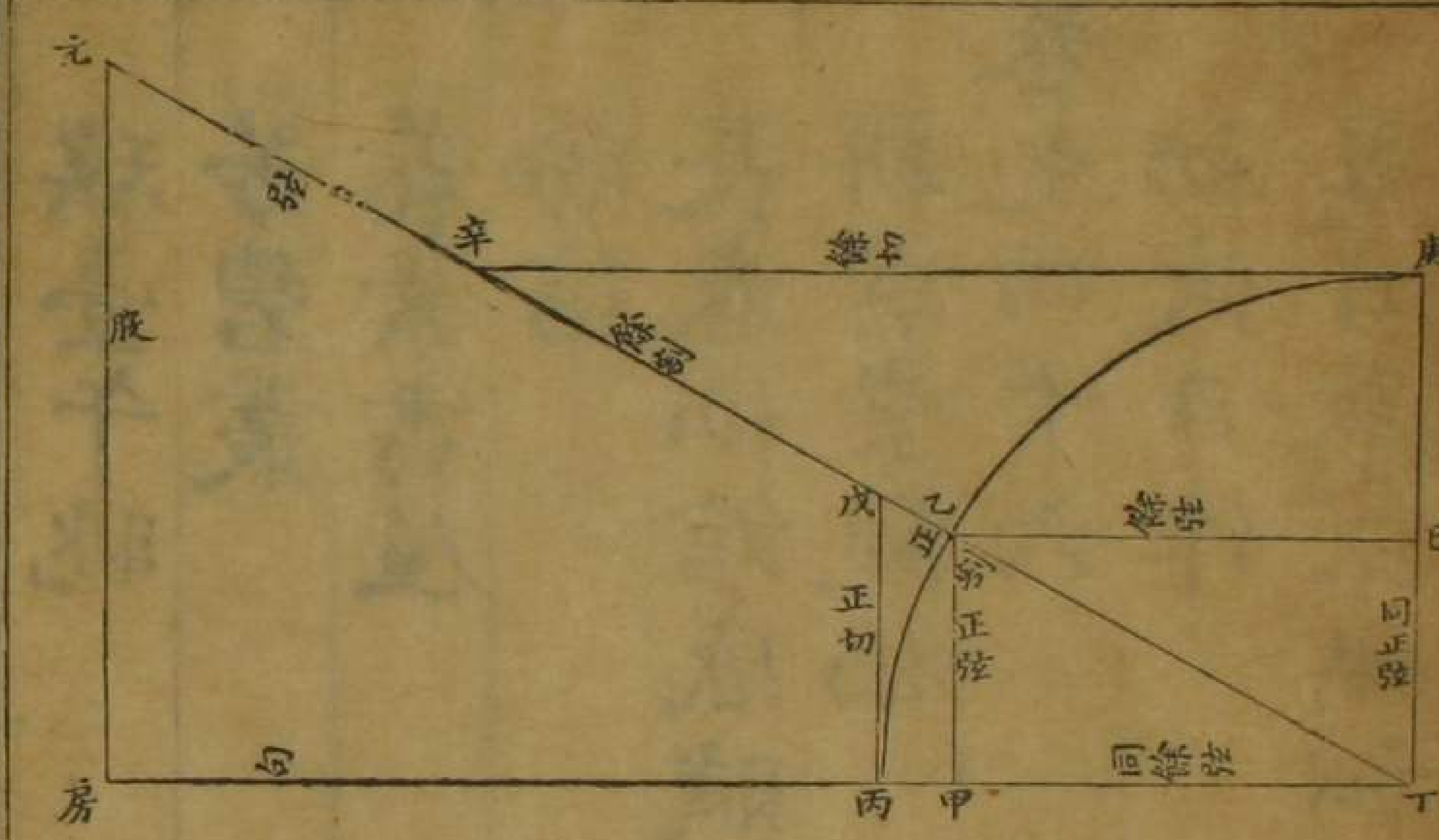


乙甲丁小句股形。與戊丙丁大句股形相似。（見前條）故以半徑乙丁。比正弦乙甲。若割線戊丁。與切線戊丙之比例也。（此為以小弦比小股若大弦與大股）股求弦亦同

又以半徑丙丁。比正切戊丙。若餘弦甲丁。與正弦乙甲之比例也。（此為以大句比大股。若小句比小股。）股求句亦同。餘倣此

以故凡八線中。但得一線。則餘皆可求。觀圖自明

一為八線算他形之比例



乙丁甲角所有八線。為表中原設之數。亢丁房句股形。為今所算之數

或先有丁角。有亢丁弦。而求房丁句。則為以乙丁半徑。比甲丁餘弦。若亢丁弦。與房丁句也以角與句求弦。亦同

以上是用八線以求他形

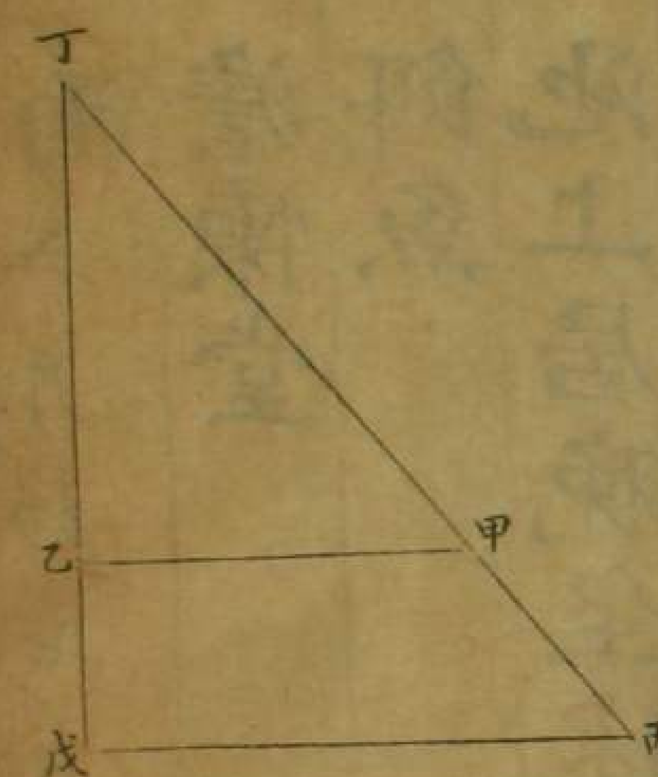
或先有亢丁弦。有亢房股。而求丁角。則為以亢丁弦。比亢房股。若乙丁半徑。與丁角之正弦乙甲也得乙甲。得丁角矣

或先有亢房股。與房丁句。而求丁角。則為以亢房股。比房丁句。若丁庚半徑。與庚辛餘切也。得庚辛。亦得丁角

總而言之。皆以先有兩數之比例。為後兩數之比例。其乘除之法。皆依三率也

三率

三率算術。古謂之異乘同除。今以句股解之



丁戊大股。十四尺丙戊大句。十一尺二寸

截丁乙小股。十尺問乙甲截句

荅曰。八尺

術以所截小股乘大句。得數為實。

以大股為法。除之。即得截句

異乘同除圖

原有股十四尺 為法　　原句十一尺二寸

同名相除　　異名相乘

乘得一百一十二尺 為實

截小股十尺　　截句八尺 法除實得截句

若先以原股十四尺除原句十一尺二寸得八寸。為每一尺之句。再以截股十尺乘之。亦得八尺。但先除後乘。多有不盡之數。故改用先乘後除。乃古九章中通用之綱要也

先乘後除。何以又謂之異乘同除。曰今但有截股。而不知句。故以原有之句乘之。股與句異名。故曰異乘。然後以原有之股除之。股與股同名。故曰同除

然則又何以謂之三率。曰。本是以原有之股與句。比今截之股與句。共四件也。然見有者只三件。原有之股與句。及今截之股。故必以見有之三件。相為乘除。而得所不知之第四件。故曰三率

三率乘除圖式

一率	原有股十四尺	為法
二率	原有句十一尺二寸	相乘為實
三率	今截股十尺	
四率	所求截句八尺	法除實得所求

術曰。以原股比原句。若截股與截句也

凡言以者為一率。言比者為二率。言若者為三率。言與者

為四率

二率三率。常相乘為實。一率常為法。法除實。得四率。四率乃所求之數。其三率者。所以求之也

三率與異乘同除。非有二理。但以横列為異。然數既平列。即可以四率為法。除二三相乘之實。而得一率。并可以一率四率相乘為實。用二率為法除之。而得三率。或用三率為法除之。亦得二率。是故一四二三之位。可以互居。四可為一。二可為三。法實可以迭用。二與三。可居一四之位。一與四。可居二三之位。變動不居。惟用所適。而各有典常。於異乘同除之理。尤深切而著明者也

三率互用圖

反之

一	二	三	四
句八尺	股十尺	句十一尺二寸	股十四尺

更之

一	二	三	四
股十尺	句八尺	股十四尺	句十一尺二寸

又反之

一	二	三	四
句十一尺二寸	股十四尺	句八尺	股十尺

右並以二率三率相乘為實。一率為法除之。而得四率

八線表

八線為各弧各角之句股所成。故八線表者。即句股形之立成數也。古人用句股開方。已盡測量之理。然句股弦皆邊線耳。邊之數無方。放之則彌四遠。近之則陳几案。故所傳筭術。皆以一端示例而已。不能備詳其數也。令變而用角。則有弧度三百六

十以限之。而以象限盡全周。有合於舉一反三之旨。又析象限之度各六十分。凡為句股形二千七百角度五千四百。九十度之分。五千四百。而句股形並有兩角。故其形二千七百。而角數倍之為正弦。為切線。為割線。共一萬六千二百。三項各五千四百。正餘互用也而句股之形略備。用之殊便也銳角分兩句股。鈍角補成句股。然惟有八線表中豫定之句股。故但得其角度。則諸數歷然。可於無句股中尋出句股矣

半徑全數

全數。即半徑也。不言半徑而言全數者。省文也。凡八線生於角度。而有角有弧。則有半徑。八線之數。皆依半徑而立也。半徑常為一。或五位。則為一萬。或六位。則為十萬。則正弦常為半徑之分。正弦必小於半徑。而不得為全數。惟半徑可稱全數也割切二線。皆依正弦而生。亦皆有時零。不得為全數

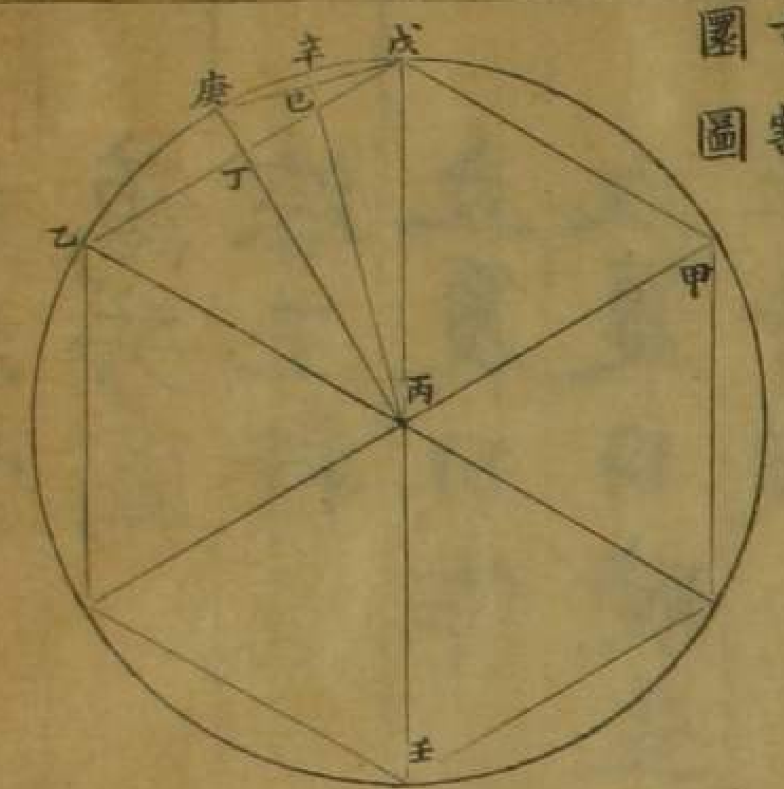
用全數為半徑。有數善焉。一立表時易於求數也。一用表時便於乘除也三率中。全數為除法。則但降位。可省一除。若全數為乘法。則但升位。可省一乘曆書中多言全數或但曰全以從省便。今算例中直云半徑。以欲明比例之理。故質言之

一卷補遺

正弦爲八線之主

割圜之法。皆作句股於圜内。以先得正弦。故古人祇用正弦。亦無不足。今用割切諸線。而皆生於正弦

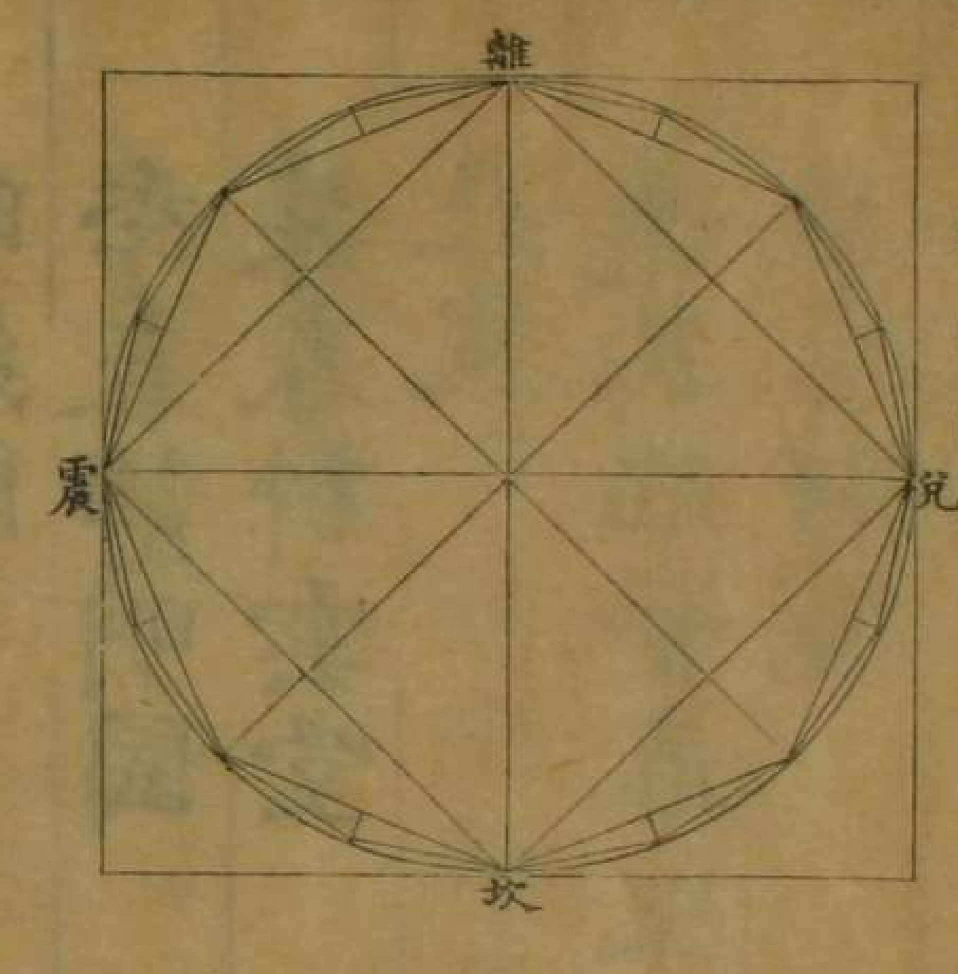
古割圜圖



平圜徑二尺。即戊壬半之一尺。即戊丙庚丙等爲圜裡六弧之一面。即乙戊半徑戊丙爲弦。半面戊丁爲句。句弦求股。得股丁丙轉減半徑。庚丙得餘庚丁爲小句。半面戊丁又爲小股。句股求弦。得小弦戊庚是爲割六弧成十二弧之一面。如是累析。爲二十四弧。四十八弧。至九十六弧以上。定爲徑一尺周三尺一寸四分有奇

論曰。九章筭經載劉徽割圜術。大畧如此。其以半徑爲六弧之一面。與八線理合。半徑恒爲一。即全數。半面爲股。則正弦也

趙氏割圜圖



平方徑十寸。其積百寸。內作同徑之平圜。平圜內又作平方。正得外方之半。其積五十寸。平方開之。得七寸〇七有奇。即離震等四等面之通弦乃自四隅之旁增爲八角曲圜。爲第一次。即八等面通弦至第二次。則爲曲十六。即十六等面通弦第三次爲曲三十二。每次加倍。至十二次。則爲曲一萬六千三百八十四。於是方不復方。漸變爲圜矣。其法逐節以大小句股弦冪相求。至十二次所得小弦。以一萬六千三百八十四乘之。得三十一寸四分一釐五毫九絲二忽。爲徑十寸之圜周。與祖冲之徑一百一十三。周三百五十五合

論曰。元趙友欽革象新書所撰乾象周髀法。大畧如此。所得周徑。與西術同。其逐節所求皆通弦。所用小股皆正弦也

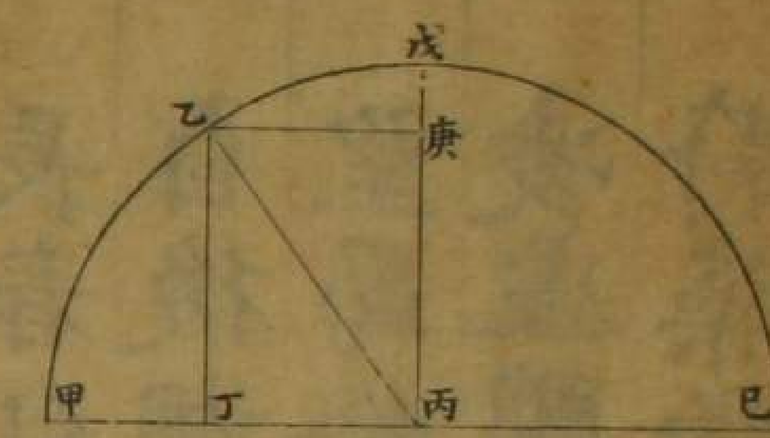
又論曰。劉徽祖冲之。以割六弧起數。趙友欽以四角起數。今西術作割圜八線以六宗率。則兼用之。可見理之至者。先後一揆。法之精者。中西合轍。西人謂古人但知徑一圍三。未深考也

又論曰。中西割圜之法。皆以句股法求通弦。通弦半之爲正弦。割圜諸率。皆自此出。總之爲句股之比例而已

鈍角正弦

鈍角不立正弦。而即以外角之正弦爲正弦

鈍角之正弦在形外。即外角之正弦也。故乙丙巳鈍角。與乙丙甲外角。同以乙丁爲正弦。以鈍角減半周。得外角。假如鈍角一百二十度。其所用者。即六十度之正弦。乙丁線能爲乙丙甲角正弦。又能爲乙丙巳鈍角正弦。八線表止於象限以此因鈍角與外角同正弦、故表雖一象限。而實有半周之用



鈍角餘弦

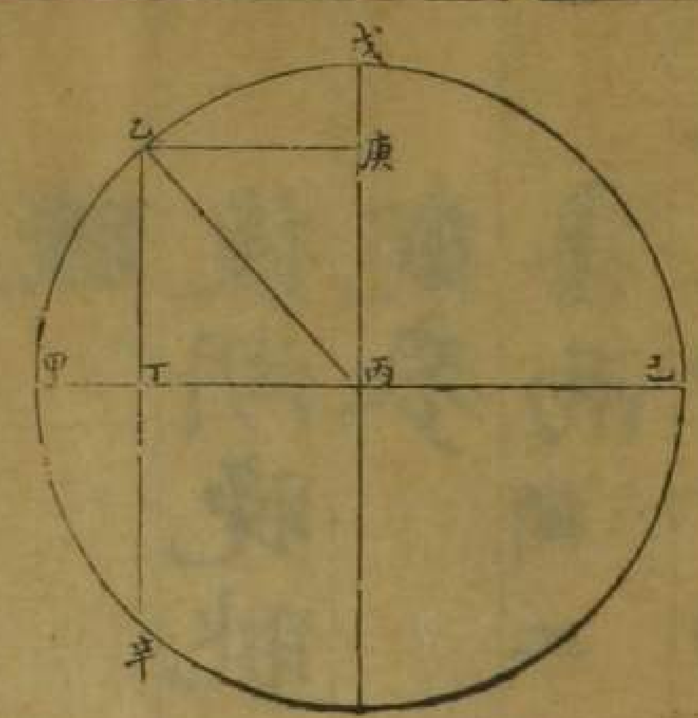
鈍角既以外角之正弦爲正弦。即以外角之餘弦爲餘弦

如前圖。乙庚爲外角乙丙甲餘弦。而即爲鈍角乙丙巳餘弦

捷法。以正角戊丙巳減鈍角。乙丙巳得餘角。乙丙戊即得餘弦

過弧

鈍角之弧爲過弧



巳戊爲象限弧。而乙戊巳爲乙丙巳鈍角之弧。是越象限弧而過之也。故曰過弧

大矢

鈍角之矢爲大矢

如前圖。以乙丁辛弦分全圜。即全徑亦分爲二。則丁甲爲小半圜乙甲辛之徑。謂之正矢。丁巳爲大半圜乙巳辛之徑。謂之大矢。大矢者。鈍角所用也

鈍角與外角。同用乙丁正

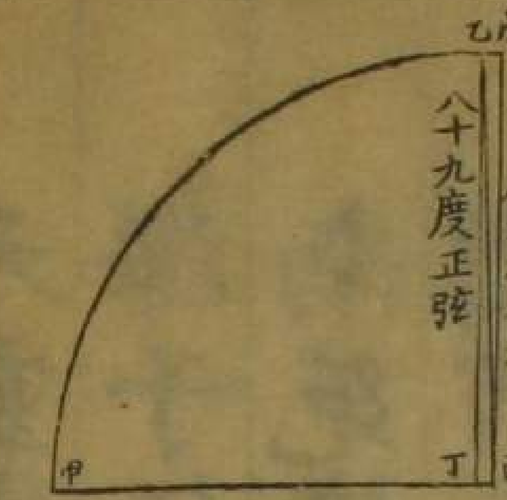
弦。乙庚餘弦。所不同者惟矢乙丙己角。用大矢丁己。乙丙甲角。用正矢丁甲。

捷法。以乙庚即丁丙餘弦。加己丙半徑。即得丁己大矢若以餘弦減半徑。亦得正矢

正角以半徑全數為正弦

八線起○度一分。至八十九度五十九分。並有正弦。而九十度無正弦。非無正弦也。蓋即以半徑全數為其正弦。故凡算三角。

有用半徑與正弦相為比例者。皆正角也其法與銳角形鈍角形用兩正弦為比例同理。並詳後卷



八十九度奇之正弦。至九九九九九而極。迨滿一象限。始能成半徑全數。是故半徑全數者。正角九十度之正弦也。其數為一○○○○○